# Códigos Convolucionais Espácio-Temporais sobre Anéis para Modulações $p^k$-PSK

Mário de Noronha-Neto e Bartolomeu F. Uchôa-Filho

***Resumo*— Neste trabalho consideramos códigos espácio-temporais gerados por um codificador convolucional de taxa $R = 1/n$, linear sobre o anel $\mathbf{Z}_{p^k}$, onde $p$ é um número primo e $k$ um inteiro positivo. Os códigos são projetados para obter o melhor desempenho diante do canal com desvanecimeto Rayleigh plano e quase-estático, de acordo com os critérios do posto e do determinante estabelecidos por Tarokh $et\ al.$. Utilizando esta estrutura, apresentamos um resultado que nos permite obter códigos convolucionais espácio-temporais (STCCs) sobre $\mathbf{Z}_{p^k}$ para a modulação $p^k$-PSK com diversidade completa, garantindo apenas posto completo em uma matriz G' formada pelos coeficientes do codificador convolucional reduzidos módulo-$p$. A partir desse resultado, são apresentados STCCs com diversidade completa para as modulações QPSK, 8-PSK, 9-PSK e 16-PSK, para $n = 2$ e $3$ antenas transmissoras, atingindo eficiências espectrais de $k \log_2(p)$ b/s/Hz.**

***Palavras-Chave*— Códigos convolucionais espácio-temporais sobre anéis, múltiplas antenas transmissoras, diversidade, desvanecimento.**

***Abstract*— In this paper we consider space-time codes generated by a rate $R = 1/n$ convolutional code over the ring $\mathbf{Z}_{p^k}$, where $p$ is a prime and $k$ a positive integer. The codes are designed to provide the best error performance in the quasi-static, flat Rayleigh fading channels, according to the rank and determinant criteria proposed by Tarokh $et\ al.$. We present a result that allows us to obtain full diversity Space-Time Convolutional Codes (STCCs) over $\mathbf{Z}_{p^k}$ for $p^k$-PSK modulation by only ensuring that the matrix G', composed of the convolutional encoder taps reduced modulo-$p$, have full rank over GF($p$). Full-diversity STCCs for the QPSK, 8-PSK, 9-PSK, and 16-PSK modulations, and for $n = 2$ and $3$ transmit antennas are presented, achieving an spectral efficiency of $k \log_2(p)$ b/s/Hz.**

***Keywords*— Space-time convolutional codes over rings, multiple transmit antennas, diversity, fading.**

## I. INTRODUÇÃO

Em 1998, Tarokh $et\ al.$ apresentaram os chamados Códigos Espácio-Temporais em Treliça (STTC), uma classe de códigos em treliça para sistemas de comunicações sem fio que utilizam múltiplas antenas transmissoras. Estes códigos atingem uma alta taxa de transmissão e um excelente desempenho, permitindo o uso de serviços de multimídia tais como o acesso à internet e vídeo conferência. Em [1], critérios de projeto foram propostos para se construir STTCs para canais com desvanecimento. Para o canal com desvanecimento Rayleigh plano e quase-estático, a probabilidade de erro mínima com relação ao par é obtida quando os STTCs são projetados de acordo com os critérios do posto e do determinante. O primeiro critério representa o ganho de diversidade e está relacionado com a inclinação da curva de desempenho de erro, enquanto o segundo está relacionado com o ganho de codificação, e determina o deslocamento vertical da mesma curva. A principal dificuldade para o projeto de STTCs é que os dois critérios mencionados acima se aplicam ao campo complexo de sinais de modulações em banda base, ao invés de um domínio discreto, como o caso do Campo de Galois, no qual os códigos tradicionais costumavam ser projetados. Tentando simplificar o projeto de STTCs, Tarokh $et\ al.$ [1] propuseram duas regras simples que garantem diversidade completa para STTCs com duas antenas transmissoras. Grimm $et\ al.$ [2], através do conceito de "simetria de zeros", generalizou as regras de Tarokh possibilitando o projeto de STTCs com diversidade completa para mais de duas antenas transmissoras. Em [3], Hammons e El Gamal desenvolveram critérios de posto binário em substituição ao critério do posto baseado nos complexos, que são mais simples e garantem que os STTCs associados atinjam diversidade completa para as modulações BPSK e QPSK. Eles também mostraram que o STTC natural relacionado a um código convolucional $C$ de taxa $R = 1/n$ satisfaz o critério do posto binário se, e somente se, a matriz função de transferência de $C$, como uma matriz de coeficientes sobre o campo binário, possuir posto completo $n$. Em [4], foi desenvolvida uma teoria para garantir diversidade completa para STTCs utilizando constelações $2^{2 \cdot k}$-QAM, onde $k$ é um inteiro positivo. Esta teoria inclui, como um caso particular, o critério do posto binário proposto em [3] para modulações BPSK. Em [5], Blum considerou códigos convolucionais binários que servem como STTCs. Condições suficientes e necessárias foram dadas para que STTCs tivessem ganho de diversidade completo. Além disso, Blum desenvolveu métodos para calcular um limitante para o ganho de codificação. Em [6], os autores apresentaram uma conjectura a partir da qual a diversidade completa para códigos convolucionais espácio-temporais (STCCs) sobre GF($p$), $p$ primo, é garantida apenas garantindo-se que uma matriz geradora escalar, composta pelos coeficientes do codificador, tenha posto completo sobre GF($p$). Em [6], os símbolos de entrada, os coeficientes e a saída do codificador são todos elementos de GF($p$). Uma prova para a conjectura de [6], que se estende aos STTCs não lineares sobre GF($p$), foi apresentada em [7].

Neste trabalho consideramos um sistema codificado espácio-temporal constituído por um codificador convolucional de taxa $R = 1/n$, linear sobre o anel $\mathrm{Z}_{p^k}$, onde $p$ é primo e $k$ um inteiro positivo, seguido por um conversor serial/paralelo, $n$ mapeadores de símbolos $\mathrm{Z}_{p^k}$ em sinais de constelações

Mário de Noronha Neto e Bartolomeu F. Uchôa Filho, Grupo de Pesquisa em Comunicações - GPqCom, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, Brasil, E-mails: mnoronha@eel.ufsc.br e uchoa@eel.ufsc.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) sob os números de processos: 141955/2002-3, 302568/2002-6 e 472448/2003-0.

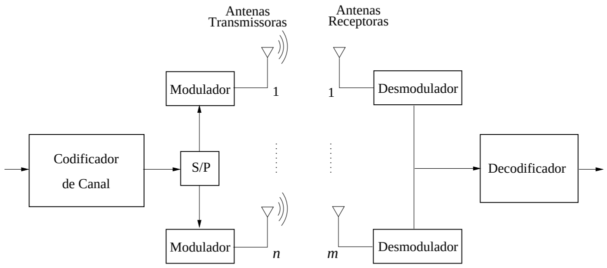


Fig. 1. Sistema codificado espácio-temporal.

$p^k$-PSK e $n$ antenas transmissoras. Utilizando esta estrutura apresentaremos um resultado através do qual pode-se obter diversidade completa para STCCs sobre $\mathrm{Z}_{p^k}$ garantindo apenas posto completo em uma matriz **G'** formada pelos coeficientes do codificador convolucional reduzidos módulo-$p$. Com isso, generalizamos o resultado obtido em [6] para modulações do tipo $p^k$-PSK, as quais envolvem modulações usuais, como por exemplo $2^k$-PSK. Uma eficiência espectral de $k\log_2(p)$ b/s/Hz pode ser atingida, proporcionando uma escala maior de aplicações de multimídia. Alguns exemplos de códigos convolucionais espácio-temporais sobre $\mathrm{Z}_4$, $\mathrm{Z}_8$, $\mathrm{Z}_9$ e $\mathrm{Z}_{16}$, com diversidade completa, para as modulações QPSK, 8-PSK, 9-PSK e 16-PSK, respectivamente, e para $n = 2$ e 3 antenas transmissoras são apresentados.

Este trabalho será organizado da seguinte maneira. O modelo do sistema espácio-temporal e os dois critérios de projeto para o canal com desvanecimento Rayleigh plano e quase-estático, como apresentado em [1], serão revistos na Seção II. Na Seção III, apresentaremos os códigos convolucionais espácio-temporais sobre $\mathrm{Z}_{p^k}$ e o resultado que estabelece diversidade completa para estes códigos. Na Seção IV, mostraremos alguns exemplos de STCCs sobre $\mathrm{Z}_{p^k}$ com diversidade completa para constelações $p^k$-PSK utilizando $n = 2$ e 3 antenas transmissoras e codificadores com ordem de memória $K = 1$ e 2. Finalmente, na Seção V, faremos algumas conclusões.

## II. Critérios de Projeto e o Modelo do Sistema Espácio-Temporal

Neste trabalho, consideraremos um sistema de comunicações utilizando $n$ antenas transmissoras e $m$ antenas receptoras, como mostrado na Figura 1. No transmissor, em cada instante de tempo $t$, um símbolo de informação sobre $\mathrm{Z}_{p^k}$ é codificado por um codificador convolucional sobre $\mathrm{Z}_{p^k}$, produzindo um bloco de $n$ símbolos codificados sobre $\mathrm{Z}_{p^k}$, $(v_t^1, v_t^2, \ldots, v_t^n)$. Estes símbolos são mapeados em sinais de uma constelações $p^k$-PSK. Os $n$ símbolos complexos,

$$(c_t^1, c_t^2, \ldots, c_t^n) = \left(e^{j\frac{2\pi}{p^k}v_t^1}, e^{j\frac{2\pi}{p^k}v_t^2}, \ldots, e^{j\frac{2\pi}{p^k}v_t^n}\right)$$

são então transmitidos simultaneamente através das $n$ antenas transmissoras. Uma seqüência de blocos $(c_t^1, c_t^2, \ldots, c_t^n)$, para $t = 1, 2, \ldots, l$, compõe uma palavra código complexa $\mathbf{c}$ de um código espácio-temporal. No sistema espácio-temporal modelado por Tarokh *et al.* [1], o sinal recebido pela *j*-ésima antena receptora no instante de tempo $t$, $d_t^j$, é dado por

$$d_t^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} c_t^i \sqrt{E_s} + \eta_t^j, \qquad (1)$$

onde $c_t^i$ é o sinal transmitido pela $i$-ésima antena no instante de tempo $t$, $E_S$ é a energia média do sinal transmitido, $\eta_t^j$ é um ruído Gaussiano branco complexo de média zero com variância $N_0/2$ por dimensão, e $\alpha_{i,j}$ denota o desvanecimento presente no caminho entre a $i$-ésima antena transmissora e a $j$-ésima antena receptora. Sob a condição de desvanecimento Rayleigh, os coeficientes $\alpha_{i,j}$, para $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le m$, são modelados como amostras independentes de um processo aleatório Gaussiano complexo de média zero e variância 0.5 por dimensão. Na prática, para se alcançar desvanecimentos independentes as antenas devem estar separadas por alguns poucos comprimento de onda. Para o canal com desvanecimento plano e quase-estático, é assumido que os coeficientes do desvanecimento permanecem constantes durante um *frame* e muda independentemente de um *frame* para o outro. Também é assumido que o receptor conhece perfeitamente o estado do canal e que o algoritmo de Viterbi com métrica Euclidiana é usado na decodificação. Sob essas condições, a probabilidade de erro com relação ao par, denotada por $P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e})$, é definida como sendo a probabilidade de que um decodificador de máxima verossimilhança decida erroneamente em favor da palavra código complexa

$$\mathbf{e} = e_1^1 e_1^2 \cdots e_1^n e_2^1 e_2^2 \cdots e_2^n \cdots e_l^1 e_l^2 \cdots e_l^n$$

quando a palavra código correta é:

$$\mathbf{c} = c_1^1 c_1^2 \cdots c_1^n c_2^1 c_2^2 \cdots c_2^n \cdots c_l^1 c_l^2 \cdots c_l^n,$$

é limitada superiormente por [1]:

$$P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e}) \le \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^{-m} \left(\frac{E_s}{4N_0}\right)^{-rm}, \qquad (2)$$

onde $r$ é o posto da matriz diferença de palavras códigos complexas

$$B(\mathbf{c},\mathbf{e}) \triangleq \begin{pmatrix} e_1^1 - c_1^1 & e_2^1 - c_2^1 & \cdots & e_l^1 - c_l^1 \\ e_1^2 - c_1^2 & e_2^2 - c_2^2 & \cdots & e_l^2 - c_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1^n - c_1^n & e_2^n - c_2^n & \cdots & e_l^n - c_l^n \end{pmatrix},$$

$\lambda_i$, $i = 1, \ldots, r$, são os autovalores não nulos de $A(\mathbf{c},\mathbf{e}) \overset{\text{def}}{=} B(\mathbf{c},\mathbf{e})B(\mathbf{c},\mathbf{e})^H$ e $H$ denota o transposto conjugado.

Baseado na equação (2), Tarokh *et al.* [1] chegaram em dois critérios de projeto para o canal com desvanecimento Rayleigh plano e quase-estático, chamados,

- *O Critério do Posto:* Neste critério o parâmetro a ser maximizado é o posto mínimo $r$ da matriz $B(\mathbf{c},\mathbf{e})$, sobre todos os pares distintos de palavras códigos complexas $\mathbf{c}$ e $\mathbf{e}$. O ganho de diversidade é $rm \le nm$, com igualdade em condições de posto completo, ou seja, $r = n$.
- *O Critério do Determinante:* Para um dado ganho de diversidade $rm$, a meta deste critério é maximizar a média geométrica mínima dos autovalores não nulos da matriz

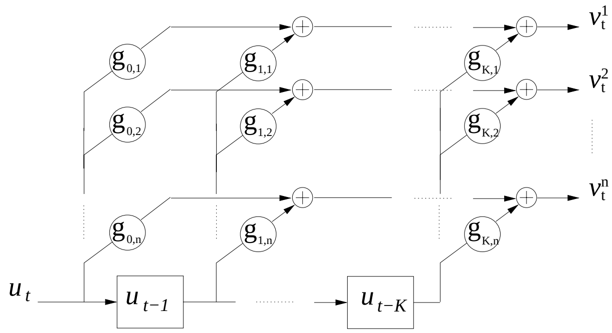

Fig. 2. Codificador convolucional sobre $Z_{p^k}$.

$A(\mathbf{c},\mathbf{e})$, $(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_r)^{\frac{1}{r}}$, sobre todos os pares distintos de palavras códigos complexas **c** e **e**. Isto representa o ganho de codificação.

Na próxima seção apresentaremos um resultado a partir do qual se pode obter STCCs sobre $Z_{p^k}$ para modulações $p^k$-PSK com diversidade completa para qualquer número de antenas transmissoras, fazendo apenas um simples teste de posto completo em uma matriz sobre GF($p$).

## III. Códigos Convolucionais Espácio-Temporais sobre $Z_{p^k}$

Seja $Z_{p^k}$ o anel de inteiros módulo $p^k$, onde $p$ é um número primo e $k$ é um inteiro positivo maior do que zero. Seja também $U(D) = u_0 + u_1D + u_2D^2 + \cdots$ o polinômio de informação sobre $Z_{p^k}$, representando uma seqüência de informação. Esta seqüência é codificada por um codificador convolucional sobre $Z_{p^k}$ de taxa $R = 1/n$, o qual é uma realização direta de um vetor gerador polinomial:

$$\mathbf{G}(D) = [G_1(D), G_2(D), \dots, G_n(D)],$$

produzindo o vetor codificado

$$\mathbf{V}(D) = U(D)\mathbf{G}(D) = \left[V^1(D), V^2(D), \dots, V^n(D)\right],$$

onde $V^i(D) = v_0^i + v_1^iD + v_2^iD^2 + \cdots + v_t^iD^t + \cdots$, para $i = 1, 2\dots, n$, são as $n$ seqüências codificadas. Os geradores do código são $G_i(D) = g_{0,i} + g_{1,i}D + g_{2,i}D^2 \cdots + g_{K,i}D^K$, para $i = 1, 2\dots, n$, onde $K$ é a memória do codificador. Um exemplo genérico de um codificador convolucional sobre $Z_{p^k}$ de taxa $R = 1/n$ pode ser visto na Figura 2. Neste codificador as operações de soma e multiplicação são realizadas módulo-$p^k$ e os símbolos de entrada, os coeficientes do codificador e os símbolos são elementos do anel $Z_{p^k}$ .

De acordo com os critérios do *posto* e do *determinante*, devemos procurar um STCC que tenha, acima de tudo, ganho de diversidade máximo e que, como um critério secundário, maximize o mínimo determinante de $A(\mathbf{c},\mathbf{e})$ com relação a todos os pares de palavras código **c** e **e**.

A seguir, definiremos duas matrizes que serão de grande importância para o projeto de STCCs com diversidade completa. A primeira será uma matriz geradora escalar **G** sobre $Z_{p^k}$ de ordem $n \times K+1$ formada pelos coeficientes do codificador da Figura 2:

$$\mathbf{G} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} g_{0,1} & g_{1,1} & \cdots & g_{K,1} \\ g_{0,2} & g_{1,2} & \cdots & g_{K,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{0,n} & g_{1,n} & \cdots & g_{K,n} \end{bmatrix}$$

onde $g_{k,i}$, para $k = 0, 1, \dots, K$ e $i = 1, 2, \dots, n$ são os coeficientes do codificador sobre $Z_{p^k}$ . A segunda matriz, **G'**, será definida como a matriz **G** reduzida módulo-$p$:

$$\mathbf{G}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G} \text{ (mod p)} = \begin{bmatrix} g'_{0,1} & g'_{1,1} & \cdots & g'_{K,1} \\ g'_{0,2} & g'_{1,2} & \cdots & g'_{K,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'_{0,n} & g'_{1,n} & \cdots & g'_{K,n} \end{bmatrix}$$

onde $g'_{k,i}$, para $k = 0, 1, \dots, K$ e $i = 1, 2, \dots, n$ são elementos de GF($p$).

Em [7], os autores provaram a conjectura proposta em [6] que estabelece que é possível garantir diversidade completa para um STCC sobre GF($p$), $p$ primo, desde que os coeficientes de seu respectivo codificador convolucional constituam uma matriz geradora escalar de posto completo sobre GF($p$). No próximo teorema, estendemos esse resultado para codificadores convolucionais lineares sobre $Z_{p^k}$ de taxa $R = 1/n$, com o intuito de utilizarmos modulações mais usuais como, por exemplo, QPSK e 8-PSK.

*Teorema 1:* Considere um codificador convolucional linear sobre $Z_{p^k}$ de taxa $R = 1/n$ com uma matriz geradora escalar **G**. Se a matriz **G** reduzida módulo-$p$, que será denotada por **G'**, tiver posto completo sobre GF($p$), então a matriz $B(\mathbf{c},\mathbf{e})$ terá posto completo sobre os complexos, com relação a todos os possíveis pares distintos de palavras códigos **c** e **e**. Portanto, o STCC associado a **G** atingirá o máximo ganho de diversidade.

*Comentário 1:* Note que para $k = 1$ o resultado apresentado em [6,7] se torna um caso particular do Teorema 1.

*Comentário 2:* A prova matemática do Teorema 1 ainda não está concluída no atual estado desta pesquisa. Ela terá como base um teorema apresentado por Massey e Mittelholzer em [8] sobre códigos convolucionais sobre o anel $Z_{p^k}$, que diz: "Um polinômio gerador $G(D)$ sobre o anel $Z_{p^k}$, onde $p$ é primo e $k$ é um inteiro positivo, é catastrófico se, e somente se, seus coeficientes polinomiais reduzidos módulo-$p$ resultarem em um polinômio gerador sobre GF($p$) também catastrófico". Para ilustrar este resultado, apresentaremos o seguinte exemplo:

*Exemplo 1:* Considere um sistema espácio-temporal com duas antenas transmissoras utilizando uma modulação 8-PSK e um codificador convolucional sobre $Z_8$ de taxa $R = 1/2$ mostrado na Figura 3. Seguindo as definições de **G** e **G'** tem-se as seguintes matrizes:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{G}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar facilmente que a matriz **G'** possui posto completo sobre GF(2) e, portanto, segundo o Teorema 1, o codificador da Figura 3 irá gerar um STCC sobre $Z_8$ para a modulação 8-PSK com ganho de diversidade máximo.

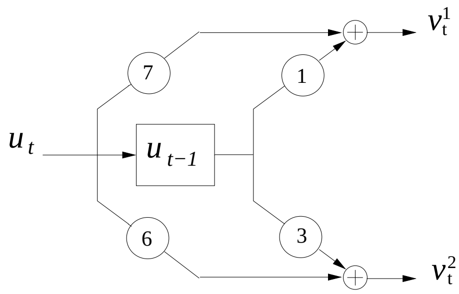


Fig. 3. Codificador convolucional sobre $Z_8$, $R = 1/2$.

TABELA I

STCCs PARA MODULAÇÕES $p^k$-PSK COM GANHO MÁXIMO DE DIVERSIDADE PARA $n = 2$ E $3$ ANTENAS TRANSMISSORAS

| $p^k$ | n | Eficiência Espectral | $K$ | Coeficientes não nulos do Codificador | Ganho de Codificação |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 2 | 1 | $g_{0,1} = 3$, $g_{1,1} = g_{0,2} = 2$ e $g_{1,2} = 1$ | 2 |
| | 3 | | 2 | $g_{0,1} = 2$ $g_{1,1} = g_{0,2} = 3$ e $g_{2,1} = g_{2,2} = g_{0,3} = g_{1,3} = g_{2,3} = 1$ | 2 |
| 8 | 2 | 3 | 1 | $g_{0,1} = 2$, $g_{1,1} = 7$, $g_{0,2} = 3$ e $g_{1,2} = 4$ | $1,41$ |
| | 3 | | 2 | $g_{0,1} = 7$, $g_{1,1} = 3$, $g_{1,2} = 2$ e $g_{0,2} = g_{2,2} = g_{0,3} = 1$ | $1,05$ |
| 9 | 2 | $3,17$ | 1 | $g_{1,1} = 7$, $g_{0,2} = 1$ e $g_{1,2} = 3$ | $0,88$ |
| | 3 | | 2 | $g_{0,1} = 7$, $g_{1,1} = 3$, $g_{2,2} = 4$ e $g_{2,1} = g_{0,2} = g_{1,2} = g_{0,3} = 1$ | $0,71$ |
| 16 | 2 | 4 | 1 | $g_{0,1} = 4$, $g_{1,1} = 13$ e $g_{0,2} = 1$ | $0,43$ |
| | 3 | | 2 | $g_{0,1} = 13$, $g_{1,1} = 11$, $g_{0,2} = 4$, $g_{1,2} = g_{1,3} = 1$, $g_{2,2} = 9$ e $g_{0,3} = 8$ | $0,59$ |

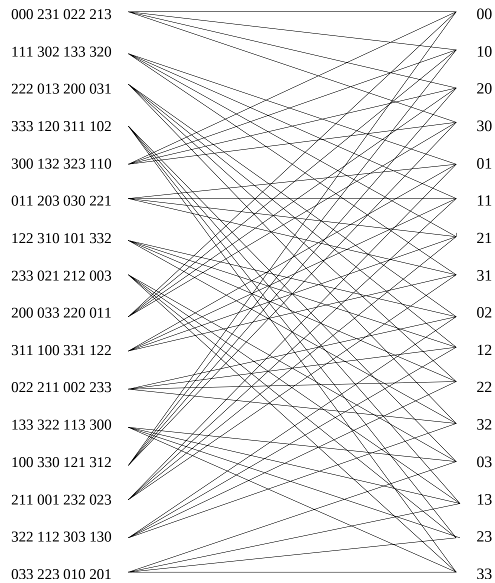


Fig. 4. Treliça do STCC para 4-PSK, 2 b/s/Hz, (codificador convolucional: $Z_4$, $R = 1/3$, $K = 2$).

## IV. RESULTADOS

Nesta seção, apresentaremos alguns STCCs com diversidade completa gerados por codificadores convolucionais lineares sobre $Z_{p^k}$ de taxa $R = 1/n$ utilizando as modulações QPSK, 8-PSK, 9-PSK e 16-PSK, para $n = 2$ e 3 antenas transmissoras e para codificadores com ordem de memória $K = 1$ e 2. Esses exemplos foram obtidos utilizando-se o Teorema 1 apresentado na seção anterior, onde foi necessário garantir apenas o posto completo da matriz **G'** sobre GF($p$). A Tabela I mostra o resultado desta busca.

Para os exemplos mais simples da Tabela I, como o caso dos códigos para QPSK e 8-PSK gerados por um codificador de memória unitária, fizemos uma busca exaustiva, variando os coeficientes do codificador por todos os possíveis elementos de $Z_4$ e $Z_8$, testando caso a caso o posto de **G'** sobre GF($p$) e calculando o ganho de codificação para os casos de posto completo. Nessa busca, obtivemos vários códigos com o mesmo ganho de codificação (2 e 1.41) e, para cada modulação, um desses códigos de ganho máximo foi escolhido arbitrariamente e incluído na Tabela I. Devido ao fato de a complexidade da busca computacional ter relação direta com o número de símbolos da constelação e com o grau de memória do codificador, os demais códigos foram obtidos através de uma busca aleatória, ou seja, escolhia-se os coeficientes do codificador de forma aleatória, testava-se o posto de **G'** sobre GF($p$) e, em caso de posto completo, calculava-se o ganho de codificação para o código. Note que a Tabela I não contempla o caso da modulação $p^k$-PSK com $k = 1$, pois esse caso foi apresentado em [6].

O fato de realizamos uma busca aleatória, nos limita a encontrarmos códigos com ganho de codificação que, provavelmente, não são ótimos, mas por enquanto nosso objetivo é mostrar que STCCs com diversidade completa podem ser obtidos garantindo apenas que a matriz **G'** tenha posto completo sobre GF($p$).

Um outro ponto para o qual devemos chamar a atenção é que as buscas realizadas neste trabalhos estão limitadas ao universo de STCCs gerados por codificadores convolucionais lineares e, portanto, mesmo que fizéssemos uma busca exaustiva para todos os casos apresentados anteriormente, correríamos o risco de descartar códigos não lineares com o mesmo ganho de diversidade porém com ganhos de codificação maiores. Há portanto um preço a ser pago pela simplificação da busca computacional.

Como ilustração, a Figura 4 mostra a treliça que descreve um STCC sobre $Z_4$ para a constelação 4-PSK com $n = 3$ antenas transmissoras, codificador com ordem de memória $K = 2$ e com eficiência espectral de 2 b/s/Hz. Nesta treliça, cada conjunto de símbolos do lado esquerdo representa o sinal transmitido através da primeira, da segunda e da terceira antenas transmissoras, respectivamente, e cada rótulo do lado direito indica o estado do codificador.

## V. CONCLUSÕES

Neste trabalho consideramos códigos espácio-temporais gerados por um codificador convolucional de taxa $R = 1/n$, linear sobre o anel $Z_{p^k}$, onde $p$ é primo e $k$ um inteiro positivo. Os códigos foram projetados para obter o melhor desempenho diante do canal com desvanecimeto Rayleigh plano e quase-estático, de acordo com os critérios do posto e do determinante propostos em [1]. Uma generalização para a conjectura proposta em [6] foi apresentada possibilitando assim, a obtenção de STCCs para modulações $p^k$-PSK com diversidade completa através de um simples teste de posto completo em uma matriz sobre GF($p$). Alguns STCCs com diversidade completa utilizando modulações QPSK, 8-PSK, 9-PSK e 16-PSK, para $n = 2$ e 3 antenas transmissoras foram apresentados, atingindo eficiências espectrais de 2, 3, 3.17 e 4 b/s/Hz, respectivamente.

## REFERÊNCIAS

[1] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. R. Calderbank,"Space-Time codes for high data rate wireless communication: performance criterion and code construction," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 744-765, Mar. 1998.

[2] J. Grimm, M. P. Fitz, and J. V. Krogmeier, "Further results in space-time coding for Rayleigh fading," in *Proc. 36th Allerton Conf. on Communications, Control and Computing*, Sept. 1998.

[3] A. R. Hammons, Jr. and H. El Gamal, "On the theory of space-time codes for PSK modulation," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 46, no. 2, pp. 524-542, Mar. 2000.

[4] Y. Liu, M. P. Fitz, and O. Y. Takeshita,"A rank criterion for QAM space-time codes," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 48, no. 12, pp. 3062-3079, Dec. 2002.

[5] R. S. Blum, " Some analytical tools for the design of space-time convolutional codes," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 50, no. 10, pp. 1593-1599, Oct. 2002.

[6] M. de Noronha-Neto e B. F. Uchôa-Filho, "Códigos convolucionais espaciotemporais sobre GF($p$) atingindo ganho de diversidade máximo para qualquer número de antenas transmissoras," em *Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBT 03)*, Rio de Janeiro, Brasil.

[7] M. de Noronha-Neto and B. F. Uchôa-Filho, "Space-time trellis codes over GF($p$) for $p$-PSK modulations," in *Proc. IEEE International Conference on Communications (ICC'04)*, Pariz, Franca.

[8] J. L. Massey and T. Mittelholzer, "Convolutional codes over rings," *Proc. 4th Joint Swedish-Soviet Int. Workshop on Inform. Th.*, Gotland, Sweeden, pp.14-18, Aug.27 - Sept.1, 1989.