

# Construção de códigos de treliça para o canal aditivo com dois usuários binários

Maria de Lourdes Melo Guedes Alcoforado e Valdemar Cardoso da Rocha Jr.

**Resumo**—Este artigo apresenta uma técnica de construção de códigos de treliça para o canal aditivo com dois usuários binários (2-BAC). Um par de códigos de bloco (unicamente decodificáveis para o 2-BAC) é usado como um filtro para eliminar caminhos através da treliça que levariam a ambigüidade no decodificador. Esta abordagem, além de possibilitar a decodificação eficiente de tais códigos, não limita a taxa de transmissão para o 2-BAC.

**Palavras-Chave**—Códigos de treliça, canal aditivo com dois usuários binários, códigos de bloco, 2-BAC.

**Abstract**—This paper presents a coding scheme for the 2-user binary adder channel (2-BAC) based on a pair of trellis codes and on a pair of short block codes uniquely decodable on the 2-BAC. This coding scheme allows efficient decoding and does not limit the achievable rates, therefore allowing capacity to be achieved in the 2-BAC.

**Keywords**—Trellis codes, 2-user binary adder channel, block codes, 2-BAC.

## I. INTRODUÇÃO

O modelo de canal de acesso múltiplo mais simples existente é o canal aditivo com dois usuários binários (2-BAC) [1]. Este canal é do tipo sem memória e aceita em cada unidade de tempo duas entradas binárias, uma de cada usuário. Os símbolos binários emitidos por cada usuário serão supostos equiprováveis. No caso sem ruído, a saída do canal  $y$  é a soma aritmética das entradas  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente e os símbolos na saída deste canal pertencem ao alfabeto  $\{0, 1, 2\}$ , enquanto no caso ruidoso a saída do canal é descrita pela distribuição de probabilidade condicional  $P(y|x_1x_2)$ .

A região de capacidade para o 2-BAC foi determinada independentemente por Ahlswede [2], Liao [3] e Slepian e Wolf [4], e desde então surgiram muitos artigos com o propósito de construção de códigos para o 2-BAC [5]-[9]. Estes trabalhos, contudo, tratam apenas do uso de códigos de blocos. Com exceção de um artigo de Peterson e Costello [10], que tratou da construção de códigos convolucionais para o 2-BAC, não são conhecidos outros trabalhos relativos a este assunto. A ausência de artigos neste assunto pode ser devida em parte aos resultados apresentados em [10], pois seus autores demonstraram que a taxa máxima obtida com códigos lineares para o 2-BAC não poderia ser maior que 1. Como códigos convolucionais são códigos lineares, não houve então interesse do uso destes para o 2-BAC.

Maria de Lourdes Melo Guedes Alcoforado e Valdemar Cardoso da Rocha Jr., Grupo de Pesquisas em Comunicações - CODEC, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, Caixa Postal 7800, Brasil, E-mails: mllmga@ee.ufpe.br, vcr@ufpe.br. Os autores agradecem pelo apoio parcial recebido da CAPES e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, Projeto 304214/77-9, respectivamente.

Uma abordagem usando propriedades de distância de códigos de bloco lineares para a construção de códigos para o 2-BAC foi proposta em [5] e [6]. O objetivo principal na construção de códigos para o 2-BAC tem sido o de alcançar altas taxas de transmissão. O problema da decodificação eficiente não tem sido explorado e esta talvez seja a maior dificuldade para o uso prático do 2-BAC. Neste artigo nós apresentamos uma construção de códigos para o 2-BAC combinando um único código convolucional com um par  $(C_1, C_2)$  de códigos de bloco unicamente decodificáveis para o 2-BAC. A estrutura resultante provê um código de treliça para cada usuário, que quando combinadas originam uma *treliça para dois usuários*. Uma vantagem significativa no uso de códigos de treliça para dois usuários é que as técnicas de decodificação usadas para o caso com um único usuário, como a decodificação de Viterbi e o algoritmo BCJR [14], se aplicam diretamente para o caso com dois usuários [10]. Além do mais, esta nova técnica não restringe a taxa máxima que pode ser alcançada para o 2-BAC e possibilita o uso de códigos turbo [11], [17], [18].

Um grande avanço teórico na codificação para canais de acesso múltiplo começou com Rimoldi, Urbanke [15], [16]. Em [16] os autores mostram que em um canal discreto sem memória, com no máximo  $2M - 1$  entradas virtuais, qualquer ponto na região de capacidade de um canal de acesso múltiplo com  $M$  usuários e assíncrono pode ser alcançado por uma técnica chamada *rate-splitting multiple accessing (RSMA)*. Implementações específicas sobre esta construção ainda não são conhecidas.

Na *Seção II* revemos a construção de treliça para o 2-BAC como apresentada em [10]. Na *Seção III* apresentamos a construção de códigos de treliça para o 2-BAC baseada em um par de códigos convolucionais e um par  $(C_1, C_2)$  de códigos de bloco unicamente decodificáveis para o 2-BAC. A *seção IV* conclui o artigo.

## II. TRELIÇA PARA O 2-BAC

No que segue vamos supor que cada um dos dois usuários do 2-BAC dispõe de um código com estrutura em treliça, cujos detalhes de construção serão apresentados na *Seção III*.

A seguir descreveremos a construção de Peterson e Costello [10] de uma treliça para o 2-BAC, que denominaremos de *treliça para dois usuários*, a partir das treliças individuais de cada usuário. Vamos supor que as treliças de cada usuário são iniciadas num mesmo instante de tempo e que consideraremos pares de ramos (um ramo de cada treliça) que ocorrem em um mesmo intervalo de tempo. Ao estado  $s_i$ , na treliça do usuário 1, e ao estado  $s_k$ , na treliça do usuário 2, associamos o estado

denotado por  $s_i s_k$ , na treliça para dois usuários. Cada par de ramos, ocorrendo em um mesmo intervalo de tempo, através das respectivas treliças de dois usuários, são associados a um único ramo na treliça para dois usuários. Dito de outra forma, se o ramo correspondente ao usuário 1 segue do estado  $s_i$  para o estado  $s_j$ , e o ramo correspondente ao usuário 2 segue do estado  $s_k$  para o estado  $s_l$ , então na treliça para dois usuários corresponde um único ramo seguindo do estado  $s_i s_k$  para o estado  $s_j s_l$ . Se a treliça de cada usuário tem respectivamente  $L_1$  e  $L_2$  estados, a treliça para dois usuários terá  $L_1 L_2$  estados. Ilustremos o conceito de treliça para dois usuários através de um exemplo.

*Exemplo 1:* Vamos supor uma situação hipotética, apenas para ilustrar a construção da treliça para dois usuários, na qual um mesmo código convolucional é usado por cada usuário do 2-BAC. Seja  $C$  o código convolucional recursivo sistemático com taxa  $1/2$  e matriz geradora polinomial:

$$G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1+D} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Como o código tem apenas um elemento de memória, a treliça de cada usuário vai possuir 2 estados, i.e.  $L_1 = L_2 = 2$ , e a treliça para dois usuários terá  $L_1 L_2 = 4$  estados como pode ser visto na Figura 1.

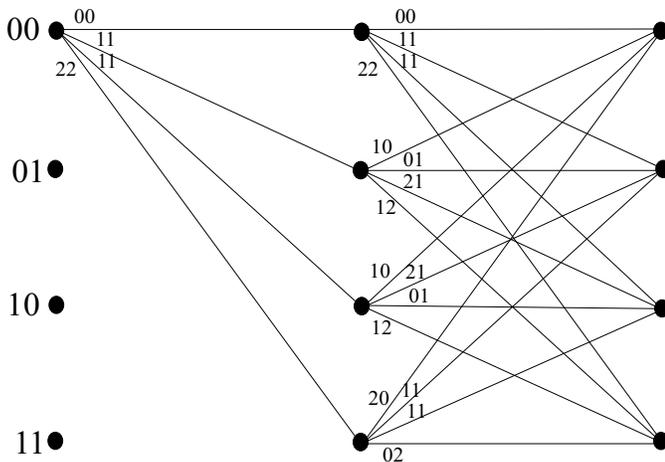


Fig. 1. Treliça para dois usuários em que, para cada usuário, é usado um mesmo código convolucional com matriz geradora  $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1+D} \end{bmatrix}$ .

### III. CÓDIGO DE TRELIÇA PARA O 2-BAC

Seja  $n$  o comprimento do sub-bloco e seja  $k$  o número de dígitos de informação por sub-bloco de um código convolucional  $C$  recursivo e sistemático, com memória  $m$  [12, p.303-308], e seja  $(C_1, C_2)$  um par de códigos de bloco unicamente decodificáveis para o 2-BAC.

O código para o usuário 1 é construído a partir de  $C$  e de  $C_1$  do seguinte modo. O usuário 1 envia suas mensagens para o codificador de  $C_1$ , e as palavras código resultantes de  $C_1$  são enviadas como mensagens para o codificador de  $C$ . Desta forma o usuário 1 estará se servindo de um dicionário contendo um subconjunto das palavras código de  $C$ , escolhidas

de acordo com as “mensagens” alimentadas por  $C_1$  ao codificador de  $C$ . A codificação para o usuário 2 é semelhante, empregando o código  $C$  e o código  $C_2$ . Conseqüentemente, o usuário 2 estará se servindo de um dicionário contendo um subconjunto das palavras código de  $C$ , escolhidas de acordo com as “mensagens” alimentadas por  $C_2$  ao codificador de  $C$ .

Essencialmente a operação de codificação desempenhada por cada usuário é uma concatenação em série dos seus respectivos códigos de bloco com o código  $C$ , conforme ilustrado na Figura 2.

Como  $C$  é sistemático, a soma aritmética bit a bit das palavras código de  $C$  produzidas pelo usuário 1 e pelo usuário 2, respectivamente, é unicamente decodificável. Esta afirmação procede porque o par  $(C_1, C_2)$  é unicamente decodificável para o 2-BAC e a soma aritmética das palavras-código de  $C_1$  e  $C_2$  aparecem na seção de informação da soma aritmética das palavras código de  $C$ .

O uso dos códigos  $C_1$  e  $C_2$  leva à eliminação de alguns ramos e, algumas vezes, leva à eliminação de alguns estados na treliça para dois usuários. Em outras palavras, serão eliminados caminhos através da treliça do código convolucional empregado, evitando assim problemas de ambigüidade na decodificação.

Se a taxa do par  $(C_1, C_2)$  é  $R$  segue da nossa construção que  $R_C = R(k/n)$  é a taxa do código construído para o 2-BAC. Portanto, se  $C$  for escolhido para ser um código com taxa aproximadamente igual a 1,  $R_C$  terá um valor muito próximo a  $R$ . Isto significa que se  $R$  alcançar o valor máximo da taxa de transmissão (capacidade) para o 2-BAC, então  $R_C$  também alcançará este valor.

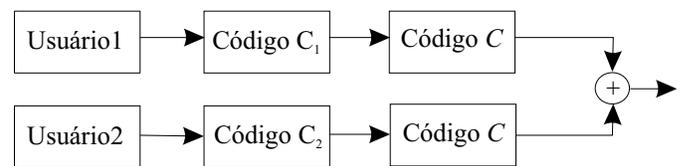


Fig. 2. Modelo de construção de código unicamente decodificável para o 2-BAC.

*Exemplo 2:* Considere que  $C$  é o código convolucional recursivo utilizado no Exemplo 1 e que  $C_1 = \{00, 11\}$  e  $C_2 = \{00, 01, 10\}$ . A treliça resultante da concatenação em série de  $C$  e de  $C_1$  está ilustrada na Figura 3. A treliça resultante da concatenação de  $C$  e de  $C_2$  está ilustrada na Figura 4. A treliça resultante para dois usuários está ilustrada na Figura 5.

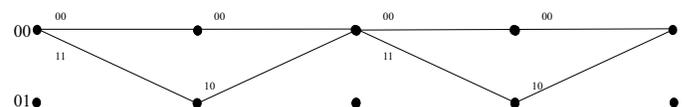


Fig. 3. Treliça resultante da concatenação de  $C$  e  $C_1$  (código do usuário 1).

Verificamos, nas Figuras 3 e 4, que vários ramos na treliça (completa) de  $C$  foram eliminados, assim como também foram eliminados alguns estados. O código para o 2-BAC assim construído é unicamente decodificável com taxa  $0,645$ .

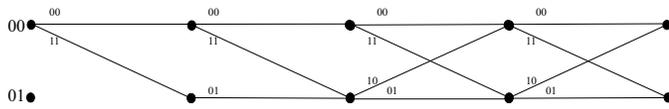
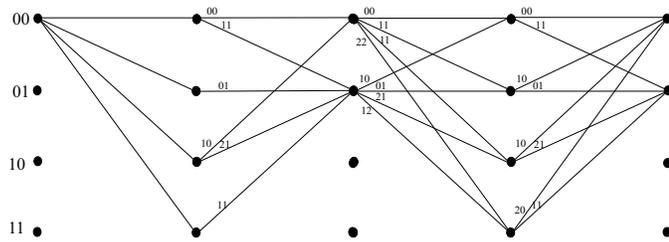
Fig. 4. Treliça resultante da concatenação de  $C$  e  $C_2$  (código do usuário 2).

Fig. 5. Treliça resultante para dois usuários

#### IV. CONCLUSÃO

Uma construção de códigos de treliça para o 2-BAC baseada em um único código convolucional foi apresentada. O uso de um par de códigos de bloco (unicamente decodificáveis para o 2-BAC) elimina caminhos através da treliça do código convolucional empregado, dando origem efetivamente a um código de treliça não-linear, evitando assim problemas de ambigüidade na decodificação. Esta abordagem em princípio não limita a taxa resultante para o 2-BAC.

Como comentário final ressaltamos que a baixa taxa obtida no *Exemplo 2* foi resultado principalmente da taxa  $1/2$  do código convolucional empregado. Apenas para ilustração, se utilizarmos o código  $C$  sistemático com taxa  $4/5$  e os mesmos códigos  $C_1 = \{00, 11\}$  e  $C_2 = \{00, 01, 10\}$  a taxa resultante para o 2-BAC será  $1,032$ . O valor da taxa maior que 1 é explicado pois, apesar de estarmos utilizando códigos convolucionais na construção proposta, o uso dos códigos  $C_1$  e  $C_2$  elimina ramos nas treliças levando a códigos de treliça não lineares.

#### REFERÊNCIAS

- [1] T. Kasami and Shu Lin, "Coding for a multiple-access channel", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, v. IT-22, Number 2, p.129-137, Março 1976.
- [2] R. Ahlswede, "Multi-way communications channels", 2nd Int. Symp. on Information Transmission, USSR, 1971.
- [3] H.H.J. Liao, "Multiple access channels", Ph.D. Dissertation, Dep. Elec. Eng., Univ. of Hawaii, Honolulu, 1972.
- [4] D. Slepian and J. K. Wolf, "A coding theorem for multiple-access channels", *Bell Syst. Tech. J.*, v. 51, p. 1037-1076, 1973.
- [5] J.L. Massey, "On codes for the two-user binary adder channel", Oberwolfach Information Theory Workshop, Germany, April 1992.
- [6] V.C. da Rocha, Jr. and J. L. Massey, "A new approach to the design of codes for the binary adder channel", in *Cryptography and Coding III*, (Ed. M.J. Ganley), IMA Conf. Series, New Series Number 45. Oxford: Clarendon Press, p. 179-185, 1993.
- [7] H.A. Cabral and V. C. da Rocha, Jr., "Linear code construction for the 2-user binary adder channel", *IEEE Int. Symp. on Info. Theory*, Whistler, Canada, p. 497, 1995.
- [8] R. Ahlswede and V. B. Balakirsky, "Construction of uniquely decodable codes for the two-user binary adder channel", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, v. 45, Number 1, p. 326-330, January 1999.
- [9] G. H. Khachatrian, "A survey of coding methods for the adder channel", dedicated to Rudolph Ahlswede on the occasion of his 60th birthday. Private communication, 2000.
- [10] R. Peterson and D.J. Costello, Jr., "Binary convolutional codes for a multiple-access channel", *IEEE Trans. on Info. Theory*, v. 25, Number 1, p.101-105, January 1979.

- [11] M.L.M.G. Alcoforado, "Codificação iterativa (turbo-codes) para o canal aditivo com dois usuários binários". Tese de doutorado (em andamento). Depto. de Eletrônica e Sistemas, UFPE.
- [12] S. Lin and D. Costello Jr., *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1983.
- [13] R. Urbanke and Quinn Li, "The zero-error capacity region of the 2-user synchronous BAC is strictly smaller than its Shannon capacity", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, aceito para publicação, 2001.
- [14] L.R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek and J. Raviv, "Optimal Decoding of Linear Codes for Minimizing Symbol Error rate", *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. IT-20, p.284-287, March 1974.
- [15] B. Rimoldi and R. L. Urbanke "A Rate-splitting approach to the Gaussian multiple-access channel", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, v. 42, Number 2, p.364-375, March 1996.
- [16] A. J. Grant, B. Rimoldi, R. L. Urbanke and P. A. Whiting "Rate-splitting multiple access for discrete memoryless channels", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, v. 47, Number 3, p.873-890, March 2001.
- [17] V.C. da Rocha Jr. and M.L.M.G. Alcoforado, "Trellis code construction for the 2-user binary adder channel", to appear in the Proceedings of 11<sup>th</sup> International Conference on Telecommunications, 1-5 August 2004, Fortaleza, Ceará, Brazil, Editors J. Neuman and P. Dini, Springer Verlag.
- [18] V.C. da Rocha Jr. and M.L.M.G. Alcoforado, "Uniquely Decodable Trellis Codes for the 2-User Binary Adder Channel", to appear in the Proceedings of The 2004 International Symposium on Information Theory and its Applications, 10-13 October 2004, Parma, Italy.