

Sobre um Algoritmo de Cálculo da Transformada de Fourier Fracionária de Tempo Discreto

Carlos A. Ramírez Behaine e Luiz A. Baccalá

Resumo—Neste trabalho consideramos um algoritmo de cálculo da Transformada de Fourier Fracionária em tempo discreto. Após uma breve introdução a esta generalização da transformada de Fourier e suas propriedades fundamentais, consideramos um algoritmo rápido para o seu cálculo em tempo discreto com complexidade computacional semelhante a da FFT. Mostramos que esta complexidade é fruto da possibilidade de se descrever este algoritmo em termos de FFTs e IFFTs precedidas por uma interpolação, o que permite que se avalie seu desempenho numérico, expresso pelo seu ruído intrínseco de quantização em representações numéricas de ponto fixo. Estes resultados permitem uma avaliação do compromisso entre a duração do sinal e o comprimento da palavra em ponto fixo que se necessita para um dado nível de precisão numérica desejada.

Palavras-Chave—Transformada de Fourier Fracionária, algoritmo rápido, ruído de quantização

Abstract—This paper by reviewing the Fractional Fourier Transform which generalises the conventional one due to Fourier, describes in detail a discrete time algorithm for its computation which achieves high efficiency thanks to the iterated use the FFT algorithm. Furthermore, this description allows estimating the algorithm's numerical round-off errors under fixed point arithmetic showing the need to choose word lengths adequately to suit signal duration and desired numerical precision levels.

Keywords—Fractional Fourier Transform, fast algorithm, quantization noise

I. INTRODUÇÃO

A exemplo da bem conhecida transformada introduzida por Fourier (FT) no contexto da solução analítica de equações diferenciais parciais a coeficientes constantes associadas a propagação do calor [1], a transformada fracionária de Fourier (FRFT) com domínio contínuo representou uma generalização que veio ajudar a resolver equações diferenciais a coeficientes variantes, muito comuns em Mecânica Quântica [2].

Vale ressaltar que a transformada fracionária de Fourier tem tido um número crescente de aplicações em óptica [3], [4], na filtragem de sinais [5], em sistemas de comunicações [6], em redes neurais [7] além da Mecânica Quântica [2], [8] de onde surgiu, sendo que novas aplicações no processamento tempo-frequência como radares e detecção de alvos são objeto corrente de estudo [9].

De forma similar à FT, cujo cálculo prático em sinais é feito no domínio discreto, introduziram-se formas para o cálculo discreto da FRFT associadas a aplicações especiais [10], [11]. Mais recentemente, foi proposta uma definição mais geral para a FRFT em tempo discreto tendo como base o

conjunto dos autovetores da matriz associada à transformação discreta de Fourier, o que, porém, conduziu a algoritmos de alta complexidade operacional [12], [13].

O objetivo do presente estudo é o re-exame do algoritmo proposto em [14] que possui complexidade computacional comparável a da FFT quando se usam amostras com $N = 2^p$ pontos. Para tanto, fazemos uma breve recapitulação da definição e das propriedades da FRFT na Seção II, seguida da descrição do algoritmo já em tempo discreto na Seção III. Na Seção IV são mostrados e exemplificados os resultados associados ao ruído de quantização observados, conforme deduzidos da nova descrição do algoritmo. Na seção V, finalmente, apresentamos as conclusões deste trabalho.

II. NOÇÕES PRELIMINARES

A. Definições

A transformada fracionária de Fourier de grau a da função $f(t)$ de tempo contínuo é denotada por $F_{[f]}^a$ é definida como [14]:

$$F_{[f]}^a(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} B^a(\omega, t) f(t) dt \quad (1)$$

$$B^a(\omega, t) \triangleq A_\phi e^{[j\pi(\omega^2 \cot \phi - 2\omega t \csc \phi + t^2 \cot \phi)]} \quad (2)$$

$$A_\phi \triangleq \frac{e^{(-j\pi \operatorname{sgn}(\sin \phi)/4 + j\phi/2)}}{|\sin \phi|^{1/2}} \quad (3)$$

em que

$$\phi \triangleq \frac{a\pi}{2} \quad (4)$$

para $0 < |a| < 2$.

O kernel $B^a(\omega, t)$ da FRFT é uma função complexa que envolve exponenciais quadráticas em função do parâmetro ϕ . Na Figura 1, ilustramos o comportamento da fase de $B^a(\omega, t)$ em função de a para alguns valores de ω (t fixo).

Note-se que caso $a = 1$, (1) se reduz à transformada de Fourier convencional, ou equivalentemente, pode-se dizer que a transformada de Fourier convencional não é nada mais do que a transformada fracionária de Fourier de grau um. Vale ainda mencionar que as restrições sobre $f(t)$ para a existência de (1) são as mesmas da transformada de Fourier convencional [15].

1) Principais Propriedades: Pode-se interpretar a FRFT como um operador de rotação pelo ângulo ϕ no plano tempo-frequência construído a partir da distribuição de Wigner do sinal [16], conforme se ilustra na Figura 2, na qual o operador F^a que descreve a transformada é obtido através da projeção do plano tempo-frequência sobre um eixo rotacionado de ϕ .

Como tal, as principais propriedades da FRFT, representadas pelo operador F^a são semelhantes às de uma rotação, isto é:

- 1) Existe elemento neutro:

$$F^{4k} = I, k \text{ in } \mathbf{Z} \quad (5)$$

- 2) Aditiva:

$$F^\alpha F^\beta = F^{\alpha+\beta} \quad (6)$$

- 3) Inversão temporal

$$F^2 = R \quad (7)$$

com $R f(t) = f(-t)$

Além disso, F^1 reduz-se à transformada convencional. Podem-se ainda associar a valores negativos de a às transformadas fracionárias inversas de Fourier (IFRFT), já que $F^0 = F^a F^{-a}$.

III. ALGORITMO RÁPIDO EM TEMPO DISCRETO

Há duas formas comuns para o cálculo da FRFT: (a) mediante o cálculo numérico direto da integral (1) que possui alta complexidade $\mathcal{O}(N^2)$, além de ter precisão dependente da escolha do intervalo de amostragem e (b) aproximando o kernel através de uma expansão em série (em função de a). Em [14] foi proposta uma aproximação para o cálculo da FRFT baseada no segundo método que pode ser implementada através de um filtro multitaxa com complexidade $\mathcal{O}(N \log_2 N)$, tendo como domínio de validade a faixa $0.5 \leq |a| \leq 1.5$, para a qual a fase de $B^a(\omega, t)$ é aproximadamente linear. Outros valores da FRFT com a arbitrário podem ser calculados usando a aditividade do operador, i.e. de $F^a = F^{a-1} F^1$ ou $F^a = F^{a+1} F^{-1}$.

É possível mostrar (Eq. (29) em [14]) que um vetor \mathbf{f}_c contendo N amostras de uma função $f(t)$ no intervalo $[-\Delta/2, \Delta/2]$ tem sua FRFT em tempo discreto dada compactamente por:

$$F_{[f]}^a \left(\frac{m}{2\Delta} \right) = A_{\phi c} g_m \sum_{n=-N}^N h_m g_n J_2(f_c) \quad (8)$$

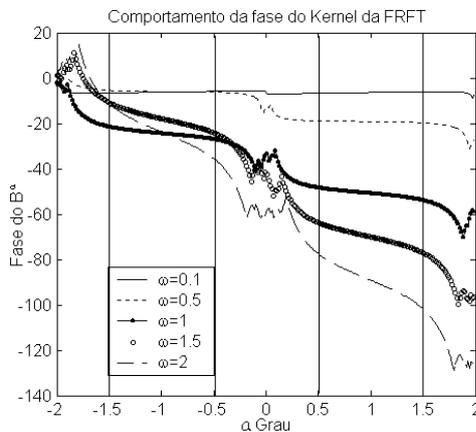


Fig. 1

FASE DO KERNEL DA FRFT COMO UMA FUNÇÃO DE a

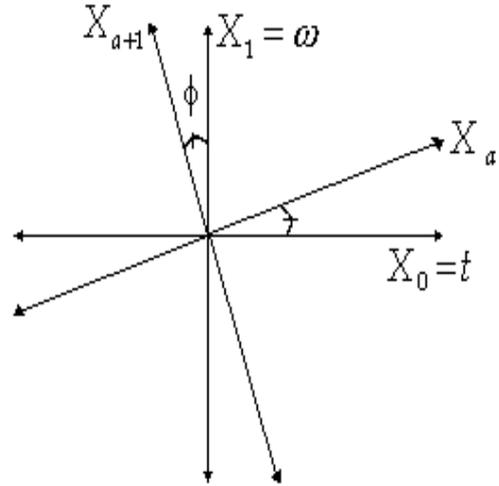


Fig. 2

FRFT COMO PROJEÇÕES SOBRE EIXO NO PLANO TEMPO-FREQÜÊNCIA.

em que:

$$A_{\phi c} = \frac{A_\phi}{2\Delta} \quad (9)$$

é um escalar e

$$g_m = e^{-j\pi \tan(\phi/2)(m/2\Delta)^2} \quad (10)$$

$$h_m = e^{j\pi \csc \phi ((m-n)/2\Delta)^2} \quad (11)$$

$$g_n J_2(f_c) = e^{-j\pi \tan(\phi/2)(n/2\Delta)^2} J_2(f_c) \quad (12)$$

são vetores com $2N$ amostras espaçadas de $\frac{\Delta}{2N}$, os índices n e $m \in \{-N, \dots, 0, \dots, N-1, N\}$, e o operador $J_2(f_c)$ representa interpolação por 2. Estritamente, o N -ésimo ponto é obtido por extrapolação.

Note que (8) segue de forma imediata da discretização de (1), levando em conta a identidade:

$$\cot \phi - \csc \phi = - \left(\frac{1 - \cos \phi}{\sin \phi} \right) = - \tan(\phi/2) \quad (13)$$

sendo que a interpolação em (8) se justifica pela necessidade de uma amostragem suficiente no plano tempo-frequência [14].

Desde que as amostras da função interpolada $J_2(f_c)$ existam entre $-\left(\frac{N}{2\Delta}\right)$ e $\left(\frac{N}{2\Delta}\right)$, a soma da equação (8) se reduz a uma convolução:

$$F_{[f]}^a \left(\frac{m}{2\Delta} \right) = A_{\phi c} g_m \{h_m * (g_m J_2(f_c))\} \quad (14)$$

que se executada com seqüências h' e g' de igual comprimento conduzem à convolução circular

$$F_{[f]}^a \left(\frac{m}{2\Delta} \right) = A_{\phi c} g_m \{h'_m \otimes g'_m\} \quad (15)$$

com

$$h'_m \otimes g'_m = \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}(h'_m) \cdot \mathcal{F}(g'_{m-d}) \right) \quad (16)$$

As seqüências h' e g' são cíclicas de comprimentos $N_c = N_{h_m} + N_{g_m J_2(f_c)} - 1$, com N_{h_m} e $N_{g_m J_2(f_c)}$ representando os comprimentos dos vetores subscritos e $d = N$. Adicionando zeros às seqüências definidas em (16) de tal modo que N'_c seja uma potência de 2, obtemos:

$$F_{[f]}^a \left(\frac{m}{2\Delta} \right) = A_{\phi_c} g_m \left\{ \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}(h'_{m-d})_{N_c} \cdot \mathcal{F}(g'_{m-d})_{N_c} \right) \right\} \quad (17)$$

Como a FRFT assim obtida tem taxa duas vezes maior a requerida, basta decimá-la por dois:

$$F_{[f]}^a \left(\frac{m}{\Delta} \right) = D_2 \left(F_{[f]}^a \left(\frac{m}{2\Delta} \right) \right) \quad (18)$$

denotando-se esta operação por $D_2(\bullet)$.

O conjunto de termos das funções g_m , g_n e h_m constituem seqüências conhecidas e podem ser pré-calculadas. Além disto, g_m tem os mesmos termos do que g_n . É fácil ver ainda que estas seqüências possuem $2N$ termos a menos de h_m que conta com $4N$ termos porque percorre a convolução. Pode-se portanto estruturar o algoritmo de forma paralela conforme o diagrama da Figura 3.

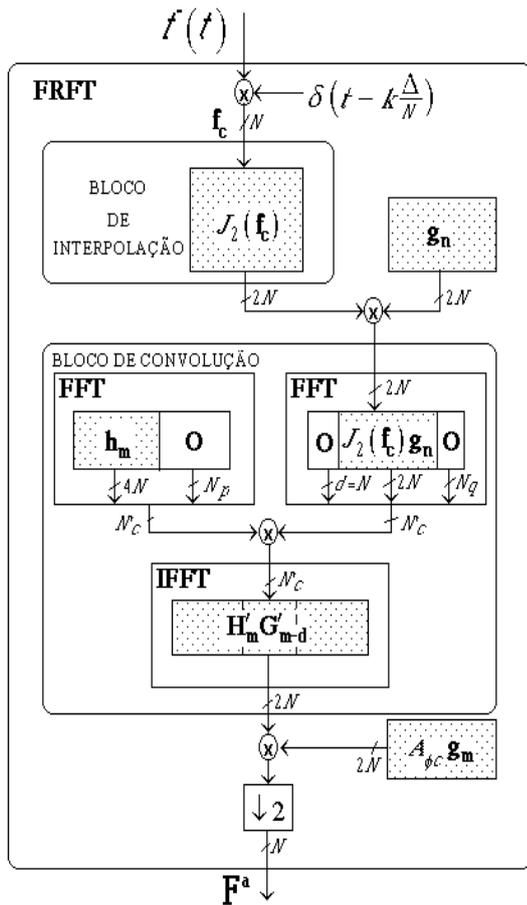


Fig. 3

DIAGRAMA DE BLOCOS DA FRFT EM TEMPO DISCRETO.

A interpolação $J_2(f_c)$ pode ser feita de diversas formas. Um modo conveniente e econômico é utilizando a FFT para sobre amostrar f_c no tempo, conforme [17], introduzindo-se zeros na FFT de f_c seguida de sua anti-transformação :

$$J_2(f_c) = \mathcal{F}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{F}_c(1, \dots, N/2) \\ \mathbf{O}_N \\ \mathbf{F}_c(N/2 + 1, \dots, N) \end{bmatrix} \right) \quad (19)$$

em que $\mathbf{F}_c(1, \dots, N/2)$ são os termos $1, \dots, N/2$ de $\mathcal{F}(f_c)$ e $\mathbf{F}_c(N/2 + 1, \dots, N)$ os termos restantes conforme ilustrado na Figura 4.

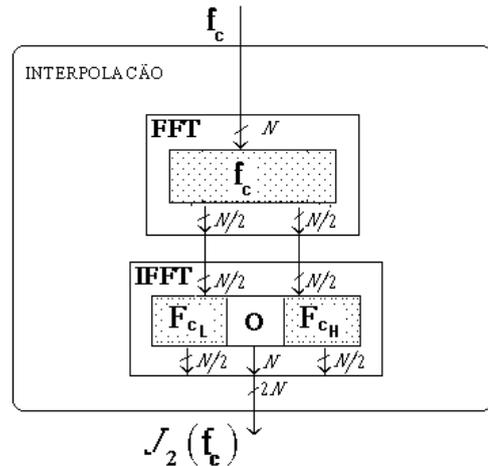


Fig. 4

DIAGRAMA MOSTRANDO A INTERPOLAÇÃO DE $f_c(k)$ USANDO FFT.

A. Complexidade Computacional

Supondo que os vetores h_m , g_m e o escalar A_{ϕ_c} sejam pré-calculados, a complexidade computacional do algoritmo será dominada pelas operações de interpolação e convolução, de onde obtemos que:

$$\mathcal{O}_{FRFT} = \mathcal{O}_{J_2} + \mathcal{O}_{\otimes} + \mathcal{O}_{A_{\phi_c} g_m} \quad (20)$$

Com a interpolação da figura 4 sobre os termos reais e imaginários, tem-se:

$$\mathcal{O}_{J_2} = 2(N \log_2 N + 2N \log_2 2N) \quad (21)$$

seguida de

$$\mathcal{O}_{\otimes} = \left(\begin{array}{l} 2N + 2N \log_2(2N) + \\ 8N + 8N \log_2(8N) - 6N \end{array} \right) \quad (22)$$

com $\mathcal{O}_{A_{\phi_c} g_m} = (2N)$ que produz

$$\mathcal{O}_{FRFT} = 16\mathcal{O}_{FFT} + 34N \quad (23)$$

ou seja, uma complexidade algorítmica da mesma ordem, porém 16 vezes superior à da FFT, conforme ilustrado na Figura 5.

O pior caso para a complexidade computacional corresponde aos valores de a fora do intervalo $0.5 \leq |a| \leq 1.5$,

para os quais torna-se necessário usar a aditividade (6) dando lugar a:

$$\mathcal{O}_{FRFT_{\max}} = 17\mathcal{O}_{FFT} + 34N \quad (24)$$

IV. ANÁLISE DO RUÍDO DE QUANTIZAÇÃO

Como é usual no contexto de modelagem linear [18], fazem-se as seguintes hipóteses quanto a ruído na saída de cada multiplicador:

- O ruído de quantização é aditivo branco estacionário e uniformemente distribuído no intervalo de quantização $[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$.
- Os erros de quantização são descorrelacionados com a entrada do quantizador correspondente.

A fórmula geral da variância do ruído de quantização por ponto na saída da FFT (com $n = 2^p$ pontos) usando decimação temporal é determinada pelo efeito aditivo das $(n - 1)$ "borboletas", dada por ([18], Eq. 9.92, pg. 634):

$$Eq_{FFT} = (n - 1) \sigma_b^2 \quad (25)$$

em que

$$\sigma_b^2 = 4 \left(\frac{\delta^2}{12} \right) = \frac{\delta^2}{3} = \frac{2^{-2b}}{3} \quad (26)$$

com $\delta = 2^{-b}$ para uma palavra de b -bits em ponto fixo. No caso da FRFT, tem-se uma topologia série-paralelo com uma configuração empregando várias FFTs, como se ilustra nas Figura 3 e 4. Conseqüentemente, o ruído de quantização por ponto na saída associados à interpolação no caso presente, excluindo as borboletas zeradas, tem variância:

$$Eq_{J_2} = (N - 1) N \sigma_b^2 \quad (27)$$

implicando que o ruído na saída da FRFT tenha variância:

$$Eq_{FRFT} \approx ((N - 1) N^2 + 2) (8N) \sigma_b^2 \quad (28)$$

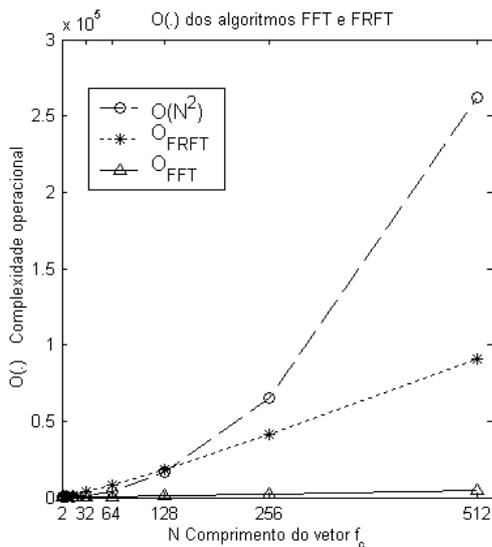


Fig. 5

COMPLEXIDADE OPERACIONAL DOS ALGORITMOS FFT, FRFT COMPARATIVAMENTE A $\mathcal{O}(N^2)$.

Estes resultados indicam um compromisso entre a complexidade computacional e o erro de quantização, uma vez que ambas são funções monótonas crescentes de N . O comportamento destas funções está ilustrado na Figura 6a.

Para reduzir o erro de quantização numa FFT, podem-se intercalar divisores por dois de forma a escalonar o sinal antes dos produtos em que se fazem necessários arredondamentos. A exemplo de (25), isto conduz a uma fórmula geral para a variância do ruído de quantização em termos de $\log_2(n)$ ([18], Eq. 9.103, pg. 638):

$$Eq_{FFT} = 4 \left(1 - 0.5^{\log_2(n)} \right) \sigma_b^2 \quad (29)$$

Assim, numa análise análoga à anterior, a FRFT empregando uma FFT devidamente escalonada, exibe um ruído de quantização com variância dada por:

$$Eq_{FRFT} \approx 4 \left(64 \left(1 - 0.5^{\log_2(N-1)} \right) \left(1 - 0.5^{\log_2 N} \right)^2 + 2 \right) \left(1 - 0.5^{\log_2(8N)} \right) \sigma_b^2 \quad (30)$$

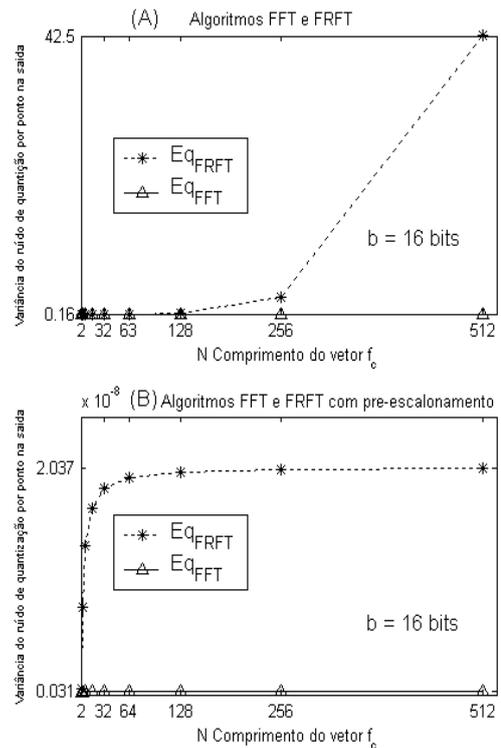


Fig. 6

VARIÂNCIA DO RUÍDO DE QUANTIZAÇÃO DA FRFT E FFT (A) COM PRE-ESCALONAMENTO (B).

que é mostrada na Figura 6b comparativamente ao caso anterior. Como se pode observar das equações (29) e (30), embora o processo de escalonamento nas FFTs reduza a variância do ruído na FRFT, este é ainda cerca de 66 vezes superior ao da FFT quando $N \rightarrow \infty$ como se ilustra na figura 6b.

O comportamento da FRFT quantizada ($N = 64$) pode ser apreciado na Figura 7 em que a transformada de um pulso

gaussiano (que resulta teoricamente num outro pulso gaussiano para qualquer valor de α) tem seu valor afetado ao efetuar os cálculos com precisão em ponto fixo menor do que 16 bits.

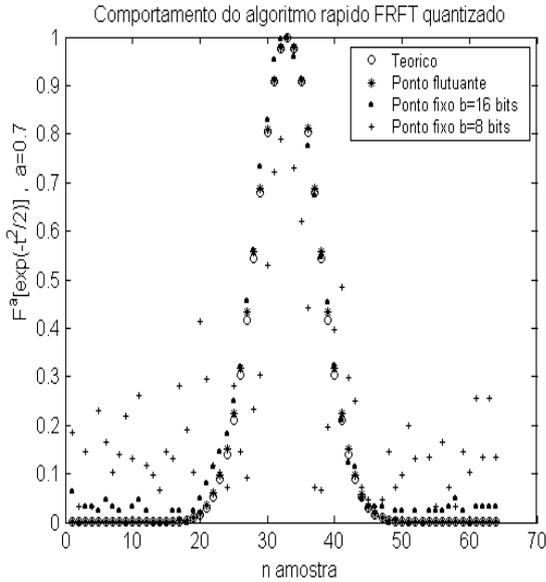


Fig. 7

COMPORTAMENTO DO ALGORITMO RÁPIDO FRFT QUANTIZADO
DE $N = 64$ AMOSTRAS

V. CONCLUSÕES

Neste trabalho calculamos de forma detalhada a complexidade computacional de um algoritmo de cálculo da Transformada de Fourier Fracionária. Isto permitiu uma avaliação do erro de quantização que se observa em precisão finita mostrando que para sinais de duração típica (N amostras) é necessário fazer uma escolha judiciosa do comprimento das palavras em ponto fixo a serem usadas para que se possa obter o desempenho numérico desejado.

REFERÊNCIAS

- [1] T. Körner, *Fourier Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1988.
- [2] V. Namias, "The fractional fourier transform and its applications in quantum mechanics," *J. Inst. Math Applications*, vol. 25, pp. 241–265, 1980.
- [3] P. Pellat-Finet and G. Bonnet, "Fractional-order fourier transform and fourier optics," *Optics communications*, vol. 111, pp. 141–154, 1994.
- [4] F. Zhang, G. Bi, and Y. Q. Chen, "Tomography time-frequency transform," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, pp. 1289–1297, June 2002.
- [5] M. A. Kutay, H. M. Ozaktas, O. Arikan, and L. Onural, "Optimal filtering in fractional fourier domains," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, pp. 1129–1143, May 1997.

- [6] M. Martone, "A multicarrier system based on the fractional fourier transform for time-frequency-selective channels," *IEEE transactions on communications*, vol. 49, pp. 1011–1020, June 2001.
- [7] S.-Y. Lee and H. H. Szu, "Fractional fourier transform, wavelet transforms, and adaptive neural networks," *Optical Engineering*, vol. 33, pp. 2326–2330, 1994.
- [8] K. Vogel and H. Risken, "Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotate quadrature phase," *Phys. Review A*, vol. 40, pp. 2847–2849, 1989.
- [9] H. Gu, H.-B. Sun, G.-S. Liu, and W.-M. Su, "Application of the fractional fourier transform to moving target detection in airborne sar," *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems*, vol. 38, pp. 1416–1424, Oct. 2002.
- [10] D. H. Bailey and P. N. Swarztrauber, "The fractional fourier transform and applications," *SIAM Review*, vol. 33, pp. 389–404, Sept. 1991.
- [11] B. Santhanam and J. H. McClellan, "The discrete rotational fourier transform," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 994–998, Apr. 1996.
- [12] S.-C. Pei, M.-H. Yeh, and C.-C. Tseng, "Discrete fractional fourier transform base on orthogonal projections," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47, pp. 1335–1348, May 1999.
- [13] C. Cagatay, M. A. Kutay, and H. M. Ozaktas, "The discrete fractional fourier transform," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 48, pp. 1329–1337, May 2000.
- [14] M. A. Kutay, H. M. Ozaktas, O. Arikan, and G. Bozdagi, "Digital computation of the fractional fourier transform," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, pp. 2141–2150, Sept. 1996.
- [15] X.-G. Xia, "On bandlimited signals with fractional fourier transform," *IEEE Signal Processing letters*, vol. 3, pp. 72–74, Mar. 1996.
- [16] L. B. Almeida, "The fractional fourier transform and time-frequency representations," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 3084–3091, Nov. 1994.
- [17] Z. W. Wang, J. J. Soltis, and W. C. Miller, "Improved approach to interpolation using the fft," *Electronics letters*, vol. 28, pp. 2320–2322, 1992.
- [18] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*. New York: Prentice Hall Signal Processing Series, 1989.