

Códigos de Permutação Vetorial para Modulação

Danilo Silva e Weiler A. Finamore

Resumo—Este artigo introduz os códigos de permutação vetorial para modulação (VPM), os quais são generalizações dos códigos de permutação escalar (SPM) de Slepian. As palavras de um VPM consistem em todas as permutações dos símbolos de uma palavra de referência, onde tais símbolos são vetores num espaço euclidiano L -dimensional. Um problema importante é encontrar a palavra de referência que produz o código com melhor desempenho, dados os vetores que a compõem. As expressões para a solução ótima desse problema são obtidas, o que permite projetar VPM's com mínima energia requerida para uma dada taxa. Nossos resultados mostram que VPM's com tamanho de bloco moderado podem atingir desempenhos que não são igualáveis por nenhum SPM, nem mesmo assintoticamente. Ao se permitir que os símbolos variem num espaço de maior dimensão, dicionários com melhor desempenho podem ser obtidos, um comportamento que é bem conhecido de quantizadores escalares e vetoriais.

Alguns sistemas propostos na literatura podem ser enquadrados sob a definição de VPM; como conseqüência, soluções para algumas questões relativas a estes sistemas são apresentadas, em particular para a recepção ótima de SPM em canal com desvanecimento rápido.

Palavras-Chave—Modulação por permutação, códigos de permutação, códigos de grupo para o canal gaussiano.

Abstract—This article introduces vector permutation modulation codes (VPM), which are a generalization of Slepian's scalar permutation modulation codes. The codewords in a VPM consist of all the permutations of the symbols of a reference codeword, where these symbols are vectors in an L -dimensional Euclidean space. An important problem is to find the reference codeword that yields a code with the best performance, given its constituting vectors. We obtain expressions for the optimal solution of this problem, which allow for the design of VPM's with minimum required energy for a given rate. Our results show that VPM's with moderate block length can have a performance that is not attainable by any SPM, not even asymptotically. By permitting the symbols to vary in a higher-dimensional space, codebooks with better performance can be obtained, which is a well-known behavior of scalar and vector quantizers.

Some systems proposed in literature can be viewed as VPM's. As a consequence, we present solutions for some questions about these systems, in particular, for the optimal reception of SPM in a fast fading channel.

Keywords—Permutation modulation, permutation codes, group codes for the Gaussian channel.

I. INTRODUÇÃO

Em um código de permutação, as palavras consistem em todas as permutações dos símbolos de uma palavra de referência. Tais códigos foram introduzidos por Slepian em 1965 [1] no contexto de modulação, e independentemente por Dunn [2] para compressão de fontes. O sistema de modulação por

permutação é apropriado para transmissão em canal gaussiano, tendo como base o modelo geométrico de um canal limitado em faixa [3]; segundo esse modelo, cada mensagem é associada a um ponto num espaço euclidiano de N dimensões. Nos códigos introduzidos por Slepian, cada símbolo corresponde a uma coordenada desses pontos, ou seja, as palavras são permutações de números reais.

A escolha da palavra de referência caracteriza o código de permutação. Nos anos seguintes, progresso foi realizado por Biglieri e Elia [4], Karloff [5] e Ingermarsson [6] quanto ao projeto de palavras de referência que produzam códigos com bom desempenho. Diversas aplicações foram propostas em seguida, dentre as quais cita-se: gravação magnética [7], transmissão em canais com desvanecimento [8]–[10] e armazenamento óptico [11]. Em paralelo, avanços foram obtidos na teoria de códigos de permutação para compressão de fontes, sobretudo por Berger [12]. Em [13], Berger mostra que o desempenho de tais códigos está fortemente ligado ao de um quantizador escalar com restrição de entropia.

Recentemente [14], ainda no contexto de compressão de fontes, o conceito de códigos de permutação foi estendido para o caso multi-dimensional, com os símbolos de uma palavra correspondendo a um bloco de L números reais; as palavras são, portanto, permutações de vetores. Para fazer distinção entre tais conceitos, os códigos já estabelecidos são chamados de *códigos de permutação escalar*, enquanto os novos são chamados de *códigos de permutação vetorial*. Neste artigo, introduzimos os códigos de permutação vetorial sob o contexto de modulação. Nossa definição é motivada pelo bom desempenho de tais códigos para compressão de fontes: é mostrado em [15] que tal desempenho está fortemente ligado ao de um quantizador vetorial com restrição de entropia, e que supera, portanto, o dos códigos de permutação escalares. Quando usados para modulação, os códigos de permutação escalares e vetoriais serão denotados, respectivamente, por SPM (*scalar permutation modulation*) e VPM (*vector permutation modulation*).

Este artigo está organizado da seguinte forma. A seção 2 revisa alguns tópicos da teoria de transmissão digital sob o modelo geométrico de Shannon. A seção 3 apresenta os conceitos de SPM e VPM, abordando sua recepção ótima em canal com ruído aditivo gaussiano branco (AWGN). Na seção 4 é proposto um método para o projeto de VPM, e alguns resultados mostrando que VPM possui melhor desempenho que SPM são apresentados. Na seção 5, é considerada a aplicação de VPM para canais com desvanecimento, e alguns sistemas práticos empregando VPM são também descritos. A seção 6 apresenta as conclusões do trabalho.

Danilo Silva e Weiler A. Finamore, Centro de Estudos em Telecomunicações, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, E-mails: danilo@cetuc.puc-rio.br, weiler@cetuc.puc-rio.br. Este trabalho foi desenvolvido com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

II. MODELO GEOMÉTRICO DE UM SISTEMA DE COMUNICAÇÕES

Um sistema de transmissão digital genérico é tipicamente modelado [16] da seguinte forma. A cada intervalo de duração T , uma dentre M possíveis mensagens é escolhida para transmissão. Cada mensagem está associada a um sinal de um conjunto $\mathcal{S} = \{s_i(t)\}_{i=1}^M$; o transmissor então envia o sinal correspondente através de um canal de comunicações limitado a uma faixa W . Os sinais podem ser escritos como

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N x_{ij} \phi_j(t), \quad i = 1, \dots, M,$$

onde x_{ij} são números reais, e as funções $\phi_j(t)$, $j = 1, \dots, N$, são ortonormais e limitadas ao intervalo T e à banda W . É matematicamente possível encontrar $N = 2TW/\alpha$ funções distintas obedecendo a essas restrições, onde α é uma constante que só depende das definições de duração e banda.

Este modelo nos permite representar qualquer sinal $s_i(t)$ como um ponto $\mathbf{x}_i = (x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{iN}) \in \mathbb{R}^N$ num espaço euclidiano de N dimensões. As funções $\phi_j(t)$ e o conjunto de vetores $\mathcal{C} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^M$ caracterizam a modulação específica. O conjunto \mathcal{C} é também chamado de *código de bloco* (pois a cada mensagem $i \in \{1, \dots, M\}$ está associado um vetor $\mathbf{x}_i \in \mathcal{C}$), *código* $[M, N]$ ou *constelação* (multidimensional).

Quando o sinal correspondente ao vetor $\mathbf{x}_i \in \mathcal{C}$ é transmitido através de um canal AWGN, e o sinal recebido é decomposto nas funções $\phi_j(t)$, o vetor recebido resultante é dado por

$$\mathbf{Y} = \mathbf{x}_i + \mathbf{Z},$$

onde \mathbf{z} é um vetor aleatório gaussiano com componentes independentes de média nula e variância σ^2 . O receptor de máxima verossimilhança escolhe como estimativa $\hat{\mathbf{x}}$ do vetor transmitido o vetor $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ que está à menor distância euclidiana do vetor recebido \mathbf{y} , isto é,

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2.$$

O vetor $\mathbf{x}_{i'}$ detectado por esse processo é então decodificado na mensagem i' através do mapeamento dado em \mathcal{C} .

Alguns parâmetros tipicamente usados para comparação entre códigos são descritos a seguir.

1) Taxa de informação do código:

$$R = \frac{1}{N} \log M.$$

A justificativa para R é baseada na eficiência espectral $R_b/W = \frac{1}{TW} \log M$ bit/s/Hz, onde R_b é a taxa de transmissão de informação. Assumindo que o sistema admite que sejam usadas $N = 2TW/\alpha$ funções $\phi_j(t)$, onde α é uma constante que não depende de T nem de W , encontramos que R_b/W é proporcional a R .

2) Energia média por dimensão:

$$E = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^M \|\mathbf{x}_i\|^2.$$

Se os sinais são usados com igual probabilidade, então a energia média por bit é $E_b = NE/\log M = \frac{1}{R}E$. Portanto,

entre códigos com a mesma taxa R , aqueles que apresentam menor E requerem menos energia por bit.

3) Distância mínima:

$$d_{min}^2 = \min_{i,j, i \neq j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2.$$

Para uma razão sinal-ruído moderadamente alta, uma aproximação satisfatória da probabilidade de erro do sistema pode ser obtida a partir da distância mínima entre os sinais. Assim, é razoável e prático admitir que códigos com a mesma distância mínima apresentem o mesmo desempenho.

III. CÓDIGOS DE PERMUTAÇÃO PARA MODULAÇÃO

Nesta seção serão apresentados códigos para modulação com estrutura baseada em permutações. Nesse ponto é conveniente fazer uso da linguagem da teoria de códigos e se referir aos vetores $\mathbf{x}_i \in \mathcal{C}$ como *palavras* do código.

Um *código de permutação* (escalar ou vetorial) é um código cujas palavras correspondem a todas as permutações distintas de uma *palavra de referência* (também chamada de *vetor inicial*). Em um *código de permutação escalar* (SPM) a palavra de referência é dada por

$$\mathbf{x}_1 = (\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{m_1}, \underbrace{\mu_2, \dots, \mu_2}_{m_2}, \dots, \underbrace{\mu_K, \dots, \mu_K}_{m_K})$$

onde μ_j são escalares, $n = \sum_{j=1}^K m_j$ e $N = n$.

Em um *código de permutação vetorial* (VPM) as possibilidades de permutação são restringidas agrupando-se as componentes de cada palavra em blocos de tamanho L :

$$\mathbf{x}_i = (\underbrace{[x_{i1} \ \dots \ x_{iL}]^T}_{\mathbf{x}_{i1}} \ \dots \ \underbrace{[x_{i,(n-1)L+1} \ \dots \ x_{i,nL}]^T}_{\mathbf{x}_{in}}).$$

Assim, a palavra de referência de um VPM é dada por

$$\mathbf{x}_1 = (\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{m_1}, \underbrace{\mu_2, \dots, \mu_2}_{m_2}, \dots, \underbrace{\mu_K, \dots, \mu_K}_{m_K}),$$

onde μ_j são vetores L -dimensionais, $n = \sum_{j=1}^K m_j$ e $N = nL$. Um SPM corresponde ao caso particular $L = 1$.

A taxa de informação do código é portanto $R = \frac{1}{nL} \log M$ bits/símbolo, onde o número M de palavras do código corresponde ao número de possíveis permutações de \mathbf{x}_1 :

$$M = \frac{n!}{\prod_{j=1}^K m_j!}.$$

Como todas palavras têm a mesma norma, a energia por dimensão é

$$E = \frac{1}{N} \|\mathbf{x}_1\|^2 = \frac{1}{nL} \sum_{j=1}^K m_j |\mu_j|^2.$$

Por sua vez, a distância mínima entre as palavras é dada por

$$d_{min}^2 = 2 \min_{i,j, i \neq j} \|\mu_i - \mu_j\|^2,$$

uma vez que as duas palavras mais próximas só diferem em duas posições (troca de símbolos).

A detecção ótima em canal AWGN é realizada buscando-se a permutação da palavra de referência que esteja à

menor distância da palavra recebida, ou, equivalentemente, buscando-se aquela que produza a menor diferença quadrática. Considerando-se cada diferença quadrática entre as componentes, $\delta_{kj} = \|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_{1j}\|^2$, como correspondendo ao custo de se mapear o vetor \mathbf{y}_k no vetor \mathbf{x}_{1j} , temos que o problema se traduz em buscar o mapeamento um-para-um $j(k)$ que produza o menor custo total $\sum_{k=1}^n \delta_{k,j(k)}$. Assim, qualquer algoritmo que resolva o problema de atribuição (entre n servidores e n tarefas) pode ser usado para a detecção de VPM. Em particular, o algoritmo CSA [17] mostra-se um dos mais eficientes para esse tipo de problema, com complexidade sub-cúbica $\mathcal{O}(n^2\sqrt{n}\log n)$. Excepcionalmente para $L = 1$, por outro lado, o problema se reduz ao de uma simples ordenação de números reais, com complexidade $\mathcal{O}(n\log n)$ [13].

Finalizando esta seção, observamos que existem outras definições para códigos de permutação além das apresentadas aqui. Karloff e outros [5] consideram código de permutação todo código que pode ser gerado por um grupo de permutação aplicado a uma palavra de referência. Essa definição engloba, portanto, códigos gerados por todos os subgrupos do grupo simétrico S_n (que corresponde a todas as permutações possíveis de n elementos). Podemos chamar tais códigos de *códigos de permutação generalizados*. Assim, um VPM de tamanho n pode ser visto como um SPM generalizado de tamanho nL . Outros autores [9], [11] consideram um código de permutação como constituído por quaisquer permutações de uma palavra de referência, não necessariamente geradas por um grupo. Podemos chamar tais códigos de *códigos de permutação expurgados*.

IV. PROJETO DE CÓDIGOS DE PERMUTAÇÃO

Dados a dimensão L , o tamanho de bloco n e o número de componentes K , os parâmetros que caracterizam um VPM são o alfabeto $\{\boldsymbol{\mu}_j\}_{j=1}^K$ e o vetor de composição $\{m_j\}_{j=1}^K$. Nesta seção procuramos projetar esses parâmetros a fim de obter códigos que apresentem uma combinação de altas taxa e distância mínima para o menor valor de energia possível. Divide-se o projeto em duas partes: a primeira consiste em fixar o alfabeto — e portanto a distância mínima — e buscar os valores ótimos para o vetor de composição, de forma a maximizar a taxa para uma dada energia. A segunda consiste em fixar o vetor de composição — e portanto a taxa — e buscar os valores do alfabeto que, para uma dada distância mínima, minimizem a energia. A combinação dessas duas etapas leva a VPM's que, para um desempenho especificado, possuem uma boa relação entre taxa e energia requerida.

A. Projeto de vetor de composição

O desenvolvimento a seguir é uma generalização do desenvolvimento para SPM obtido por Ingermarson [6]. Dados L , K e $\|\boldsymbol{\mu}_j\|^2$, $j = 1, \dots, K$, buscam-se os valores de m_j que maximizem R e minimizem E sob uma restrição em n .

Temos

$$E = \frac{1}{nL} \sum_{j=1}^K m_j \|\boldsymbol{\mu}_j\|^2 \quad n = \sum_{j=1}^K m_j$$

$$R = \frac{1}{nL} \log M = \frac{1}{nL} \left[\sum_{\ell=1}^n \log \ell - \sum_{j=1}^K \sum_{\ell=1}^{m_j} \log \ell \right]$$

Para minimizar $-R$ e E sob uma restrição em n , é usada uma técnica semelhante ao multiplicador de Lagrange. Minimizamos a função

$$f(m_1, \dots, m_K) = \sum_{j=1}^K \sum_{\ell=1}^{m_j} \log \ell + \lambda \sum_{j=1}^K m_j \|\boldsymbol{\mu}_j\|^2 + \nu \sum_{j=1}^K m_j,$$

onde $\lambda > 0$. Note que o primeiro termo na expressão para R é constante e portanto é omitido de f . Quando m_j cresce, a função f está passando por um mínimo quando as seguintes inequações são satisfeitas:

$$f(m_1, \dots, m_j + 1, \dots, m_K) - f(m_1, \dots, m_j, \dots, m_K) > 0$$

$$f(m_1, \dots, m_j - 1, \dots, m_K) - f(m_1, \dots, m_j, \dots, m_K) \geq 0$$

Substituindo f , temos

$$\begin{aligned} \log(m_j + 1) + \lambda \|\boldsymbol{\mu}_j\|^2 + \nu &> 0 \\ \log(m_j) + \lambda \|\boldsymbol{\mu}_j\|^2 + \nu &\leq 0 \end{aligned}$$

Combinando as inequações, temos que os valores ótimos para m_j são

$$m_j = \left\lfloor 2^{-\lambda \|\boldsymbol{\mu}_j\|^2 - \nu} \right\rfloor = \left\lfloor \beta \cdot 2^{-\lambda \|\boldsymbol{\mu}_j\|^2} \right\rfloor, \quad j = 1, \dots, K.$$

Os m_j podem ser interpretados como amostras quantizadas da f.d.p. conjunta de um vetor aleatório gaussiano cuja variância é controlada por λ . $\beta > 0$ é um fator de ganho ajustado para satisfazer a restrição em n , enquanto λ é ajustado para satisfazer a restrição em E .

B. Projeto de alfabeto

O projeto de alfabeto consiste em projetar os vetores L -dimensionais $\boldsymbol{\mu}_j$ de forma a minimizar a distância entre eles, fixado o valor $E = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^K p_j \|\boldsymbol{\mu}_j\|^2$, onde $p_j = m_j/n$ é a probabilidade do vetor $\boldsymbol{\mu}_j$. Colocado dessa forma, observamos que o problema é equivalente ao do projeto de constelações L -dimensionais compostas por K vetores; deseja-se projetar um código $[K, L]$ com máxima distância mínima.

Esse é um problema de “empacotamento de esferas” (*sphere packing*) extensivamente discutido na literatura [18]. Apesar de ainda não ter sido encontrada uma solução fechada, diversas configurações eficientes têm sido propostas, especialmente em estrutura de reticulado (*lattice codes*). A maioria delas, entretanto, é projetada assumindo que os sinais são equiprováveis, o que, a princípio, não se aplicaria ao caso em estudo (as constelações obtidas podem não ser eficientes). Calderbank [19] discute o desempenho de constelações com sinais não-equiprováveis, porém construídas com um formato bastante restrito.

Apesar de ainda não se conhecer um método para o projeto ótimo das constelações em questão, qualquer constelação conhecida pode ser usada para construir um VPM. O vetor de composição associado aos $\boldsymbol{\mu}_j$'s pode então ser calculado através do algoritmo da seção anterior.

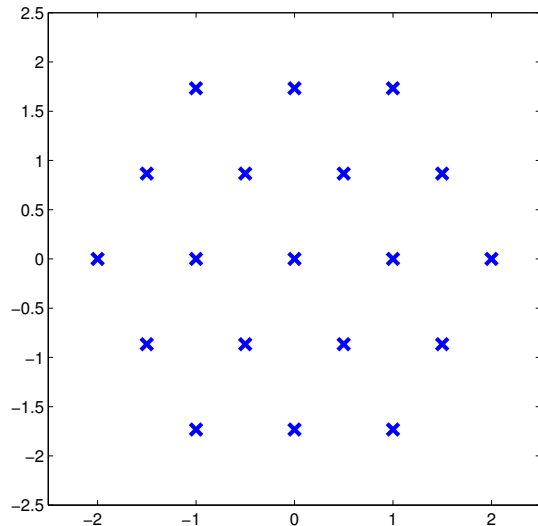


Fig. 1. Alfabeto de um VPM com $L = 2$, $K = 19$ e distância mínima entre os símbolos igual a 1.

Em [4], Biglieri e Elia mostram que os valores ótimos de μ_j para um SPM devem estar igualmente espaçados. Mostram ainda que, para este código, maximizar o número de pontos vizinhos à mínima distância é equivalente a maximizar a distância mínima, e conjecturam que esta propriedade é válida para qualquer código de grupo. Tomando como verdade essa conjectura, propomos a seguinte estrutura de reticulado para VPM's L -dimensionais: todos os pontos vizinhos devem estar à mínima distância. Isso implica uma grade de triângulos equiláteros em \mathbb{R}^2 (Fig. 1), de tetraedros regulares em \mathbb{R}^3 , e assim por diante. Essa estrutura é suficiente para obter um bom desempenho com VPM, como veremos a seguir.

C. Desempenho

Usando a constelação de μ_j 's da Figura 1, aplicamos as fórmulas obtidas para o vetor de composição e obtemos os VPM's cujo desempenho pode ser visto na Figura 2. Nesta figura é também mostrado o desempenho ótimo¹ de alguns SPM's; em particular, seu desempenho assintótico é sugerido na curva para $n = 20000$. Observa-se que este desempenho é atingido² por um VPM de apenas $n = 100$, e superado com folga quando $n = 500$. Ganhos equivalentes podem ser obtidos aumentando-se sucessivamente o número de dimensões L .

V. APLICAÇÕES

A. Canal com desvanecimento

A transmissão digital através de um canal com desvanecimento é tipicamente modelada no espaço N -dimensional como

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}_i + \mathbf{z},$$

onde $\mathbf{H} = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$ é a matriz diagonal de desvanecimento. O canal é dito de *desvanecimento lento* se a matriz

¹Obtido de acordo com as expressões em [6].

²Note que para tornar possível a comparação entre diferentes códigos (em particular entre SPM e VPM) é fixada para todos eles a mesma distância mínima.

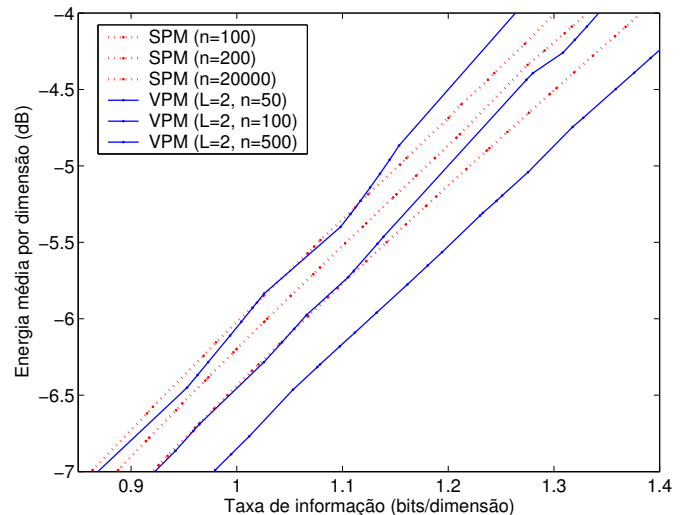


Fig. 2. Energia requerida (em dB) em função da taxa, para VPM e SPM. Todos os códigos possuem $d_{min} = \sqrt{2}$. Curvas para o mesmo código situadas mais abaixo correspondem a maiores valores de n .

$\mathbf{H} = h\mathbf{I}$ e h muda independentemente de uma palavra para outra, e é dito de *desvanecimento rápido* se os coeficientes de desvanecimento h_i mudam independentemente em cada componente. Assumindo que o receptor conhece o estado do canal, a detecção de máxima verossimilhança é dada por

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2.$$

No caso de desvanecimento lento, a recepção de SPM pode ser feita pelo mesmo algoritmo de ordenação usado para recepção em canal AWGN, uma vez que a constelação "desvanecida" gerada por $\mathbf{H}\mathbf{x}$ continua sendo um código de permutação. O mesmo não acontece, entretanto, para o caso de desvanecimento rápido. Em [8], Nordio e Viterbo abordam o problema da detecção de SPM em desvanecimento rápido, apresentando um algoritmo eficiente para o caso particular $K = 2$. Viterbo elimina essa restrição em [10], desenvolvendo uma descrição de SPM através de uma estrutura de treliça, sobre a qual o algoritmo de Viterbi é aplicado. Entretanto, uma análise simples revela que a complexidade do algoritmo cresce rapidamente com K ; para $K = 4$, por exemplo, a complexidade tipicamente será em torno de $\mathcal{O}(n^4)$.

Por outro lado, o algoritmo para recepção de VPM pode ser o mesmo para todos os casos, tanto em desvanecimento lento como em rápido; a complexidade, portanto, é fixa em $\mathcal{O}(n^2 \sqrt{n} \log n)$. A única alteração é feita no cálculo dos custos individuais, a fim de incorporar os coeficientes de desvanecimento: $\delta_{kj} = \|\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k \mathbf{x}_{1j}\|^2$, onde $\mathbf{h}_k = \text{diag}(h_{(k-1)L+1}, \dots, h_{kL})$. Ressaltamos, então, que a detecção de SPM pode ser feita com o mesmo algoritmo de atribuição usado para VPM, o que resulta, para $K > 3$, em uma complexidade menor que a dos algoritmos propostos até o momento.

B. Alguns sistemas com VPM

Através da escolha de funções $\phi_j(t)$ apropriadas ao tipo de aplicação pretendido, diversos esquemas de transmissão com

VPM podem ser obtidos. Nos sistemas descritos a seguir, faz-se uso da ortogonalidade entre as funções seno e cosseno de diferentes frequências e em diferentes intervalos de tempo.

1) *Extensão temporal de um sistema AM-PM*: As componentes em fase e quadratura de uma portadora correspondem às $L = 2$ dimensões de μ_j , enquanto o tamanho de bloco n corresponde ao número de intervalos considerados. Por exemplo:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{matrix} & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_7 & T_8 \\ \sin f_1 & \left(\begin{matrix} a & a & a & a & -a & -a & -a & -a \\ a & a & -a & -a & a & a & -a & -a \end{matrix} \right) \\ \cos f_1 & \end{matrix}$$

Esse sistema permite, por exemplo, uma adaptação direta de modulações QAM para que façam uso de sinais não-equiprováveis, obtendo-se a redução de potência descrita em [19] sem que seja necessário arcar com as desvantagens de uma taxa variável [20], [21] e de uma constelação com estrutura específica (em forma de anéis).

2) *Extensão temporal de um sistema FSK*: As frequências disponíveis no sistema correspondem às L dimensões de μ_j , enquanto n é novamente o número de intervalos considerados. Por exemplo:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{matrix} & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\ f_1 & \left(\begin{matrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{matrix} \right) \\ f_2 & \\ f_3 & \\ f_4 & \end{matrix}$$

Esse sistema nos permite concluir que a “combinação de código de permutação e modulação MFSK” proposta em [9] é um caso particular de VPM. Mais ainda pode ser dito: em tal artigo, o código de permutação proposto tem $m_j = 1$, $j = 1, \dots, K$, mas nenhum argumento é dado quanto a essa ser ou não a melhor composição. Aplicando-se o método da seção IV-A, obtém-se que, em um projeto ótimo, vetores μ_j com mesma norma devem, de fato, estar associados a valores m_j idênticos.

3) *Sistema híbrido AM-PM/FSK*: Cada uma das n frequências disponíveis produz um vetor μ_j com $L = 2$ dimensões. Por exemplo:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{matrix} & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 \\ \sin & \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & -a & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & -a & a & -a \end{matrix} \right) \\ \cos & \end{matrix}$$

Esse sistema apresenta características bastantes semelhantes às da modulação descrita em [22].

Observamos que, no caso geral, teremos $N = 2N_T N_W$ dimensões, onde N_T e N_W são respectivamente o número de intervalos de tempo e de frequência considerados; tais dimensões podem ser livremente distribuídas entre as dimensões n e L (desde que $N = nL$).

VI. CONCLUSÕES

Neste artigo, códigos de permutação vetorial são introduzidos para modulação. Estes códigos são generalizações dos códigos de permutação escalares introduzidos por Slepian. Métodos para o projeto de VPM são apresentados; em particular, expressões para os valores ótimos do vetor de composição são obtidas. Alguns resultados são apresentados, mostrando que a partir de tamanhos de bloco moderados o VPM atinge desempenhos superiores aos do SPM. Mesmo o desempenho assintótico do SPM pode ser superado, com ganhos de cerca de 0,4 dB.

É discutida a recepção ótima de VPM em canal AWGN, e é mostrado que o método proposto também se aplica a canais com desvanecimento — resultando, para SPM's com $K > 3$, em uma detecção com complexidade menor que a dos métodos existentes. Alguns sistemas utilizando VPM são sugeridos; mostra-se que outros sistemas propostos na literatura podem ser interpretados como um VPM, permitindo não só uma formulação matemática mais conveniente, mas também a aplicação das técnicas de projeto desse sistema. VPM's também podem ser utilizados como um código de bloco em modulações com sinais não-equiprováveis, obtendo redução de potência ao mesmo tempo em que é mantida uma taxa fixa.

REFERÊNCIAS

- [1] D. Slepian, “Permutation modulation,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 53, pp. 228–236, 1965.
- [2] J. G. Dunn, “The performance of a class of n -dimensional quantizers for a Gaussian source,” *Proc. Symp. Signal Transmission and Processing*, pp. 76–81, 1965.
- [3] C. E. Shannon, “Communication in the presence of noise,” *Proc. of the IEEE*, vol. 86, pp. 447–457, 1998.
- [4] E. M. Biglieri and M. Elia, “Optimum permutation modulation codes and their asymptotic performance,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 22, pp. 751–753, 1976.
- [5] J. K. Karloff, “Permutation codes for the Gaussian channel,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 35, pp. 726–732, 1989.
- [6] I. Ingermarsson, “Optimized permutation modulation,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 36, pp. 1098–1100, 1990.
- [7] J. K. Wolf, “Permutation codes, (d,k) codes and magnetic recording,” *Proc. of the IEEE Colloquium in South America*, pp. 59–61, 1990.
- [8] A. Nordio and E. Viterbo, “Permutation modulation for fading channels,” *Proc. of the International Conference on Telecommunications*, vol. 2, pp. 1177–1183, 2003.
- [9] K. W. Shum, “Permutation coding and MFSK modulation for frequency selective channel,” *Proc. of the PIMRC 2002*, vol. 5, pp. 2063–2066, 2002.
- [10] E. Viterbo, “Trellis decoding of permutation modulations,” *Proc. of the International Symposium on Information Theory*, p. 393, 2003.
- [11] B. M. King and M. A. Neifeld, “Low-complexity maximum-likelihood decoding of shortened enumerative permutation codes for holographic storage,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 19, pp. 783–790, 2001.
- [12] T. Berger, F. Jelinek, and J. K. Wolf, “Permutation codes for sources,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 18, pp. 160–169, 1972.
- [13] T. Berger, “Optimum quantizers and permutation codes,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 18, pp. 759–765, 1972.
- [14] W. A. Finamore, S. V. B. Bruno, and D. Silva, “Vector permutation encoding for the uniform sources,” *Proc. of the Data Compression Conference*, p. 539, March 2004.
- [15] W. A. Finamore and D. Silva, “Vector permutation code design algorithm,” submitted to the *International Symposium on Information Theory and its Applications*, 2004.
- [16] J. Wozencraft and I. M. Jacobs, *Principles of Communication Engineering*. New York: Wiley, 1965.

- [17] A. V. Goldberg and R. Kennedy, "An efficient cost scaling algorithm for the assignment problem," tech report, Stanford university, CS Department, Stanford, CA, May 1995.
- [18] G. D. Forney and L. Wei, "Multidimensional constellations - part i: Introduction, figures of merit, and generalized cross constelations," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 7, pp. 877–892, 1989.
- [19] A. R. Calderbank and L. H. Ozarow, "Nonequiprobable signaling on the Gaussian channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 36, pp. 726–740, 1990.
- [20] J. N. Livingston, "Shaping gains using non-equiprobable signaling," *Proc. of the Global Telecommunications Conference*, vol. 3, pp. 1994–1998, 1990.
- [21] A. R. Calderbank and M. Klimesh, "Balanced codes and nonequiprobable signaling," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 38, pp. 1119–1122, 1992.
- [22] A. Yagaçoglu and W. Li, "Hybrid permutation frequency phase modulation," *Proc. of the IEEE Canadian Conf. on Electrical and Computer Engineering*, vol. 1, pp. 197–200, 1997.