

# Construção de *Frames* de Exponenciais Decrescentes para Algoritmos de Decomposição Adaptativa de Sinais

Lisandro Lovisoló<sup>1,2</sup>, Eduardo A. B. da Silva<sup>1</sup>, Paulo S. R. Diniz<sup>1</sup>

**Resumo**—Neste trabalho avaliamos a possibilidade de construção ou geração de *frames* de exponenciais decrescentes. Isto é feito tanto no contexto de sistemas de Gabor gerados a partir de deslocamentos e modulações de uma exponencial decrescente como no caso de *frames* de *wavelets* gerados a partir de dilatações e deslocamentos de uma exponencial decrescente. Mostramos que com a primeira abordagem é possível gerar *frames* enquanto com a segunda não. Entretanto, mostramos formas de combinar dilatação, deslocamento e modulação para gerar *frames* de exponenciais decrescentes.

**Palavras-Chave**—Senóides amortecidas, Dicionários, *Frames*, Decomposições adaptativas, Decomposições redundantes.

**Abstract**—In this work we evaluate the possibility of the construction or generation of decreasing exponential frames. This is done both for Gabor systems generated from translations and modulations of a decreasing exponential and for the case of wavelet frames generated through dilations and translations of a decreasing exponential. We show that for the first approach it is possible to generate frames whereas for the second it is not. However, we show how to combine scaling, translation and modulation in order to generate decreasing exponential frames.

**Keywords**—Damped sinusoids, Codebooks, *Frames*, Adaptive decompositions, Redundant decompositions.

## I. INTRODUÇÃO

Neste trabalho a geração de dicionários a partir exponenciais decrescentes é investigada, isto é estuda-se a possibilidade de representar sinais com senóides amortecidas. Deseja-se decompor sinais com uma combinação linear de elementos, estruturas ou componentes senoidais amortecidas. Assim sendo, um sinal  $x(t)$  será decomposto como

$$x(t) = \sum_k \alpha_k e^{-(\lambda_k + j\xi_k)(t-t_{0_k})} u(t-t_{0_k}). \quad (1)$$

Esta representação é similar à obtida com o método *Prony* no qual todas as componentes,  $e^{-(\lambda + j\xi)(t-t_0)}$ , iniciam no mesmo instante  $t_0$ , enquanto que, no modelo da eq. (1) cada componente  $g_k(t) = e^{-(\lambda_k + j\xi_k)(t-t_{0_k})} u(t-t_{0_k})$  possui seu próprio  $t_0$ . Esta representação é motivada também por estas componentes serem soluções de equações diferenciais, que estão bastante presentes na modelagem de sistemas físicos.

Um algoritmo capaz de obter tal representação é o *Matching Pursuits* [1], [2]. Diversas aplicações utilizam o modelo da eq. (1) no paradigma dos *Matching Pursuits* para decompor sinais

tanto para análise, compressão e filtragem. Goodwin realizou um estudo profundo desta abordagem para a decomposição de sinais de audio [3]. Em outros trabalhos esta abordagem foi utilizada na decomposição de sinais oscilográficos de redes de distribuição de energia elétrica [4]. O procedimento, de forma geral, é a decomposição adaptativa do sinal em termos de estruturas (pré-definidas) de um dicionário.

Um dos problemas deste procedimento é a necessidade de dispor de um dicionário coerente – no qual as estruturas que o compõem tenham sentido físico, ou seja, correspondam aos fenômenos presentes no sinal que se deseja decompor/analisar/comprimir. Além disso, para serem flexíveis e eficazes os dicionários deverão conter um número de estruturas tão grande ou maior que a quantidade de fenômenos que se deseja extrair do sinal sob estudo. Estes dicionários são denominados sobre-completos, isto é, que são capazes de representar qualquer ponto do espaço  $\mathbb{R}^N$ , mas com uma cardinalidade (número de elementos que compõem o dicionário)  $C \gg N$ , outra denominação é dicionário redundante. Na prática os parâmetros que geram os elementos destes dicionários têm frequentemente que ser amostrados. Assim duas importantes questões se colocam. A primeira seria como projetar dicionários  $\mathcal{D}$  para uma aplicação específica, ou seja, com características e estruturas desejadas. A segunda seria como amostrar os parâmetros dos dicionários de forma tal que o dicionário mantenha características úteis para decompor os sinais. Como será visto adiante estas questões estão relacionadas ao conceito de *frames* [2], [5], [6]. Assim, neste trabalho é investigada a geração de *frames* a partir de exponenciais decrescentes.

Na seção II relacionamos o modelo da eq. (1) às decomposições adaptativas de sinais, como podemos decompor um sinal conforme o modelo da eq. (1). Fazemos então uma breve revisão de alguns dos principais algoritmos existentes para obter representações adaptativas. Estes métodos utilizam dicionários, o que implica o conceito de *frames* que discutiremos na seção III, onde algumas abordagens para geração de *frames* a partir de uma função “mãe” serão citadas. Na seção III.B as três formas de gerar estes *frames* são apresentadas, os chamados *frames* de translações, os sistemas de Gabor e os *frames* de *wavelets*. Na seção IV veremos então como gerar *frames* a partir de uma função mãe que é exponencial decrescente. Veremos na seção IV.A que é possível gerar um sistema de Gabor a partir de uma exponencial, e na seção IV.B que não se pode gerar um *frame* de *wavelets* a partir de uma exponencial. Na seção IV.C veremos

como combinar sistemas de Gabor e dilatações de forma a obter um *frame*. Finalmente na seção V apresentamos como combinar dilatações, modulações e translações para gerar um *frame* a partir de qualquer sinal e demonstramos que a escala, na verdade, não interferirá nas propriedades que permitem a decomposição e reconstrução num *frame* (os *frame bounds*). Na seção VI apresentamos as nossas conclusões.

## II. DECOMPOSIÇÕES ADAPTATIVAS DE SINAIS

As decomposições adaptativas de sinais escolhem dentre os  $C$  elementos do dicionário um número  $K$  de elementos que melhor aproximam o sinal  $\mathbf{x}$ . Se  $\mathcal{D}$  é completo [1], [2], pode-se representar  $\mathbf{x}$  como uma combinação linear dos átomos  $g_{\gamma(n)}$ ,  $\mathbf{x} = \sum_{n=1}^K \alpha_n g_{\gamma(n)}$ . Ou na forma matricial

$$\Phi \alpha = \mathbf{x}, \quad (2)$$

onde as colunas de  $\Phi$  são os átomos/elementos que compõem o dicionário e  $\alpha$  são os  $\alpha_n$  correspondentes. O problema de encontrar uma decomposição para  $\mathbf{x}$  consiste em encontrar uma solução para a eq. (2).

Em muitos casos (compressão, filtragem, etc) ao invés de obter uma decomposição exata é suficiente uma aproximação

$$\mathbf{x} \approx \sum_n \alpha_n g_{\gamma(n)}. \quad (3)$$

Que é idêntica ao modelo da eq. (1). Chamando  $M$  o número de átomos utilizados para representar  $\mathbf{x}$ , e sendo  $N$  o comprimento do sinal poderemos ter:  $M < N$ ,  $M = N$  ou  $M > N$ . A seguir mencionamos alguns dos métodos capazes de obter representações conforme as equações (2) e (3).

### A. Métodos

1) *Matching Pursuits*: Os *Matching Pursuits* (**MP**) introduzidos por Mallat e Zhang [1], são um algoritmo de decomposição voraz e adaptativo [2], [7]–[10], que a cada passo escolhe o elemento do dicionário que melhor representa o sinal (aquele que possui maior produto interno, ou correlação, com o sinal). O elemento escolhido, chamado também de átomo ou estrutura, é então escalado e subtraído do sinal. Este processo é iterado até que um limiar de erro seja atingido. Desta forma o **MP** obtém aproximações sucessivas do sinal. Seja um dicionário  $\mathcal{D} = \{g_{\gamma}\}$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , ( $\gamma$  é um conjunto de parâmetros que definem  $g$  e  $\Gamma$  o conjunto de todos os possíveis  $\gamma$ ), tal que  $\|g_{\gamma}\| = 1$ . Para encontrar os coeficientes  $\alpha_n$  e os índices  $\gamma(n)$ , escolhe-se  $g_{\gamma(1)}$  tal que  $\alpha_1 = \langle \mathbf{x}, g_{\gamma(1)} \rangle = \max_{\gamma \in \Gamma} |\langle \mathbf{x}, g_{\gamma} \rangle|$ , e divide-se  $\mathbf{x}$  em duas partes, definindo o resíduo  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{x} - \alpha_1 g_{\gamma(1)}$ . Este passo é aplicado ao resíduo obtido, encontrando  $\alpha_2$ ,  $\gamma(2)$  e  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^2$ . Repetindo este procedimento pode-se obter todos os coeficientes  $\alpha_n$  e os correspondentes  $\gamma(n)$ , restando o resíduo  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^n$ .

2) *Método dos Frames*: Neste método [5] procura-se a solução que possua a norma  $l_2$  mínima. Isto é  $\min_{\Phi \alpha = \mathbf{x}} \|\alpha\|_2$ . Esta solução pode ser encontrada em um tempo  $O(n \log(n))$ . Porém a solução encontrada é uma média de todas as possíveis soluções [11], sendo assim a representação não é esparsa ou compacta (uma representação esparsa ou compacta é aquela

que obtem poucos coeficientes  $\alpha_n \neq 0$ ) e possui pouca capacidade de super-resolução (a capacidade de super-resolução implica em análise em diversas escalas e com maior resolução no tempo e na frequência que as ferramentas tradicionais de análise se sinais). Uma variante deste método utiliza a pseudo-inversa de  $\Phi$  para encontrar a solução [2].

3) *Melhor Base Ortonormal*: O *Best Ortho Basis* [10] utiliza um dicionário,  $\mathcal{D}$ , composto por uma vasta coleção de bases ortonormais,  $\mathcal{B}_I$ . Sendo  $\alpha_{\mathcal{B}_I}$  o vetor de coeficientes da expansão de  $\mathbf{x}$  na base  $\mathcal{B}_I$  e definindo uma entropia  $\varepsilon(\alpha_{\mathcal{B}_I})$  escolhe-se a base  $\mathcal{B}_I$  que acarreta entropia mínima, ou seja  $\min_{\mathcal{B}_I \in \mathcal{D}} \varepsilon(\alpha_{\mathcal{B}_I})$ . Impondo restrições à entropia  $\varepsilon$ , em [10] é apresentado um algoritmo rápido de ordem  $O(n \log(n))$  [11] para encontrar a solução, que normalmente fornece representações compactas. Porém, este método apresenta deficiências quando o sinal  $\mathbf{x}$  é composto de sinais não ortogonais. Devemos considerar, ainda, o fato de que a escolha de uma base e não de cada função, diminui a adaptabilidade da representação.

4) *Basis Pursuit*: Em [12] temos o método de *Basis Pursuit* (**BP**), baseado em otimização global. O **BP** assemelha-se ao método dos *frames* e busca a solução com menor norma  $l_1$ . Procura-se então uma solução  $\min_{\Phi \alpha = \mathbf{x}} \|\alpha\|_1$  [11], que só é possível graças a recentes avanços em programação linear.

5) *Otimização Massiva*: Para evitar a limitação dos métodos já apresentados, poderíamos ao invés de realizar uma aproximação por passos, realizar realmente uma otimização global para resolver a eq. (2). Nesta, todas as possíveis combinações lineares com  $M$  ou menos elementos de  $\mathcal{D}$  seriam geradas e comparadas ao sinal  $\mathbf{x}$ . Porém esta abordagem é impraticável devido à sua complexidade computacional.

### B. Aplicações

Aplicações destes métodos na decomposição, análise, filtragem e reconhecimento de padrões são bastante vastas. Indo desde aplicações em audio para análise e compressão, passando pela oscilografia de sistemas elétricos, sinais de sonar, até a análise de sinais de eletrocardiograma. Nas referências uma vasta gama de aplicações pode ser encontrada, sugerimos ver [2].

### C. Discussão

Para que qualquer um dos métodos acima seja capaz de representar sinais,  $\mathcal{D}$  deve ser completo. Como *frames* são completos, é interessante investigar suas características na geração de dicionários para aplicações baseadas em decomposições adaptativas de sinais. Esta é uma abordagem bastante comum, outra abordagem é via treinamento [13], [14]. Acreditamos que a primeira é a mais apropriada pois garante a possibilidade de representar qualquer sinal, apesar de poder não ser a melhor para compressão.

## III. FRAMES

Uma família contável de elementos  $\{g_k\}_{k \in \mathcal{I}}$  num espaço  $\mathbb{V}$  é um *frame* de  $\mathbb{V}$  se existem constantes  $A, B > 0$  tais que [2], [5], [6]

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathcal{I}} |\langle f, g_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathbb{V}. \quad (4)$$

$A$  e  $B$  são chamadas de *frame bounds*, e não são únicos. O *frame bound* inferior ótimo é o supremum de  $A$ , e o *frame bound* superior ótimo é infimum de  $B$  [6]. Se  $\|g_k\| = 1, \forall k \in \mathcal{I}$  diz-se que o *frame* está normalizado.

Em espaços vetoriais de dimensão finita  $N$  podemos considerar famílias finitas  $\{g_k\}_{k=1}^m$ , ao invés de infinitas ( $k \in \mathcal{I}$ ) como no caso do espaço contínuo. Nestes espaços vetoriais tem-se que a família de elementos  $\{g_k\}_{k=1}^m$  é um *frame* do espaço  $\mathbb{V}$  se e somente se  $\text{span}\{g_k\}_{k=1}^m = \mathbb{V}$  [6].

Quando  $A = B$  o *frame* é dito apertado (*tight*) e temos

$$\sum_{k=1}^C |\langle f, g_k \rangle|^2 = A \|f\|^2, \text{ e } f = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^C \langle f, g_k \rangle g_k, \quad \forall f \in \mathbb{V}. \quad (5)$$

onde  $C$  é o número de elementos, cardinalidade, do *frame*.

#### A. União de Frames

Se duas famílias  $g_k$  and  $h_l$  independentemente são *frames* de um mesmo espaço, então a união delas também será um *frame* desse espaço.

**Prova:** Das condições acima temos

$$A_g \|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathcal{I}_1} |\langle f, g_k \rangle|^2 \leq B_g \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathbb{V},$$

$$A_h \|f\|^2 \leq \sum_{l \in \mathcal{I}_2} |\langle f, h_l \rangle|^2 \leq B_h \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathbb{V}.$$

Então,  $\forall f \in \mathbb{V}$ :

$$(A_g + A_h) \|f\|^2 \leq \sum_{k \in \mathcal{I}_1} |\langle f, g_k \rangle|^2 + \sum_{l \in \mathcal{I}_2} |\langle f, h_l \rangle|^2 \leq (B_g + B_h) \|f\|^2 \quad (6)$$

Note que se duas famílias individualmente geram *frames* apertados com *frame bounds*  $A_g$  e  $A_h$  então a união das duas gerará um *frame* apertado com *frame bound*  $A_g + A_h$ .  $\square$

A seguir apresentamos alguns resultados relacionados à construção de *frame* a partir de um sinal arbitrário  $g(t)$ .

#### B. Geração de Frames

Para que um conjunto de funções  $g_k, k \in \{0, 1, \dots, K\}$  gere um espaço  $L^2(\mathbb{R})$ , o conjunto deverá constituir um *frame* de  $L^2(\mathbb{R})$ . Há diversas formas de construir *frames* para o espaço  $L^2(\mathbb{R})$ . Geralmente esta construção é realizada a partir de dilatações, translações e modulações de um sinal  $g(t)$  [6]:

$$\begin{aligned} \text{Translação de } a \in \mathbb{R}, & \quad (T_a g)(t) = g(t - a); \\ \text{Modulação por } b \in \mathbb{R}, & \quad (E_b g)(t) = g(t) e^{2\pi j b t}; \\ \text{Dilatação por } c \in \mathbb{R} - \{0\}, & \quad (D_c g)(t) = \frac{1}{\sqrt{c}} g\left(\frac{t}{c}\right). \end{aligned}$$

*Frames* no espaço  $L^2(\mathbb{R})$  podem ser construídos a partir de: **i** – translações de um sinal  $g(t)$  ([6] – teorema 7.2.3); **ii** – translações e modulações de  $g(t)$  quando então são chamados de *frames* de Gabor, sistemas de Gabor, ou *frames* de Fourier janelados ([6] – teorema 8.4.4); **iii** – dilatações e translações de  $g(t)$  ([6] – teorema 11.2.3) o que gera um *frame* de *wavelets*. Um *frame* só de translações não permite nem uma análise harmônica nem uma análise multi-resolução e por isso não os consideramos como uma possibilidade restringindo-nos neste trabalho à discussão de *frames* de Gabor e de *Wavelets*.

1) *Construção de Frames de Gabor*: Um *frame* de Gabor para  $L^2(\mathbb{R})$  é obtido a partir de  $(E_{mb} T_{na} g)(t)$ , onde  $a, b > 0$  e  $g(t)$  é fixo.

Parafraseando Christensen [6]: quais condições deve satisfazer  $g(t)$  para que a seqüência  $(E_{mb} T_{na} g)(t)$  ( $m, n \in \mathbb{Z}^2$ ) seja um *frame*? Dados  $a, b > 0$  e  $g(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , se  $\overline{g(t)}$  é o conjugado complexo de  $g(t)$ , então se [2], [5], [6]

$$B := \frac{1}{b} \sup_{t \in [0, a]} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(t - na) \overline{g(t - na - k/b)} \right| < \infty \text{ e} \quad (7)$$

$$A := \frac{1}{b} \inf_{t \in [0, a]} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(t - na)|^2 - \sum_{k \neq 0} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(t - na) \overline{g(t - na - k/b)} \right| \right] > 0, \quad (8)$$

$\{E_{mb} T_{na} g\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$  é um *frame* de  $L^2(\mathbb{R})$  com *frame bounds*  $A$  e  $B$  acima. Sendo esta uma condição suficiente. Outros resultados provam que para se ter um *frame* devemos ter  $ab \leq 1$  [6].

2) *Construção de Frames de Wavelets*: De forma semelhante, *frames* de *wavelets* são construídos a partir de dilatações e translações de um sinal  $g(t)$ . Suponha  $c > 1, b > 0$  e  $g(t) \in L^2(\mathbb{R})$  são dados. Sendo  $\hat{g}(\omega)$  a transformada de Fourier de  $g(t)$  ( $\mathcal{F}\{g(t)\}$ ), tem-se a seguinte condição necessária: se [2], [5], [6]

$$B := \frac{1}{b} \sup_{|\omega| \in [1, c]} \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(c^j \omega) \hat{g}(c^j \omega + k/b)| < \infty, \text{ e} \quad (9)$$

$$A := \frac{1}{b} \inf_{|\omega| \in [1, c]} \left[ \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(c^j \omega)|^2 - \sum_{k \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(c^j \omega) \hat{g}(c^j \omega + k/b)| \right] > 0 \quad (10)$$

$\{T_{kbc^j} D_{c^j} g\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$  é um *frame* de  $L^2(\mathbb{R})$  com *frame bounds*  $A, B$ .

#### IV. FRAMES DE EXPONENCIAIS DECRESCENTES

Desejamos gerar *frames* a partir de exponenciais decrescentes, ou seja, a partir da função

$$g(t) = e^{-\lambda t} u(t), \quad \lambda > 0. \quad (11)$$

##### A. Frames de Gabor de Exponenciais Decrescentes

Dado o sinal da eq. (11) quais as condições sobre  $a$  e  $b$  que satisfazem as eq. (7) e (8)? Aplicando a função  $g(t)$  definida na eq. 11 obtém-se (ver Apêndice)

$$B := \frac{1}{b} \sup_{t \in [0, a]} \frac{e^{-3\lambda t}}{1 - e^{-\lambda/b}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda 2na} e^{\lambda \lfloor abn \rfloor / b} < \infty, \quad (12)$$

$$A := \frac{1}{b} \inf_{t \in [0, a]} \left[ \frac{2e^{-2\lambda t}}{1 - e^{-2\lambda a}} - \frac{e^{-3\lambda t}}{1 - e^{-\lambda/b}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda 2na} e^{\lambda \lfloor abn \rfloor / b} \right] > 0. \quad (13)$$

**Exemplo 1** – Suponha  $\lambda = 1$  (por simplicidade),  $a = .1$  e  $b = .1$ , então  $ab = .01$ . Para calcular os *frame bounds* de um *frame*  $(E_{0.1m}T_{0.1n}g)(t) = e^{-(t-0.1n)}e^{2\pi j0.1mt}$ , é só computar os valores numéricos das expressões (12) e (13). Se os valores de  $A$  e  $B$  obtidos forem tais que  $B \geq A$  tem-se um *frame*. Temos

$$B := 10 \sup_{t \in [0,0.1]} \frac{e^{-3t}}{1 - e^{-10}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-0.2n} e^{10[0.01n]} < \infty, \quad (14)$$

$$A := 10 \inf_{t \in [0,0.1]} \left[ \frac{2e^{-2t}}{1 - e^{-0.2}} - \frac{e^{-3t}}{1 - e^{-10}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-0.2n} e^{10[0.01n]} \right] > 0. \quad (15)$$

Como  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-0.2n} e^{10[0.01n]} \approx 5.5169$  teremos  $B \approx 55.172 \sup_{t \in [0,0.1]} e^{-3t}$  e  $A \approx 10 \inf_{t \in [0,0.1]} [11.0333e^{-2t} - 5.5172e^{-3t}]$ . Note que o sup em  $t$  de  $B$  ocorre para  $t = 0$ , e o inf em  $t$  de  $A$ , neste caso, ocorre em  $t = a$ , com o que teremos os *frame bounds* estimados  $B \approx 55.172 > A \approx 9.461$ .  $\square$

### B. Frames de Wavelets de Exponenciais Decrescentes

Vimos como gerar sistemas de *Gabor* de exponenciais decrescentes vejamos, agora, a possibilidade de gerar *frames* de *wavelets* de exponenciais decrescentes. Nas equações (9) e (10) foi apresentada a condição suficiente, sobre a transformada de *Fourier* de  $g(t)$ , para poder construir um *frame* de *wavelets*. Com  $g(t) = e^{-\lambda t}u(t)$  esta condição se torna  $(\mathcal{F} e^{-\lambda t}u(t)) = \frac{1}{\lambda + j\omega}$

$$B := \frac{1}{b} \sup_{|\omega| \in [1,c]} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{\lambda + j(c^j\omega)} \frac{1}{\lambda + j(c^j\omega + k/b)} \right| < \infty, \quad e$$

$$A := \frac{1}{b} \inf_{|\omega| \in [1,c]} \left[ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{\lambda + j(c^j\omega)} \right|^2 - \sum_{k \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{\lambda + j(c^j\omega)} \frac{1}{\lambda + j(c^j\omega + k/b)} \right| \right] > 0.$$

Após algumas operações simples e fazendo  $\omega' = (c^j\omega + k/b)$  temos

$$B := \frac{1}{b} \sup_{|\omega| \in [1,c]} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2 + (c^j\omega)^2)(\lambda^2 + \omega'^2)}} < \infty, \quad e$$

$$A := \frac{1}{b} \inf_{|\omega| \in [1,c]} \left[ 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\lambda^2 + (c^j\omega)^2} - \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2 + (c^j\omega)^2)(\lambda^2 + \omega'^2)}} \right] > 0,$$

Com o que vemos que não se pode construir um *frame* de *Wavelets* de exponenciais decrescentes pois  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\lambda^2 + (c^j\omega)^2}$  não converge já que  $\lim_{j \rightarrow -\infty} \frac{1}{\lambda^2 + (c^j\omega)^2} = \frac{1}{\lambda^2}$ .

### C. Dilatação em Sistemas de Gabor de Exponenciais Decrescentes

Apesar de *frames* de *wavelets* de exponenciais decrescentes não poderem ser construídos, ainda assim é possível combinar dilatação, modulação e translação de uma exponencial

decrecente de forma a gerar um *frame*. Conforme vimos concatenações de *frames* geram um *frame*. Logo, podemos gerar seqüências de sistemas de *Gabor* de exponenciais decrescentes dilatadas com constantes de decaimentos sucessivas  $\lambda_j = \lambda_0^{-j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  que chamaremos de  $\mathcal{G}_{\lambda_0,j}$ .

Se  $\lambda_0 > 1$  teremos um sistema de *Gabor*, com a função  $g(t)$  seqüencialmente dilatada de  $\lambda_0$ . Se  $\lambda_0 < 1$  teremos um sistema de *Gabor*, com a função  $g(t)$  seqüencialmente contraída de  $\lambda_0$ . Note que  $\lambda_0 = 1$  não trará nenhuma propriedade de dilatação ou contração, assim sendo utilizaremos  $\lambda_0 \neq 1$ . Para cada família  $\mathcal{G}_{\lambda_0,j}$  os *frame bounds* podem ser obtidos de

$$B_j := \frac{1}{b} \sup_{t \in [0,a]} \frac{e^{-3\lambda_0^{-j}t}}{1 - e^{-\lambda_0^{-j}/b}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_0^{-j}2na} e^{\lambda_0^{-j}[abn]/b} < \infty,$$

$$A_j := \frac{1}{b} \inf_{t \in [0,a]} \left[ \frac{2e^{-2\lambda_0^{-j}t}}{1 - e^{-2\lambda_0^{-j}/b}} - \frac{e^{-3\lambda_0^{-j}t}}{1 - e^{-\lambda_0^{-j}/b}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_0^{-j}2na} e^{\lambda_0^{-j}[abn]/b} \right] > 0$$

A prática comum, em análise multi-resolução, é quanto maior for a escala maior será o fator de translação  $a$  e menor será o fator de modulação  $b$ . Podemos então, em cada escala  $j$ , considerar  $a_j = a\lambda_0^j$  e  $b_j = b\lambda_0^{-j}$ . Isto gerará famílias de *frames* tais que

$$B_j := \frac{1}{b_j} \sup_{t \in [0,a_j]} \frac{e^{-3\lambda_0^{-j}t}}{1 - e^{-\lambda_0^{-j}/b_j}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_0^{-j}2na_j} e^{\lambda_0^{-j}[a_j b_j n]/b_j} < \infty,$$

$$A_j := \frac{1}{b_j} \inf_{t \in [0,a_j]} \left[ \frac{2e^{-2\lambda_0^{-j}t}}{1 - e^{-2\lambda_0^{-j}/b_j}} - \frac{e^{-3\lambda_0^{-j}t}}{1 - e^{-\lambda_0^{-j}/b_j}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_0^{-j}2na_j} e^{\lambda_0^{-j}[a_j b_j n]/b_j} \right] > 0.$$

Note que  $a_j$  e  $b_j$  serão os fatores de translação e modulação de *frames* sucessivos e  $a_j b_j = ab$  e teremos

$$B_j := \frac{\lambda_0^j}{b} \frac{1}{1 - e^{-1/b}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2na} e^{[abn]/b} < \infty, \quad (16)$$

$$A_j := \frac{\lambda_0^j}{b} \inf_{t \in [0,a]} \left[ \frac{2e^{-2t}}{1 - e^{-2a}} - \frac{e^{-3t}}{1 - e^{-1/b}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2na} e^{[abn]/b} \right] > 0. \quad (17)$$

Desta forma vemos que os *frames* gerados por cada família possuem os mesmos *frame bounds* que os da família mãe obtidos com  $\lambda_0$ , multiplicados por  $\lambda_0^j$ . Isto é, se para um dado conjunto  $(\lambda_0, a, b)$  na "escala um" ( $j = 1$ ) podemos obter um *frame* de exponenciais decrescentes um *frame* poderá ser obtido para todo conjunto  $(\lambda_0^{-j}, a\lambda_0^j, b\lambda_0^{-j})$ .

**Exemplo 2** – Suponha  $ab = 1$  (por simplicidade) e  $\lambda = 1/2$ , neste caso para um *frame* construído através da abordagem desta seção (a partir de dilatações, translações e modulações)

teremos em cada escala  $j$

$$B_j := \frac{1}{b2^j} \frac{1}{(1 - e^{-1/b})^2} < \infty,$$

$$A_j := \frac{1}{b2^j} \inf_{t \in [0, a]} \left[ \frac{2e^{-2t}}{1 - e^{-2a}} - \frac{e^{-3t}}{(1 - e^{-1/b})^2} \right] > 0$$

$$B_j := \frac{1}{b2^j} \frac{1}{(1 - e^{-a})^2} < \infty,$$

$$A_j := \frac{1}{b2^j(1 - e^{-a})} \inf_{t \in [0, a]} \left[ \frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-a}} - \frac{e^{-3t}}{1 - e^{-a}} \right] > 0$$

O inf de  $A_j$  ocorrerá em  $t = 0$ , logo

$$B_j := \frac{1}{b2^j} \frac{1}{(1 - e^{-a})^2} < \infty, \quad (18)$$

$$A_j := \frac{1 - 3e^{-a}}{b2^j(1 - e^{-2a})(1 - e^{-a})} > 0 \quad (19)$$

Repare que sempre obteremos  $\infty > B_j > A_j > 0$ , o que restringirá a obtenção de um *frame* será a condição  $A_j > 0$ . A união de um seqüência de *frames* gerará um *frame* com  $A$  e  $B$  a seguir (usando o resultado da eq. (7))

$$B \geq \sum_{j=0}^{\infty} B_j = \frac{1}{b(1 - e^{-a})^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j},$$

$$A \leq \sum_{j=0}^{\infty} A_j = \frac{1 - 3e^{-a}}{b(1 - e^{-2a})(1 - e^{-a})} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}.$$

Logo,

$$B \geq \sum_{j=0}^{\infty} B_j = \frac{2a}{(1 - e^{-a})^2}, \quad (20)$$

$$A \leq \sum_{j=0}^{\infty} A_j = \frac{2a(1 - 3e^{-a})}{(1 - e^{-2a})(1 - e^{-a})}. \quad (21)$$

Repare que

$$\frac{B_j}{A_j} = \frac{B}{A} \leq \frac{1 + e^{-a}}{1 - 3e^{-a}}, \quad (22)$$

teremos assim, a geração de um *frame* para  $a > 1, 1$  (aproximadamente) e quanto maior  $a$  mais apertado será o *frame*, veja figura 1.  $\square$

## V. CONSTRUINDO FRAMES DE DILATAÇÕES, TRANSLAÇÕES E MODULAÇÕES

Motivado pela abordagem acima, vemos que se pode construir um *frame* a partir de uma seqüência de operações  $\{E_{mbc^{-j}} T_{nac^j} D_{c^j} g\}_{m, n \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}_+^*}$ . A equivalência entre um *frame* gerado a partir de uma função  $g(t)$  e de uma função dilatada da mesma é apresentada em [6], como  $D_c E_{mb} T_{na} = E_{mb/c} T_{nac} D_c$ , teremos os mesmos *frame bounds*. Desta forma em cada escala  $j$  (que é sempre positiva e diferente de zero) teremos os *frame bounds*  $B_j = B$  e  $A_j = A$ , iguais aos das equações (7) e (8). Ou seja, dados  $a$  e  $b$  que geram um sistema de Gabor para uma função  $g(t)$  com *frame bounds*  $B$  e  $A$  uma versão dilatada de  $g(t)$  gerará um sistema de Gabor válido para os mesmos  $a$  e  $b$  com os mesmos  $B$  e  $A$ .

Veja que se  $j$  for até o infinito não poderemos gerar então um *frame* a partir da união dos *frames* em escalas inferiores.

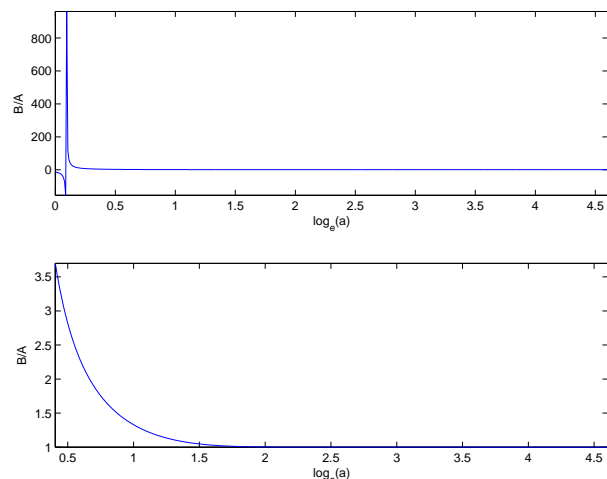


Fig. 1.  $\frac{B}{A}$  em função de  $a$  para o exemplo 2.

Entretanto, se pensamos em um espaço de funções limitadas em banda (no qual os *frames* foram primeiro propostos por Duffin e Schaeffer [15]) não são necessárias escalas infinitas e teremos  $1 \leq j < J$ , ou seja,  $J$  escalas. Com isto teremos para os *frames* gerados a partir da união destas  $J$  escalas

$$B \geq \sum_{j=0}^J B_j = JB_j \quad e \quad A \leq \sum_{j=0}^J A_j = JA_j.$$

Repare que a diferença desta abordagem genérica em relação à desenvolvida na seção IV.C reside em que na desta seção todos os elementos gerados por dilatações, translações e modulações de  $g(t)$  terão a mesma norma por isso o limite para  $j$ . Note que na abordagem da seção IV.C a convergência de  $A$  e  $B$  era garantida pela divisão da norma por  $\lambda_0$  a cada nova escala. Enquanto a abordagem da seção IV.C parece fornecer um resultado melhor, a desta (seção V), é a com maior viabilidade prática, pois a maioria dos algoritmos de decomposição adaptativa trabalham com dicionários onde as normas dos elementos são constantes e não pouco frequentemente normalizadas.

## VI. CONCLUSÕES E DIREÇÕES FUTURAS

Investigamos neste trabalho a geração de *frames* de exponenciais decrescentes geradas por sistemas de Gabor e *wavelets*. Vimos que o primeiro esquema gera *frames* enquanto o segundo é incapaz de fazê-lo.

Entretanto, mostramos que é possível combinar as duas abordagens de forma a gerar *frames* não só de exponenciais decrescentes como para qualquer sinal. Basta para isso usar um número limitado de escalas que poderá ser tão grande quanto se queira.

No momento estamos investigando a amostragem dos elementos dos *frames* assim constituídos de forma a poder gerar *frames* em espaços discretos e aplica-los nos algoritmos de decomposição adaptativa de sinais.

## APÊNDICE

Como  $g(t) = e^{-\lambda t} u(t)$  possui suporte lateral direito, é real e positiva definida, e  $t \in [0, a]$  (para o cálculo efetivo de

$A$  e  $B$ ), considerando ainda que  $g(t - na) = e^{-\lambda(t-na)}$  e  $g(t + na - k/b) = e^{-\lambda(t+na-k/b)}$ , e utilizando o fato que  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\lambda na} = \frac{1}{1 - e^{-2\lambda a}}$  se  $\lambda na > 0$  (o que é o caso), chega-se, a partir das eq. (7) e (8), a

$$B := \frac{1}{b} \sup_{t \in [0, a]} e^{-2\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\lambda(2na-k/b)} u(t') < \infty,$$

$$A := \frac{1}{b} \inf_{t \in [0, a]} \left[ \frac{2e^{-2\lambda t}}{1 - e^{-2\lambda a}} - e^{-2\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\lambda(2na-k/b)} u(t') \right] > 0,$$

onde  $t' = t + na - k/b$ .

Observe que se  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\lambda(2na-k/b)} u(t') < \infty$  (é limitado), para  $\lambda$ ,  $a$  e  $b$  dados, podemos gerar um *frame*, bastando obter  $B \geq A$ . Manipulando o segundo somatório e realizando a troca de variáveis apropriada

$$B := \frac{1}{b} \sup_{t \in [0, a]} e^{-2\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda 2na} \sum_{k \leq abn} e^{\lambda(k/b-t)} < \infty,$$

$$A := \frac{1}{b} \inf_{t \in [0, a]} \left[ \frac{2e^{-2\lambda t}}{1 - e^{-2\lambda a}} - e^{-2\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda 2na} \sum_{k \leq abn} e^{\lambda(k/b-t)} \right] > 0.$$

Logo, se

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda 2na} \sum_{k \leq abn} e^{\lambda(k/b-t)} < \infty \quad (23)$$

há a possibilidade de gerar um *frame* de senóides amortecidas para  $\lambda$ ,  $a$  e  $b$  dados.

Note que  $\sum_{k \leq abn} e^{\lambda(k/b-t)} = e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda|abn|/b}}{1 - e^{-\lambda/b}}$ , e teremos

$$B := \frac{1}{b} \sup_{t \in [0, a]} \frac{e^{-3\lambda t}}{1 - e^{-\lambda/b}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda 2na} e^{\lambda|abn|/b} < \infty,$$

$$A := \frac{1}{b} \inf_{t \in [0, a]} \left[ \frac{2e^{-2\lambda t}}{1 - e^{-2\lambda a}} - \frac{e^{-3\lambda t}}{1 - e^{-\lambda/b}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda 2na} e^{\lambda|abn|/b} \right] > 0.$$

#### REFERÊNCIAS

- [1] S. Mallat and Z. Zhang, "Matching pursuits with time-frequency dictionaries," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 12, pp. 3397–3415, December 1993.
- [2] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, San Diego, California, USA, 1998.
- [3] M. M. Goodwin and M. Vetterli, "Matching pursuits and atomic signal models based on recursive filters banks," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 7, pp. 1890–1902, July 1999.
- [4] L. Lovisolo, E. A. B. da Silva, M. A. M. Rodrigues, and P. S. R. Diniz, "Coherent decompositions of power systems signals using damped sinusoids with applications to denoising," in *IEEE International Symposium on Circuit and Systems*, Scottsdale, Arizona, USA, May 2002, vol. V, pp. 685–688.

- [5] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, USA, 1991.
- [6] Ole Christensen, *An Introduction To Frames And Riesz Bases*, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1 edition, 2002.
- [7] G. Davis, S. Mallat, and Z. Zhang, "Adaptive time-frequency approximations with matching pursuits," in *Technical Report*, Courant Institute of Mathematical Sciences, Computer Science Department, New York University, 251 Mercer Street, New York, NY 10012, USA, 1999.
- [8] D. L. Donoho, M. Vetterli, R. A. DeVore, and I. Daubechies, "Data compression and harmonic analysis," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 6, pp. 2435–2476, October 1998.
- [9] V. K. Goyal, M. Vetterli, and N. T. Thao, "Quantized overcomplete expansions in  $\mathbb{R}^N$ : Analysis, synthesis, and algorithms," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 1, pp. 16–31, January 1998.
- [10] R. R. Coifman and M. V. Wickerhauser, "Entropy-based algorithms for best-basis selection," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 38, pp. 713–718, 1992.
- [11] S. Chen and D. Donoho, "Basis pursuit," in *Proceedings of the 28<sup>th</sup> Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, September 1994, vol. 1, pp. 41–44.
- [12] Shaobing Chen, David Donoho, and Michael Saunders, "Basis pursuit," in <http://www-stat.stanford.edu/~donoho/Reports/1995/30401.ps.Z>, 1995, Department of Statistics, Stanford University.
- [13] Kjersti Engan, Sven Ole Aase, and John Hakon Husoy, "Designing frames for matching pursuits algorithms," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Seattle, USA, May 1998, IEEE.
- [14] R. Neff and A. Zakhor, "Very low bit-rate video coding based on matching pursuits," *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, vol. 7, pp. 158–171, February 1997.
- [15] T. J. Duffin and A. C. Schaeffer, "A class of nonharmonic fourier series," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 72, pp. 341–366, 1952.