

Códigos Convolucionais Concatenados com Runlength Limitado

Evelio Martín García Fernández

Resumo—Um esquema de codificação concatenado para correção de erros em canais com restrições de *runlength* é apresentado. Os códigos concatenados estão baseados em códigos convolucionais com *runlength* limitado como códigos internos e códigos de Reed-Solomon como códigos externos. Também são apresentados procedimentos para a decodificação com decisão suave dos códigos construídos.

Palavras-Chave—Códigos para controle de erros, Teoria de informação, Sincronização, Códigos com *runlength* limitado.

Abstract—A concatenated coding scheme for error correction in runlength-constrained channels is presented. The concatenated codes are based on runlength-limited convolutional codes as inner codes and Reed-Solomon codes as outer codes. Procedures for soft-decision decoding of the constructed codes are also presented.

Index Terms—Error control codes, Information theory, Synchronism, Runlength-limited codes.

I. INTRODUÇÃO

A maioria dos sistemas de comunicações digitais em banda básica e dos sistemas de armazenamento de dados deriva a sincronização de relógio na recepção a partir do fluxo de símbolos recebido. Considere um sistema que utilize um código binário linear para controle de erros (de bloco ou convolucional). Devido à presença da seqüência toda-zeros em qualquer código linear, a utilização deste código pode conduzir à perda de sincronização quando seqüências longas de zeros consecutivos são enviadas pelo canal de comunicações. Pelo contrário, um coset do código linear pode ser transmitido para, ao mesmo tempo, possibilitar controle de erros e limitação do valor do *runlength*.

A idéia de se transmitir cosets de códigos de bloco e convolucionais para conseguir sincronização bem como controle de erro tem sido usada há muito tempo como por exemplo nas referências [1] e [2].

Um procedimento sistemático por obter cosets de códigos de bloco que limitam as seqüências de zeros e uns consecutivos foi apresentado em [3]. Na referência [4] foi apresentada uma proposta para a modificação de códigos convolucionais que pode ser aplicada desde que a matriz geradora, \mathbf{G} , do código convolucional original cumpra com determinadas condições. Todos os códigos obtidos nestes trabalhos prévios são de pequeno comprimento porque, para códigos longos, o limitante superior obtido para as restrições de *runlength* é proibitivamente grande.

Recentemente [5], códigos de bloco binários com *runlength* limitado de grande comprimento foram obtidos através da utilização de um esquema de codificação concatenado em que foi utilizado um coset de um código de bloco linear como código interno. De um modo semelhante, este trabalho propõe a construção de códigos corretores de erro concatenados com *runlength* limitado baseados em códigos de Reed-Solomon (RS) como códigos externos e em cosets de códigos convolucionais de comprimento de restrição relativamente pequeno como códigos internos.

O trabalho será organizado da seguinte forma: na seção II será abordada a estrutura do esquema concatenado de codificação proposto. Na seção III são apresentadas as curvas de desempenho obtidas através de simulação para os códigos construídos. Por fim, na seção IV, algumas considerações finais são apresentadas.

II. CONSTRUÇÃO DOS CÓDIGOS

O esquema de codificação concatenado proposto é baseado no diagrama em blocos da figura 1.

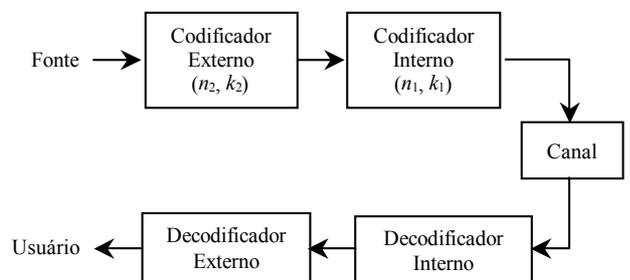


Fig. 1. Diagrama em Blocos do Sistema de Codificação Concatenado.

Na figura anterior, o código interno C_1 é um coset de um código convolucional (n_1, k_1) . Este coset é obtido somando um vetor modificador de n_1 bits a cada segmento de saída de

C_1 para se obter o valor desejado das restrições de *runlength*. O código externo C_2 é um código não binário de Reed-Solomon (n_2, k_2) com símbolos em $GF(2^m)$, m inteiro, cujas palavras-código são representadas por seqüências binárias de m bits. No processo de codificação, primeiramente k_2 símbolos de m bits cada são codificados pelo codificador RS, sendo obtida uma palavra-código de n_2 símbolos do código externo C_2 . No seguinte estágio, a seqüência codificada pelo código C_2 é usada como entrada para o codificador do código convolucional C_1 (k_1 bits de cada vez). Por fim, um vetor modificador é somado a cada palavra-código de n_1 bits de C_1 para se obter uma seqüência de n_2 palavras-código modificadas de C_1 com *runlength* limitado. Assim, o código resultante é um código binário ($n_1 n_2, k_1 k_2$).

Códigos RS foram escolhidos como códigos externos devido à facilidade de utilização de algoritmos algébricos para a decodificação eficiente destes códigos como o algoritmo de Berlekamp-Massey ou o algoritmo Euclidiano. Sendo não binários, os códigos de RS também provêm uma capacidade significativa de correção de erros em surto. A limitação principal dos códigos RS reside na dificuldade para achar algoritmos para decodificação com decisão suave devido à incompatibilidade entre a estrutura algébrica dos corpos finitos em que estes códigos são baseados e os valores numéricos reais presentes na saída do canal de comunicações. Pelo contrário, com a utilização de códigos convolucionais, a decodificação com decisão suave pode ser facilmente incorporada através da utilização do algoritmo de Viterbi. Infelizmente, códigos convolucionais não podem ser implementados facilmente com altas taxas de transmissão de dados [6] ademais de estas classes de códigos terem uma tendência a gerar surtos de erros na saída do decodificador na medida em que o nível de ruído aumenta.

Um bom desempenho pode ser obtido combinando códigos RS com códigos convolucionais em um sistema de codificação concatenado. O código convolucional (com decodificação de Viterbi e decisão suave) é utilizado para diminuir o número de erros aleatórios na entrada do decodificador do código RS que, por sua vez, corrige os surtos de erros remanescentes do decodificador de Viterbi. Assim, através da escolha apropriada dos respectivos códigos, pode-se fazer diminuir a probabilidade de erro exponencialmente com o comprimento do código resultante para todas as taxas de transmissão de dados possíveis inferiores à capacidade do canal. Enquanto isso, a complexidade de decodificação é dominada pela complexidade do decodificador do código RS que aumenta somente de forma algébrica com o comprimento do código [6].

O código interno com *runlength* limitado foi obtido modificando códigos convolucionais bem conhecidos. Em nosso trabalho decidimos usar como códigos internos os códigos convolucionais obtidos na referência [4] devido à forma simples em que são feitas as modificações para se obter os limitantes superiores para as restrições de *runlength*. Estas modificações consistem em um re-ordenamento apropriado das colunas da matriz geradora do código original seguida da inversão de determinados bits em cada segmento de n_1 bits na

seqüência codificada. As modificações anteriores são executadas através de procedimentos individuais que são implementados em cascata após a codificação no transmissor e antes da decodificação no receptor, como representado na figura 2.

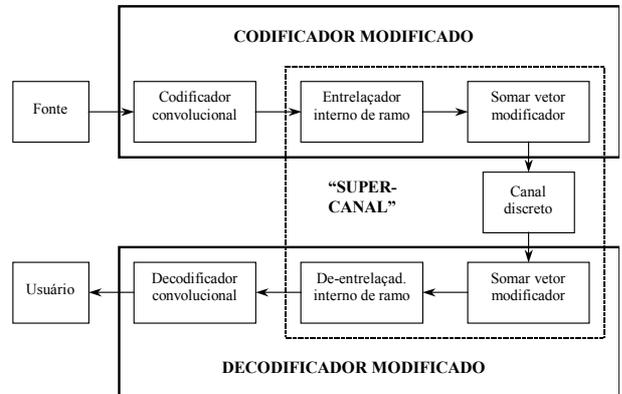


Fig. 2. Esquema de Codificação Modificado Proposto na Referência [4].

O re-ordenamento das colunas em G é realizado por meio de um entrelaçador e a inversão de bits é realizada através da adição de um vetor modificador à saída do entrelaçador que periodicamente inverte os bits nas posições selecionadas. Estas modificações não alteram a distância livre do código convolucional original [4]. Os melhores códigos obtidos em termos de capacidade de correção de erros e propriedades de *runlength* são mostrados na Tabela I da referência [4].

A partir destes códigos e suas possíveis combinações com códigos RS, pode ser obtido um grande número de códigos concatenados com as mesmas restrições de *runlength* obtidas em [4]. A Tabela I mostra alguns dos códigos concatenados construídos. Os códigos convolucionais internos estão representados por sua taxa (R) e distância livre (d_{free}). Os parâmetros (max_0, max_1) representam o número máximo de uns e zeros respectivamente em qualquer seqüência codificada a partir destes códigos.

Algumas modificações podem ser feitas para simplificar o

TABELA I
CÓDIGOS CONCATENADOS COM RUNLENGTH LIMITADO.

Código Externo	Código Interno	Taxa	max_0, max_1
RS (255, 223)	$R=1/3, d_{free}=8$	0,29	(3, 3)
RS (127, 109)	$R=1/3, d_{free}=8$	0,286	(3, 3)
RS (255, 223)	$R=1/3, d_{free}=10$	0,29	(5, 5)
RS (127, 109)	$R=1/3, d_{free}=10$	0,286	(5, 5)
RS (255, 223)	$R=1/4, d_{free}=20$	0,22	(4, 4)
RS (127, 109)	$R=1/4, d_{free}=20$	0,215	(4, 4)
RS (255, 223)	$R=1/3, d_{free}=6$	0,29	(4, 5)
RS (127, 109)	$R=1/3, d_{free}=6$	0,286	(4, 5)

esquema proposto na referência [4]. No processo de codificação, o re-ordenamento das colunas de G pode ser feito trocando-se apropriadamente as saídas do codificador e

a adição do vetor modificador pode ser realizada diretamente no somador módulo-2 correspondente na saída do codificador.

Na decodificação, o efeito do vetor de modificador foi incorporado na treliça do código convolucional invertendo os bits correspondentes às posições em que o vetor modificador é "1" nos ramos da treliça. Por outro lado, o efeito de reordenar as colunas de \mathbf{G} pode ser obtido trocando estes rótulos adequadamente.

Estas modificações, que apenas representam simplificações físicas e práticas do processo de implementação, podem efetivamente ser feitas desde que seja possível ter acesso à configuração interna dos dispositivos encarregados de realizar os procedimentos de codificação e decodificação, como por exemplo, quando estes dispositivos são implementados em programas de computador.

III. DESEMPENHO DOS CÓDIGOS CONSTRUÍDOS

O processo de decodificação dos códigos concatenados foi feito utilizando decisão abrupta no código externo e decisão suave no código interno. De forma geral, o processo de decodificação é realizado em três etapas. Primeiramente, o vetor modificador é retirado de cada segmento de n_1 bits modificado do código C_1 . Na etapa seguinte, é decodificada uma seqüência de $(n_1 \times m \times n_2)$ bits de saída do canal pelo decodificador do código C_1 obtendo-se uma seqüência de $(k_1 3m 3n_2)$ bits que corresponde ao comprimento (em bits) de uma palavra do código externo levando-se em conta que para todos os códigos internos utilizados, $k_1 = 1$. Finalmente, esta seqüência é decodificada pelo decodificador do código externo.

A decodificação do código interno foi feita utilizando o algoritmo de Viterbi com decisão suave. Para isto se trabalhou com uma profundidade na treliça de $(K + 1) \times 5$, onde K é o comprimento de restrição de C_1 . Valores maiores de profundidade da treliça aumentam o atraso no processo de decodificação sem proporcionar um aumento significativo do ganho de codificação.

O vetor modificador para atingir os valores mínimos de (max_0, max_1) pode ser incorporado à treliça invertendo o valor dos bits nos rótulos dos ramos da treliça. Da mesma forma, intercambiando apropriadamente estes rótulos, podem ser incorporadas à treliça as modificações feitas na matriz \mathbf{G} . Assim, simplifica-se o processo de decodificação com respeito ao apresentado em [4].

Simulações foram feitas considerando um canal com ruído aditivo branco gaussiano onde a quantização do sinal de saída do canal foi feita com precisão infinita (mais exatamente através de números em ponto flutuante). Na figura 3 são apresentadas as curvas de desempenho dos códigos convolucionais utilizados como códigos internos. Pode-se comprovar que estas curvas coincidem (como era de se esperar) com as curvas de desempenho dos códigos convolucionais originais correspondentes. Isto confirma que o processo de modificação realizado não altera as propriedades de distância dos códigos convolucionais originais.

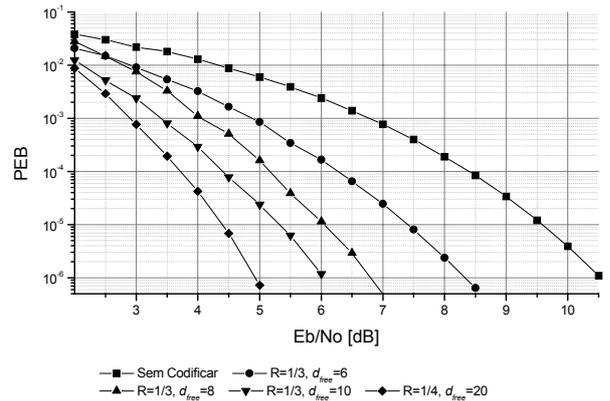


Fig. 3. Desempenho dos Códigos Internos.

A decodificação dos códigos externos de Reed-Solomon foi feita através do algoritmo de Berlekamp-Massey como descrito na referência [7]. As figuras a seguir mostram o desempenho de alguns dos códigos concatenados construídos:

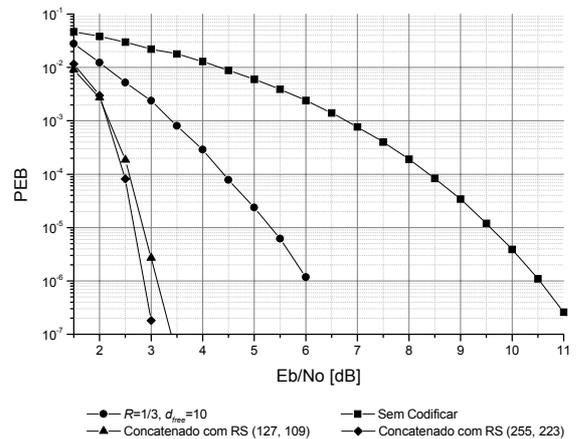


Fig. 4. Códigos Concatenados usando o Código com $R=1/3$, $d_{free}=10$ como Código Interno.

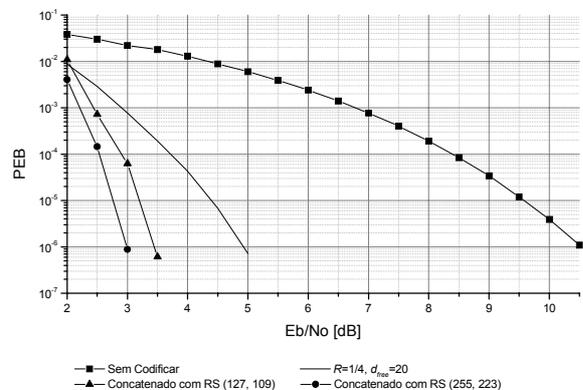


Fig. 5. Códigos Concatenados usando o Código com $R=1/4$, $d_{free}=20$ como Código Interno.

Das figuras anteriores pode-se ver que a probabilidade de erro de bit da ordem de 10^{-5} é atingida com a utilização dos códigos concatenados obtendo-se ganhos de codificação acima de 2dB em relação aos códigos convolucionais internos utilizados em cada esquema. Mais ainda, o ganho de codificação em relação ao canal AWGN sem codificação é considerável. Por exemplo, com a concatenação do código convolucional com $R = 1/4$, $d_{free} = 20$ e o código RS (255, 223), se consegue uma probabilidade de erro de bit da ordem de 10^{-5} para uma relação sinal-ruído E_b/N_0 de aproximadamente 2,75 dB. Sem a utilização de códigos, seria necessário uma E_b/N_0 de 9,6 dB para atingir a mesma probabilidade de erro, obtendo-se neste caso um ganho de codificação de 6,85 dB.

IV. CONCLUSÕES

Os esquemas concatenados apresentados permitem a obtenção de códigos corretores de erro de grande comprimento com as mesmas restrições de *runlength* apresentadas pelos códigos convolucionais de pequeno comprimento de restrição utilizados como códigos internos. Devido ao fato de que a maioria dos canais com restrições de *runlength* apresentam ruídos em surtos, a utilização de códigos convolucionais em esquemas concatenados torna-se uma opção interessante.

Na decodificação de códigos convolucionais, eventos de erro acontecem toda vez que a palavra-código recebida está mais perto (em termos de distância Euclidiana) de uma palavra-código incorreta do que da palavra-código transmitida. Note-se que as palavras-código de um código convolucional podem ser vistas como caminhos na treliça que representa o código. Assim, quaisquer duas palavras-código vão diferir em um ou mais ramos na treliça a partir do estado todo zero da mesma. Tendo em conta que essa diferença pode atingir vários ramos consecutivos na treliça, o padrão de erro que provoca uma decisão incorreta pode ser um surto de erros. Portanto, um código convolucional pode ser capaz de corrigir um grande número de erros bem espaçados, mas por outro lado, não é capaz de lidar com erros em surto.

Os códigos externos utilizados neste trabalho operam com símbolos de 7 e 8 bits respectivamente e, portanto, poderão lidar com grande parte dos surtos de erro existentes na saída dos códigos convolucionais internos.

Assim, o trabalho realizado permite dispor de um conjunto de códigos concatenados apropriados para canais com restrições no número de símbolos consecutivos iguais a serem transmitidos, sendo estas restrições garantidas pelos códigos internos utilizados. Os códigos externos utilizados em todos os casos foram códigos de Reed-Solomon. Como códigos internos foram selecionados os códigos convolucionais apresentados na referência [4] aos quais foram feitas algumas modificações que simplificam os processos de codificação e decodificação. Para o caso de uma implementação prática destes códigos, estas modificações são válidas desde que seja possível ter acesso ao interior dos codificadores e decodificadores. Por exemplo, no caso de aplicações em que estas funções sejam realizadas por circuitos integrados comerciais, é preferível utilizar o esquema mostrado na Figura 2.

Entre os códigos convolucionais internos utilizados encontram-se os melhores códigos convolucionais de taxa 1/3 e 1/4.

REFERÊNCIAS

- [1] A. Popplewell e J. J. O'Reilly, "Runlength limited binary error control codes", *IEEE Proc-I*, v. 139, n° 3, pp. 349-355, Junho 1992.
- [2] L. D. Baumert, R. J. McEliece e H. C. a van Tilborg, "Symbol synchronization in convolutionally coded systems," *IEEE Trans. On Inf. Theory*, v. IT-25, pp. 362-365, Maio 1979.
- [3] E. M. G. Fernández e R. Baldini, "A method to find runlength limited block error control codes" *Proceedings ISIT-97*, pp. 220, Junho 1997.
- [4] M. Šechny e P. Farkaš, "Some new runlength-limited convolutional codes", *IEEE Trans. Comm.*, v. 47, n° 7, pp 962-966, Julho 1999.
- [5] E. M. G. Fernández e R. Baldini, "Concatenated runlength limited codes with soft-decision decoding" *Proceedings ISIT-2000*, pp. 259, Junho 2000.
- [6] I. S. Reed e X. Chen, *Error-Control Coding for Data Networks*, Kluwer Academic Press, 1999.
- [7] S. Lin e D. J. Costello Jr., *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.