

# Método FDTD em Coordenadas Locais Não-Ortogonais Reduzido Aplicado na Análise de Espalhamento Eletromagnético por Cilindro Dielétrico

R. O. Santos, F. J. B. Barros, R. M. S. Oliveira e C. L. S. S. Sobrinho

**Resumo** - O uso do método das diferenças finitas no domínio do tempo em coordenadas locais não-ortogonais, (método LN-FDTD), passa a ser bastante atrativo para análise de geometrias que apresentam contornos curvo, devido principalmente à simplicidade de seu algoritmo e da precisão obtida. Contudo, o esforço computacional é alto, de forma que a memória exigida pode tornar-se uma limitação para a análise de estruturas de grandes dimensões elétricas. A limitação de memória vem do fato de que todo o domínio computacional tem de ser discretizado por células cujo tamanho máximo das arestas é de aproximadamente um décimo de um comprimento de onda para evitar a dispersão numérica. Neste trabalho, a formulação LN-FDTD foi modificada para reduzir a memória requerida em 33%, eliminando-se um terço das componentes necessárias ao método LN-FDTD. Os resultados obtidos pela nova formulação (Método R-LN-FDTD), considerando-se o espalhamento eletromagnético por cilindro dielétrico, foram comparados com aqueles obtidos usando-se o método FDTD convencional e com a solução analítica do problema. Excelente concordância foi verificada entre as soluções mencionadas.

**Index Terms**—Método FDTD, Método LN-FDTD, Método R-LN-FDTD, Cilindro dielétrico, Espalhamento Eletromagnético.

## I. INTRODUÇÃO

O uso do método FDTD, na solução das equações de Maxwell, considerando-se grade (malha) não ortogonal foi inicialmente proposto por Holland [1], o qual considerou um sistema de coordenadas curvilíneas gerais. Esta técnica é denominada de método FDTD não ortogonal ou método GN-FDTD. Neste método a formulação de Stratton [2] foi usada para solucionar numericamente as equações de Maxwell na forma diferencial. Contudo, o método GN-FDTD tem aplicações limitadas por causa da necessidade de se ter um sistema de coordenadas que seja analiticamente descrito em uma base global [3]. Subseqüentemente, Fusco em [4] desenvolveu as equações de Maxwell na forma discreta para um sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonais. Este método é mais versátil que o método GN-FDTD, embora haja

a necessidade do desenvolvimento e aplicação de software de geração de malhas generalizadas para discretizar a região de análise. Lee, e outros [5], expandiram o trabalho desenvolvido por Fusco para três dimensões e demonstraram o critério de estabilidade do método. Este método foi então denominado de método LN-FDTD. Contudo, o custo computacional do método LN-FDTD é alto, e a memória computacional exigida pode representar-se uma limitação para estruturas de grandes dimensões elétricas, mesmo empregando-se processamento paralelo. A limitação de memória vem do fato de que todo o domínio computacional tem de ser discretizado por células cujo tamanho máximo das arestas é de aproximadamente um décimo do comprimento de onda para evitar a dispersão numérica que levaria a imprecisão dos resultados.

Duas técnicas já desenvolvidas [6], [7] foram usadas com o propósito de redução de memória requerida, mas ambas aplicadas ao método FDTD convencional. Em [6], o uso de regiões livres de cargas foi introduzido, combinado com a equação de onda escalar para atingir este objetivo. Nesta formulação, os autores subdividiram o domínio computacional em regiões de livre divergência e regiões de não livre divergência. O método FDTD convencional foi aplicado em regiões de descontinuidade, condutores, fontes e interfaces dielétricas, enquanto que a equação de onda escalar, requerendo quatro elementos de memória por célula ao invés das seis usuais (método FDTD convencional), foi usado em regiões de divergência do campo elétrico nulo. Em virtude de ter sub-regiões esta formulação pode ser complicada de implementar e, o mais importante, a redução de memória para esta técnica é somente alcançada para algumas geometrias específicas, tais como, estruturas planares ou em outros casos onde existam grandes regiões homogêneas. Em [7], o método FDTD convencional foi utilizado com o mesmo objetivo. O método denominado pelo autor de método R-FDTD (Reduced-Finite difference Time Domain) elimina a necessidade de subdivisão do domínio computacional em sub-regiões, mantendo a vantagem de reduzir o número de componentes de campo para quatro, enquanto sendo capaz de tratar facilmente condutores e regiões de fontes. Isto é realizado com o uso da natureza de livre divergência do deslocamento elétrico ao invés do campo elétrico como em [6]. Os condutores e as regiões de fontes são apropriadamente tratados. Para isso, é necessário calcular as cargas induzidas, que são então usadas no divergente de  $\mathbf{D}(\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho)$ . Nessa formulação, embora se armazenem somente quatro componentes de campo sobre todo domínio computacional, podem-se reconstruir as outras duas componentes de campo. Desta forma, condições de contorno como Mür [8], ou PMLs [9], [3] podem ser implementadas.

Este trabalho foi parcialmente suportado em parte pelo CNPq, CAPES e pelo contrato UFPA01- Ericsson-UFPA, com cooperação técnica da Amazônia Celular.

R. O. Santos, Prof. Dr. do Instituto de Ensino Superior da Amazônia, IESAM. (e-mail: ronaldo@ufpa.br)

F. J. B. Barros, atualmente fazendo mestrado na PUC-RJ, (e-mail: fjbbarros@yahoo.com.br).

R. M. S. Oliveira está no mestrado da Universidade Federal do Pará, (e-mail: rodrigo@deec.ufpa.br)

C. L. S. S. Sobrinho, Prof. Dr. do Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Pará. (e-mail: leonidas@ufpa.br).

Uma das limitações destas formulações é que problemas que apresentam seus contornos (geometria) não coincidentes com as coordenadas do sistema cartesiano não podem ser analisados de forma apropriada, sendo necessárias, em tais casos, aproximações por *staircase*.

O objetivo deste trabalho é modificar a formulação LN-FDTD para reduzir a memória requerida, permitindo um aumento do volume computacional para um dado tamanho de memória computacional. Isto é feito tomando-se como base a formulação desenvolvida em [5], [7].

## II. O MÉTODO R-LN-FDTD

Neste trabalho, a formulação para o método R-LN-FDTD será feita tomando-se como base o modo TE, no qual apenas as componentes de campo  $E_1$ ,  $E_2$  e  $H_3$  são consideradas. Aplicando-se o divergente em ambos os lados das equações rotacionais de Maxwell, lei de Ampère e lei de Faraday, e considerando regiões livres de cargas, tem-se, respectivamente:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (-\nabla \times \mathbf{E}) = 0. \quad (2)$$

Aproximando-se as derivadas temporais por diferenças centradas em (1) e por diferença avançada em (2), reescrevem-se as equações acima como segue:

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}^{n+1/2} - \mathbf{D}^{n-1/2}) = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}^{n+1} - \mathbf{B}^n) = 0 \quad (4)$$

Assumindo inicialmente (no tempo  $t = 0$ ) que todas as componentes são nulas sobre todo o domínio computacional, obtém-se, de (3) e (4):

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^{n+1/2} = 0. \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1} = 0. \quad (6)$$

Observe que a suposição de campos nulos no início é geralmente verdadeira em todo o domínio computacional, exceto para as regiões de fontes.

A equação (5) pode ser usada para relacionar as componentes do campo elétrico, assim como a equação (6), para relacionar as componentes do campo magnético. Contudo, é necessário escrever as equações de Maxwell no sistema de coordenadas gerais.

O divergente de uma função vetorial  $\mathbf{F}$  no sistema de coordenadas gerais é dado por [2]:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^1} (f^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial u^2} (f^2 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial u^3} (f^3 \sqrt{g}) \right\}. \quad (7)$$

Se  $\mathbf{F}$  for igual a  $\mathbf{D}$ , então  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  (região livre de fontes), têm-se para o modo TE,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^1} (D^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial u^2} (D^2 \sqrt{g}) \right\} = 0. \quad (8)$$

Dessa forma, a partir de (8), obtém-se a componente contravariante  $E^2$  em função da componente contravariante  $E^1$ , de acordo com a equação abaixo.

$$E^2(i, j)^{n+1/2} = \frac{\varepsilon_{i,j-1} E^2(i, j-1)^{n+1/2} \sqrt{g(i, j-1/2)}}{\varepsilon_{i,j} \sqrt{g(i, j+1/2)}} - \frac{1}{\varepsilon_{i,j} \sqrt{g(i, j+1/2)}} \cdot (\varepsilon_{i,j} E^1(i, j)^{n+1/2} \sqrt{g(i+1/2, j)}) - \frac{1}{\varepsilon_{i,j} \sqrt{g(i, j+1/2)}} \cdot (\varepsilon_{i-1,j} E^1(i-1, j)^{n+1/2} \sqrt{g(i-1/2, j)}). \quad (9)$$

A equação (9) pode ser incorporada no algoritmo LN-FDTD, e fazendo-se um esquema de atualização apropriado: somente a componente  $E^1$  precisa ser armazenada em todo o domínio computacional (para o campo elétrico). Para explicar como isto é feito, assume-se que  $E^1$  já tenha sido calculado com a equação de atualização do método LN-FDTD em todo domínio computacional e quer-se continuar com a atualização de  $H^3$ , sem ter que armazenar  $E^2$  em todo domínio. É claro que antes de se calcular a componente do campo magnético  $H^3$  é necessário transformar as componentes contravariantes do campo elétrico  $E^1$  e  $E^2$  em componentes covariantes,  $E_1$  e  $E_2$ . Após esta transformação, pode-se então atualizar a componente  $H^3$ , através da seguinte equação:

$$H^3(i, j)^{n+1} = H^3(i, j)^{n-1} - \frac{\Delta t}{\mu V_3^h(i, j)} \cdot (E_2(i+1, j)^{n+1/2} - E_2(i, j)^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{\mu V_3^h(i, j)} \cdot (E_1(i, j+1)^{n+1/2} - E_1(i, j)^{n+1/2}). \quad (10)$$

Observa-se que para a atualização de  $H^3(i, j)$  é necessário calcular  $E_2(i, j)^{n+1/2}$  e  $E_2(i+1, j)^{n+1/2}$ . Estes campos podem ser atualizados usando-se (9), assumindo que já tenha sido calculado  $E_2(i, j-1)^{n+1/2}$  para todo  $i$ . Obviamente, que para

começar o algoritmo, precisa-se conhecer  $E_2(i,1)^{n+1/2}$ , que pode ser obtido com a equação de atualização do método LN-FDTD. A Fig. 1 mostra o esquema de atualização espacial que deve ser utilizado para a atualização de  $E_2(i, j)^{n+1/2}$

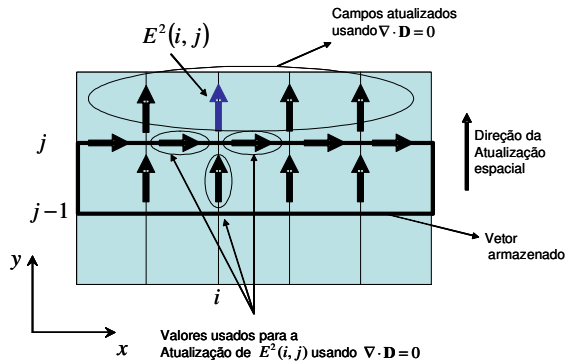


Fig. 1. Atualização espacial da componente do campo elétrico  $E_2(i, j)^{n+1/2}$ .

### III. RESULTADOS NUMÉRICOS

Como validação do algoritmo proposto, o problema de espalhamento de ondas eletromagnéticas por cilindro dielétrico foi analisado pelos métodos R-LN-FDTD e FDTD convencional. Como não há nenhuma variação da geometria do espalhador ou do campo incidente na direção z, a sua análise numérica pode ser feita a partir do modelo bidimensional mostrado na Fig. 2. O cilindro considerado tem um diâmetro de 7,5 milímetros e uma constante dielétrica relativa de 4. A onda plana foi excitada por uma série de pulsos gaussianos modulados em seno. O pulso tem uma largura de 100 ps, correspondendo a uma largura de faixa de 10 GHz e a frequência da modulação foi de 20 GHz.

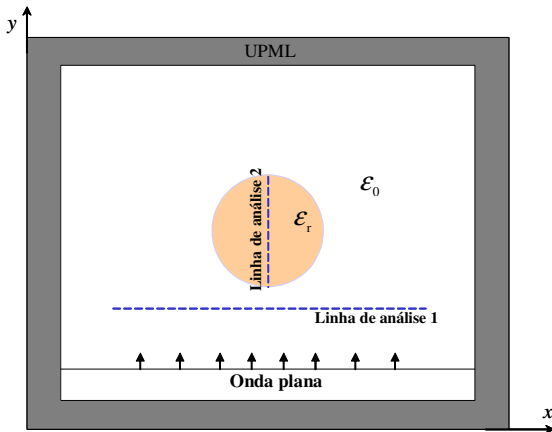


Fig. 2. Onda plana incidindo sobre um cilindro dielétrico.

Para análise desse espalhador pelo método R-LN-FDTD, uma malha (83x83) foi projetada de acordo com a Fig. 3. Tratando-se da análise pelo método FDTD convencional, usou-se uma malha uniforme de 300x300 células, com incremento espaciais de  $15.625 \times 10^{-3}$  m, correspondendo a um incremento espacial de 1/96, para a máxima frequência (20 GHz). Dessa forma, para modelar o cilindro utilizando essa malha, usou-se *staircase*. Deve-se ressaltar que a condição de

contorno utilizada para truncar o domínio numérico foi a UPML. Para o caso, no qual se aplicou o método FDTD convencional, usou-se a UPML em coordenadas cartesianas [9] e para a análise do problema usando-se o método R-LN-FDTD considerou-se a UPML em coordenadas gerais [3]. Na Fig. 4, mostra-se a amplitude normalizada da componente do campo elétrico ( $E_x$ ) na frequência de 20GHz, obtida dentro do cilindro e ao longo de seu diâmetro (linha de análise 2, Fig.2) considerando-se: a) solução analítica (o), b) método LN-FDTD (---), c) método R-LN-FDTD (-o-) e d) método FDTD convencional (-.-.-). Observa-se, neste caso, que a diferença entre os resultados obtidos é pequena para o problema em questão. Deve-se ressaltar que a malha usada no segundo caso do método FDTD convencional é bem mais fina para se conseguir bons resultados, implicando num alto custo computacional.

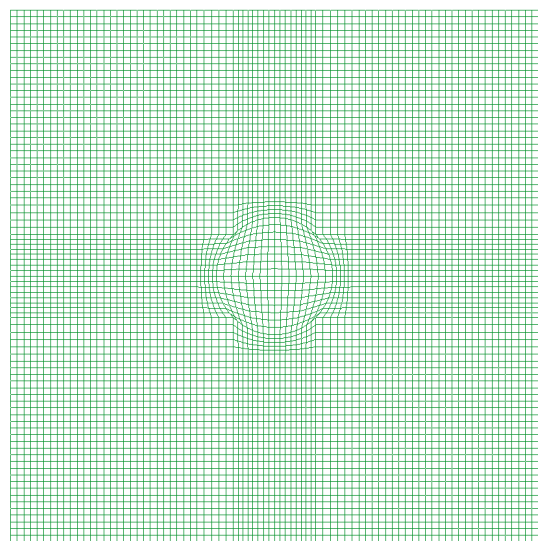


Fig. 3. Malha gerada com o GID 6.1.2 com adaptação para uma geometria cilíndrica.

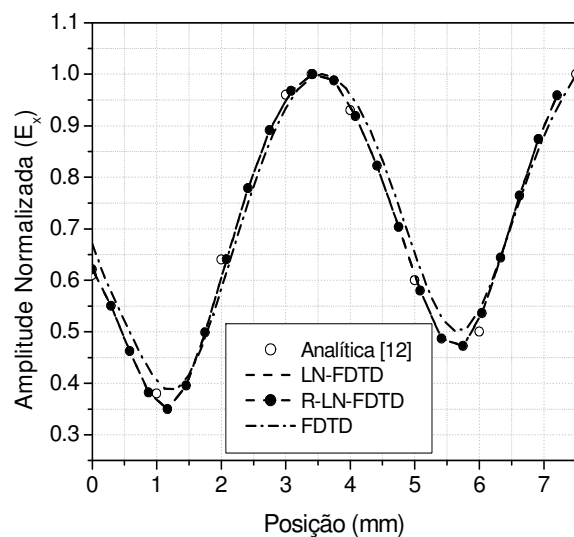


Fig. 4. Comparação entre os resultados obtidos pelos métodos: FDTD convencional, LN-FDTD, R-LN-FDTD e pela solução analítica para o cilindro dielétrico, para a componente normalizada do campo elétrico ( $E_x$ ) dentro do cilindro (linha de análise 2, Fig. 2).

Uma outra análise feita foi a obtenção do campo espalhado pelo cilindro, na linha de análise 1 (Fig. 2), conforme mostrado da Fig. 5. Os resultados obtidos para a amplitude normalizada da componente de campo elétrico ( $E_x$ ) obtida ao longo da linha de análise 1, pelos dois métodos tratados aqui, ou seja: FDTD convencional (—) e R-LN-FDTD (-o-). Nesta figura pode-se observar que os resultados obtidos são quase coincidentes.

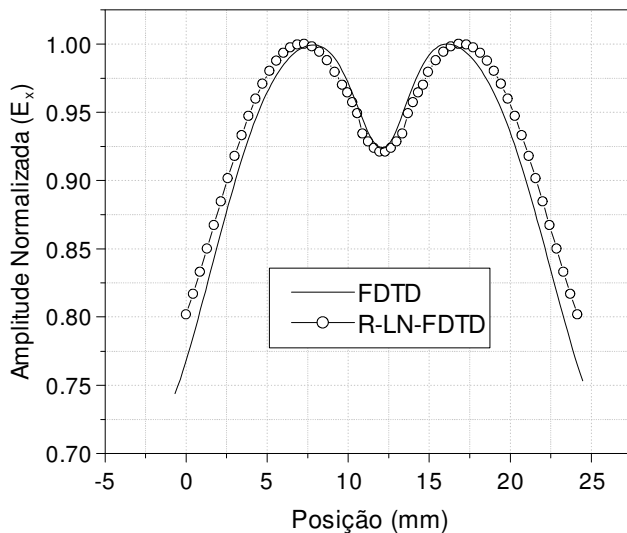


Fig. 5. Comparação entre os resultados obtidos pelo método FDTD convencional e pelo método R-LN-FDTD para a componente de campo  $E_x$  na linha de análise 1.

#### IV. CONCLUSÕES

Neste trabalho, a formulação LN-FDTD foi modificada com o objetivo de reduzir a memória requerida para a análise de um dado problema, permitindo com isso um aumento do volume de análise para um dado tamanho de memória computacional. Observou-se que esta técnica promove uma redução de 33% de memória requerida para o problema considerado. Em contrapartida, tem-se um aumento moderado na complexidade do código. Apesar do desenvolvimento da formulação ser feita para o caso bidimensional (modo TE), a sua extensão para o caso 3D é direta. Dessa forma, estruturas dielétricas tridimensionais podem ser analisadas com esta nova formulação.

Para a implementação apropriada da condição de contorno absorvente nesta nova formulação, é necessário recompor as componentes de campo na região da UPML.

Os resultados obtidos pelos métodos tratados neste trabalho mostram boa concordância. Observa-se que as curvas obtidas pelo método R-LN-FDTD e pela solução analítica são quase coincidentes, para o campo obtido ao longo do cilindro. Entretanto, a curva obtida pelo método FDTD convencional apresenta um pequeno deslocamento, que certamente é devido à aproximação do contorno do cilindro por *staircase*.

A idéia de se modelar cilindros dielétricos é de suma importância, pois se pode calcular de forma mais precisa a atenuação das ondas eletromagnéticas por estes cilindros nas frequências desejadas e depois inserir essas perdas nos modelos empíricos de propagação, como por exemplo, nos modelos de propagação em florestas.

#### V. REFERENCES

- [1] R. Holland "Finite-Difference Solutions of Maxwell's Equations in Generalized Nonorthogonal Coordinates", *IEEE Trans. on Nuclear Science*, vol. NS-30, No.6 pp. 4589-4591, Dec. 1983.
- [2] J. A. Stratton, "Electromagnetic Theory," New York: McGraw-Hill, 1941.
- [3] J. A. Roden, "Broadband Electromagnetic Analysis of Complex Structures with the Finite-Difference Time-domain Technique in General Curvilinear Coordinates," *Ph.D. Dissertation, University of Kentucky*, 1997
- [4] M.Fusco, "FDTD algorithm in curvilinear coordinates", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-38, pp.76-88, 1990.
- [5] J. F. Lee, R. Palendech, and R. Mittra "Modeling Three-Dimensional Discontinuities in Waveguides Using Non-orthogonal FDTD Algorithm", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-40, No.2 Feb. 1992.
- [6] P. Aoyagi, J. Lee, and R. Mittra, "A hybrid Yee algorithm/scalar-wave equation approach," *IEEE Trans.Microwave Theory Tech.*, pp. 1593-1600, Sept. 1993.
- [7] George D. Kondylis, "On indoor wireless channel characterization and the design of interference aware medium access control protocols for packet switched networks", Doctor Thesis, *University of California*, Los Angeles, 2000.
- [8] G. Mur, "Absorbing boundary conditions for the finite difference approximation of the time domain electromagnetic field equations," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, pp. 377-382, Nov. 1981.
- [9] S.D. Gedney, "An Anisotropic Perfectly Matched Layer- Absorbing Medium for the Truncation of FDTD Lattices," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-44, No. 12, pp. 1630-1639, Dec. 1996.