

Detecção de Pontos Fiduciais sobre a Face em Tempo Real

Felipe M. L. Ribeiro, Gabriel M. Araujo, Eduardo A. B. da Silva, José F. L. de Oliveira, Siome K. Goldenstein

Resumo—Recentemente, o problema de detecção e rastreamento de características faciais tem recebido considerável atenção. Neste trabalho é apresentado um arcabouço para a detecção de pontos fiduciais faciais. Este arcabouço é composto por três partes permutáveis, nomeadamente pré-processamento, classificação e pós-processamento. Na etapa de classificação, foi utilizada uma cascata de classificadores baseados em filtros de correlação chamados IPD (*Inner Product Detector*). O sistema resultante é capaz de reconhecer pontos fiduciais faciais em diferentes indivíduos em tempo real, sob várias condições de iluminação. Detalhes como o treino do detector utilizado, validação e uso também são discutidos.

Palavras-Chave—Visão Computacional, Detecção de Objetos, Rastreamento de Vídeo, Rastreamento de Faces.

Abstract—Recently, considerable attention has been given to the problem of robust detection and tracking of facial features. In this work, a framework for facial landmarks detection is presented. This framework is comprised by three interchangeable parts, namely preprocessing, classification and post-processing. In the classification stage, we used a cascade of classifiers based on correlation filters called IPD (*Inner Product Detector*). The resulting system is able to recognize facial landmarks on different subjects in real-time, under various lighting conditions. Details such as training of the detector employed, validation and usage are also discussed.

Keywords—Computer Vision, Object Detection, Video Tracking, Face Tracking.

I. INTRODUÇÃO

Recentemente, o problema de detecção e rastreamento de características faciais de forma robusta tem recebido considerável atenção. Isso se deve, principalmente, ao seu uso em diversas aplicações, como sistemas de segurança, realidade aumentada e sistemas de reconhecimento de face.

Pontos fiduciais são pontos de controle sobre um objeto que definem regiões características com propriedades interessantes à detecção. No caso da face, características faciais.

Neste trabalho, é apresentado um sistema de detecção de pontos fiduciais sobre a face utilizando um conjunto de detectores baseados em produto interno IPD (*Inner Product Detector*) [1]. O sistema implementado é capaz de detectar um conjunto de pontos fiduciais sobre a face em tempo real, sendo robusto a variações de iluminação, translações e pequenas rotações.

Felipe M. L. Ribeiro¹, Gabriel M. Araujo^{1,2}, Eduardo A. B. da Silva¹, José F. L. de Oliveira¹, Siome K. Goldenstein³, ¹PEE/COPPE/DEL/POLI, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Cx. P. 68504, Rio de Janeiro, RJ, 21945-970, Brasil. ²Centro Federal de Educação Tecnológica, Nova Iguaçu, RJ, 26041-271, Brasil. ³IC, Universidade Estadual de Campinas, Cx. P. 6176, Campinas, SP, 13084-971, Brasil. E-mails: felipe.ribeiro@lps.ufrj.br, gmatos@lps.ufrj.br, eduardo@lps.ufrj.br, jleite@lps.ufrj.br, siome@ic.unicamp.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq.

Para este trabalho foram selecionados 13 pontos sobre a face (Fig. 1). Os pontos foram escolhidos por estarem localizados em regiões de interesse ou por terem sido utilizados em trabalhos anteriores.

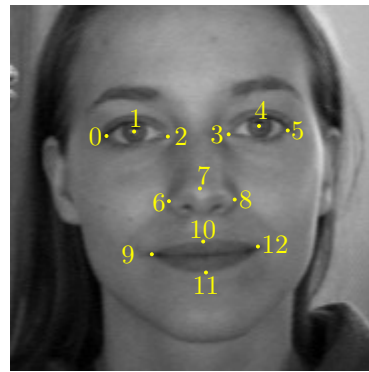


Fig. 1. Pontos fiduciais utilizados sobrepostos em uma das imagens da base de dados utilizada, a BioID [2]

Este trabalho possui duas contribuições principais em relação ao trabalho em [1]. A primeira consiste em modificações na etapa de treinamento do IPD que permitem definir alguns parâmetros da cascata de detectores de maneira mais objetiva. Esta nova abordagem contribuiu para a redução da complexidade computacional do treinamento e da detecção, viabilizando o uso do sistema em tempo real. A segunda contribuição foi a implementação do sistema em formato modular, que possibilita a utilização de outros tipos de detectores, desde que a saída da etapa de detecção apresente uma nuvem de pontos candidatos. O sistema foi implementado em C++ com auxílio da biblioteca OpenCV [3].

II. DETECÇÃO POR PRODUTO INTERNO

Na etapa de classificação são utilizados detectores conhecidos como IPD - *Inner Product Detector* [1]. Estes detectores são baseados em filtros de correlação. Filtros de correlação realizam a classificação através da correlação cruzada entre o filtro e uma amostra desconhecida no domínio da frequência. Maior a correlação entre a amostra e o padrão desejado, maior o valor escalar resultante. Esta técnica tem como vantagem a robustez a pequenas variações do padrão a ser detectado. Os detectores IPD são definidos a seguir.

Seja uma variável aleatória d -dimensional \mathbf{Y} com realizações y associadas a uma classe \mathbf{A}_n , $n = 1, \dots, N$. O objetivo é gerar um classificador $\mathbf{h}_{\mathbf{A}_n}$, ótimo no sentido dos mínimos quadrados, que satisfaça a seguinte regra de classificação para a classe \mathbf{A}_n :

$$\begin{cases} \mathbf{h}_{\mathbf{A}_n}^t \mathbf{y} = 1, & \text{se } \mathbf{y} \in \mathbf{A}_n, \\ \mathbf{h}_{\mathbf{A}_n}^t \mathbf{y} = 0, & \text{se } \mathbf{y} \notin \mathbf{A}_n. \end{cases} \quad (1)$$

O detector $\mathbf{h}_{\mathbf{A}_n}$ pode ser definido como,

$$\mathbf{h}_{\mathbf{A}_n} = \left(\sum_{i=1}^N p(\mathbf{A}_i) \mathbf{R}_{\mathbf{A}_i} \right)^{-1} p(\mathbf{A}_n) \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}_n}, \quad (2)$$

onde $p(\mathbf{A}_n)$ é a probabilidade de uma realização de \mathbf{Y} pertencer à classe \mathbf{A}_n , $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}_n}$ é a média das amostras da classe \mathbf{A}_n e $\mathbf{R}_{\mathbf{A}_n}$ a autocorrelação das amostras de \mathbf{A}_n . Para mais detalhes sobre o IPD, veja [1] e [4].

Entretanto, o funcionamento adequado do IPD impõe classes ortogonais, o que não ocorre na prática. Como consequência, o classificador gerado é pouco correlacionado com o classificador ideal, ou seja, o IPD é um classificador fraco (*weak classifier*) [5]. Para superar esse problema, os classificadores IPD são organizados em cascata de forma a obter um classificador forte (*strong classifier*) [5]. A saída desta cascata é um conjunto de pontos candidatos.

III. DETECÇÃO DE PONTOS FIDUCIAIS FACIAIS

O arcabouço implementado é dividido em módulos, permitindo a adaptação para diferentes aplicações. O sistema pode ser dividido em três etapas principais: pré-processamento; cascata de detectores IPD; e pós-processamento. O diagrama de blocos é apresentado na Fig. 2.

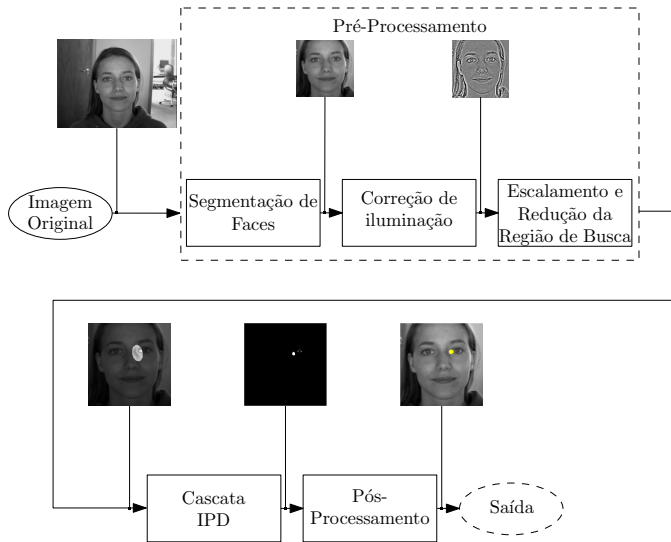


Fig. 2. Estrutura do sistema implementado.

A. Pré-processamento

Nesta etapa são realizadas as operações necessárias para conformar a imagem de entrada ao sistema. Pode ser dividida em três partes.

Na primeira delas a face é segmentada a partir da imagem original através do algoritmo Viola-Jones [6], [7]. A imagem segmentada é então redimensionada para o tamanho padrão do sistema, 200×200 .

Em seguida é aplicado um processo de normalização de iluminação, usando a técnica descrita em [8]. Esta técnica tem como objetivo mitigar os efeitos da variação de iluminação e limitar a faixa dinâmica dos píxeis, sem afetar características interessantes para o processo de detecção. A normalização de iluminação, por sua vez, é composta por correção de gama, filtragem de diferença de gaussianas (*DoG*), e normalização por contraste.

Na última parte são definidas as regiões de busca dos pontos fiduciais. Seja a posição do ponto fiducial uma variável aleatória bidimensional \mathbf{X} e um conjunto de treinamento que contenha M realizações \mathbf{x}_m de \mathbf{X} . Considerando um modelo de distribuição gaussiano, determinamos uma região elíptica com grande probabilidade de se encontrar o ponto fiducial. Esta região é delimitada pela amostra do conjunto de treinamento que maximiza a distância de Mahalanobis [1]:

$$r_{\max} = 1.05 \max_{\mathbf{x}_m} \left[\sqrt{(\mathbf{x}_m - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})^t \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{x}_m - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})} \right]. \quad (3)$$

Onde $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$ e $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}$ são, respectivamente, média e covariância das posições das marcações manuais, obtidas a partir do conjunto de treinamento.

Definida a região de interesse para cada ponto (ROI - *Region of Interest*), os pontos são testados segundo a Equação (4):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m \in \mathbf{P}_d &\iff \sqrt{(\mathbf{x}_m - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})^t \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{x}_m - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})} \leq r_{\max} \\ &\wedge \max(|x_{1_m}|, |x_{2_m}|) \leq \frac{\sqrt{d} + H}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

onde \mathbf{x}_n é o ponto testado, x_{1_m} e x_{2_m} suas coordenadas, H o tamanho da imagem escalada e \mathbf{P}_d o conjunto de pontos pertencentes à ROI.

Desta forma são descartados todos os pontos que não pertencem à ROI ou que pertençam a borda da imagem, impossibilitando a centralização do bloco d -dimensional. Como as imagens das faces segmentadas são escaladas para o mesmo tamanho, o conjunto gerado de pontos é fixo e independente da imagem, podendo ser definido *offline*.

B. Cascata de detectores

Para cada ponto fiducial, um conjunto de detectores em cascata é utilizado para realizar a detecção. Seja c o produto interno entre uma amostra \mathbf{y} e o detector $\mathbf{h}_{\mathbf{A}_n}$. Como as realizações \mathbf{y} são vetores reais, os valores obtidos de c não são limitados aos valores 0 e 1, já que as classes não são necessariamente ortogonais entre si. Para superar este problema, os valores de c são dados pelo cosseno do ângulo entre os vetores \mathbf{y} e $\mathbf{h}_{\mathbf{A}_n}$:

$$c = \cos(\phi) = \frac{\mathbf{h}_{\mathbf{A}_n}^t \mathbf{y}}{\|\mathbf{h}_{\mathbf{A}_n}\| \|\mathbf{y}\|}. \quad (5)$$

Dado que o escalar $c \in [-1, 1]$, definimos um limiar θ tal que:

$$\begin{cases} c \geq \theta, & \text{se } \mathbf{y} \in \mathbf{A}_n \\ c < \theta, & \text{se } \mathbf{y} \notin \mathbf{A}_n, \end{cases} \quad (6)$$

onde o detector $\mathbf{h}_{\mathbf{A}_n}$ e o limiar θ são obtidos a partir do processo de treinamento descrito na Seção IV.

Os pontos classificados negativamente são descartados. Pontos classificados positivamente são avaliados pelo próximo detector da cascata. Este processo é descrito na Fig. 3.

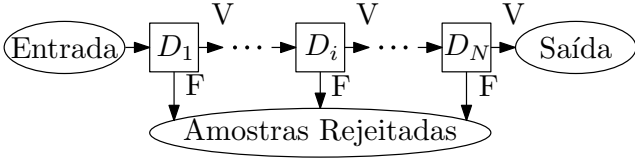


Fig. 3. Processo de detecção

C. Pós-processamento

Para cada ponto fiducial, temos como saída da detecção um conjunto P_{out} com $M_{P_{out}}$ pontos classificados positivamente. É necessário então selecionar um ponto representante deste conjunto como saída. Para este fim, três métodos de pós-processamento foram avaliados.

No primeiro método, é escolhido o ponto da nuvem que possui o maior valor de produto interno. No segundo método, a saída do detector é a média dos pontos da nuvem. Já no terceiro método, a saída é a mediana vetorial [9] dos pontos da nuvem.

Os métodos de pós-processamento empregados são avaliados na Seção V.

IV. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

A. Base de Dados

A BioID [2] é uma base de dados que possui 1.521 imagens de 23 indivíduos em pose frontal, com variações de iluminação, plano de fundo e escala das faces. As imagens estão em níveis de cinza no formato PGM e tamanho 384×286 .

Deste conjunto de imagens foram selecionadas 503 imagens, excluindo-se imagens que possuíam grandes rotações e indivíduos portando óculos, barba ou bigode. Apesar de fornecidas anotações manuais para 20 pontos fiduciais sobre a face, e anotações separadas para a posição dos olhos, foram refeitas as anotações para os 13 pontos utilizados.

B. Treinamento dos Detectores

Definida a ROI, os pontos das imagens de treinamento são separados em duas classes segundo a marcação manual:

- Classe A_1 : Marcação manual e todos os pontos vizinhos diretos de um pixel (vizinhança 8-conectada [10]);
- Classe A_2 : Todos os outros pontos pertencentes à ROI.

Para cada ponto x é centrado um bloco $l \times l$. Empilhando-se as colunas do bloco obtêm-se as amostras d -dimensionais $y(x)$ correspondentes, onde $d = l^2$. Dessa forma, a partir da Equação (2) é obtido o detector h_{A_n} para o ponto fiducial correspondente.

Valores menores de d reduzem o volume de informações. Valores maiores produzem aumento da complexidade computacional e problemas de condicionamento [11]. Para um bom compromisso foi adotado $l = 13$, ou seja, $d = 169$.

Dado o detector h_{A_n} , os produtos internos c do mesmo com amostras de treinamento formam o conjunto C . Deste conjunto é selecionada, para cada imagem, o maior produto interno do detector com uma amostra da classe A_1 . Este processo define o conjunto $C'_{A_1} = \{c_{\max_1}, c_{\max_2}, \dots, c_{\max_K}\}$, onde $c_{\max_k} = \max(c \in C_{I_k \cap A_1})$, e I_k é uma imagem do conjunto de treinamento, $k = \{1, \dots, K\}$.

Para o conjunto C'_{A_1} existe um valor θ tal que uma percentagem arbitrária de seus elementos seja classificada positivamente. Ou seja, sendo

$$T(\theta) = \{c \in C'_{A_1} : c < \theta\}, \quad (7)$$

existe $\theta \in [-1, 1]$ tal que

$$\#(T(\theta)) = \lfloor (1 - q)\#(C'_{A_1}) \rfloor, \quad (8)$$

onde $\#(\bullet)$ é a cardinalidade do conjunto (número de elementos) e q é um valor no intervalo $[0, 1]$ que define a percentagem desejada de elementos classificados positivamente.

Valores próximos de 1 para q geram valores baixos para θ , classificando uma maior parcela de pontos positivos para as próximas etapas, e também uma maior quantidade de falsos positivos. Para um bom compromisso, foi utilizado $q = 0.98$, ou seja, 98% das amostras positivas são classificadas corretamente.

O valor obtido de θ é então utilizado para classificar todos os produtos internos calculados anteriormente. Amostras classificadas negativamente ($\theta > c$) são descartadas.

O detector h_{A_n} e o limiar θ são salvos e o conjunto de pontos classificados positivamente é utilizado para treinar o próximo detector. Este processo é repetido sucessivamente, criando assim a cascata. Dessa forma, podemos rejeitar grande quantidade de amostras negativas nos primeiros estágios, permitindo aos estágios subsequentes se concentrarem nas amostras mais difíceis. Esse processo é ilustrado pela Fig. 4.

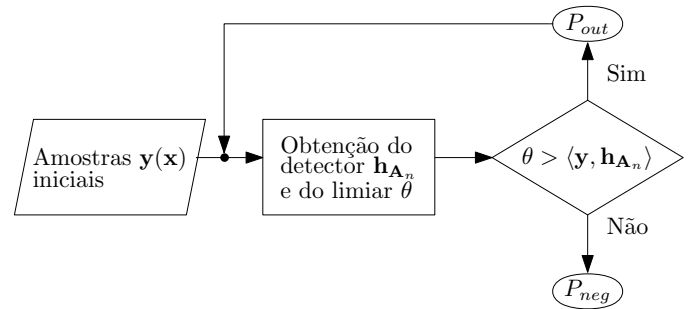


Fig. 4. Processo de geração dos detectores

Novos estágios são adicionados na cascata até que um dos critérios de parada seja satisfeito. Dois critérios foram utilizados. O primeiro critério restringe o tamanho máximo da cascata considerando a taxa de acerto Q da associação em série dos detectores como

$$Q = \prod_{i=1}^L q_i, \quad (9)$$

onde q_i é a taxa de acerto do i -ésimo detector e L o tamanho da cascata.

Considerando a taxa de acerto q_i igual a q para todos os detectores, o tamanho máximo da cascata pode ser calculado como

$$L_{\max} = \frac{\log(Q_{\min})}{\log(q)}. \quad (10)$$

Neste trabalho foram escolhidos $Q_{\min} = 0.90$ e $q = 0.98$, limitando o tamanho máximo da cascata para $L_{\max} = 5$.

O segundo critério considera o custo de adicionar um novo detector à cascata. Ao adicionar um novo detector espera-se um aumento no número de amostras negativas descartadas. Se o número de pontos eliminados não compensa o aumento da complexidade computacional com a adição de um novo detector, o processo é interrompido e o último detector descartado. Neste projeto, se o número de pontos descartados P_{neg} for menor que o número de imagens \mathbf{I} este critério é satisfeito, ou seja

$$\#(P_{neg}) < \#(\mathbf{I}). \quad (11)$$

Este critério permite a interrupção prematura do processo de geração de detectores, reduzindo o tempo de treinamento e a complexidade computacional da operação de detecção.

V. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para avaliação estatística dos resultados, foi utilizada a técnica de validação cruzada por k -folds, com $k = 7$ [12]. Então o conjunto de 503 imagens da base de dados BioID foi particionado em 7 subconjuntos de mesmo tamanho. Dessa forma, o subconjunto n é utilizado como conjunto de testes e os restantes como conjuntos de treinamento, para $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$. Este processo é repetido até que todos os subconjuntos tenham sido utilizados como teste.

A. Métrica de Avaliação

Para avaliar o desempenho do sistema foi escolhida como métrica a distância entre os rótulos manuais e os rótulos automáticos obtidos. Essa distância é expressa como um percentual da distância das marcações das pupilas. Dessa forma, obtêm-se uma medida padronizada do erro, invariante a escala. Considerando as marcações \mathbf{p}_l e \mathbf{p}_r das pupilas esquerda e direita, respectivamente, e a medida de erro d_{pf} é dada por:

$$d_{pf} = \frac{\|\mathbf{p}_f - \hat{\mathbf{p}}_f\|}{\|\mathbf{p}_l - \mathbf{p}_r\|} \quad (12)$$

onde \mathbf{p}_f é a marcação manual e $\hat{\mathbf{p}}_f$, a posição estimada. Para os rótulos automáticos, menos que 5% da distância interocular é considerável aceitável.

B. Resultados da Simulação

Na Tabela I são apresentadas as taxas médias de acerto obtidas considerando 5% da distância interocular. Os valores obtidos são calculados a partir da média e desvio padrão dos resultados dos folds. Os pontos dos olhos e nariz foram aqueles com os melhores resultados. A queda de desempenho para os pontos da região da boca tem como possível razão a grande variabilidade desses pontos.

TABELA I

TAXA PERCENTUAL DE ACERTO POR MÉTODO DE PÓS-PROCESSAMENTO

Ponto	Maior IPD	Media	Mediana
00	85 ± 3	86 ± 4	94 ± 3
01	96 ± 3	94 ± 3	97 ± 2
02	90 ± 4	75 ± 6	91 ± 3
03	94 ± 3	89 ± 3	96 ± 2
04	94 ± 3	94 ± 3	96 ± 3
05	90 ± 5	74 ± 4	95 ± 2
06	89 ± 5	59 ± 9	89 ± 4
07	79 ± 2	12 ± 3	34 ± 4
08	85 ± 5	60 ± 7	91 ± 3
09	78 ± 7	59 ± 5	87 ± 3
10	54 ± 7	21 ± 4	46 ± 5
11	34 ± 11	08 ± 5	04 ± 2
12	68 ± 9	14 ± 17	59 ± 13

Dentre os métodos de pós-processamento, os métodos de escolha do ponto com máximo produto interno e do ponto mediano foram os que obtiveram o melhor desempenho.

Devido as restrições de espaço serão apresentados a seguir nas figuras 5 e 6, resultados detalhados apenas para o ponto 0, correspondente ao canto externo do olho esquerdo.

Na Fig. 5 são apresentadas, para a cascata, as taxas de acerto acumuladas de cada método de pós-processamento, em relação à distância interocular. Observa-se uma pequena melhora com o relaxamento do critério de avaliação, principalmente para os métodos baseados em correlação espacial. Contudo, para valores maiores que 5% da distância interocular, não ocorrem grandes mudanças.

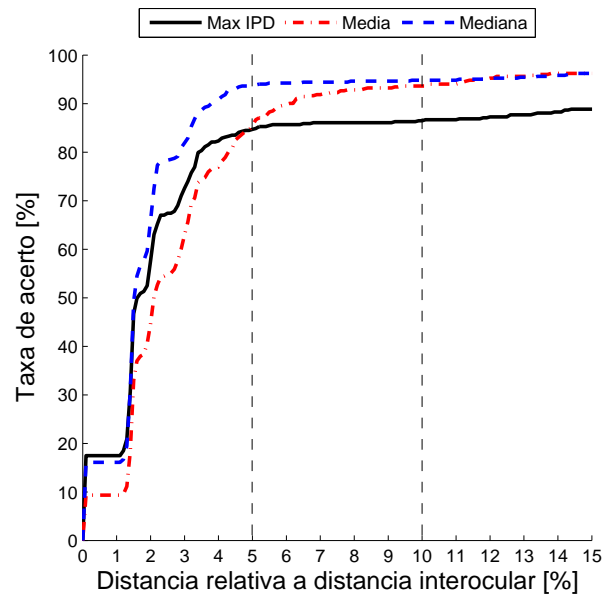


Fig. 5. Taxa de acerto acumulada para o canto externo do olho esquerdo

Na Fig. 6a são expostas as taxas de acerto resultantes para 5% da distância interocular por método de pós-processamento. O acréscimo de estágios produziu um aumento na taxa de acerto, como esperado. Entretanto, a queda de desempenho

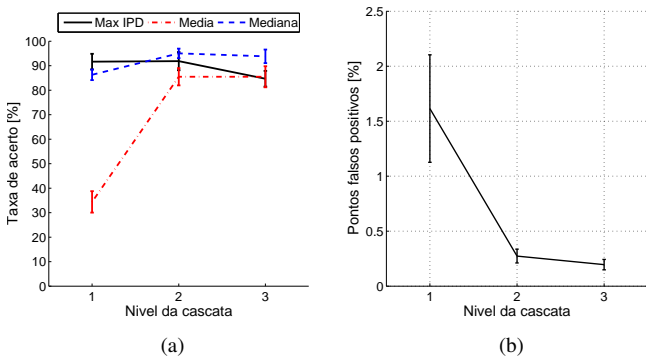


Fig. 6. Taxas de acerto para 5% da distância interocular (a) e quantidade de falsos positivos (b) por estágio para o canto do olho esquerdo.

para um dos métodos de pós-processamento aponta que o sistema se beneficiaria de outros critérios de parada.

Na Fig. 6b é exibida a quantidade relativa de falsos positivos por estágio da cascata. Neste caso, o acréscimo de detectores causou a redução do número de falsos positivos, o que é desejável para métodos de correlação espacial, que tendem a apresentar o problema de muitos falsos positivos.

A baixa complexidade computacional do sistema torna viável a operação em tempo real. A invariância à translação e a robustez a variações de iluminação e pequenas rotações permitem seu uso em diferentes condições.

Na Fig. 7 são apresentados exemplos de detecções obtidos em tempo real por uma *webcam*¹. Nessas imagens observa-se o poder de generalização do sistema, ao realizar a detecção em indivíduos não pertencentes à base de treinamento BioID. Note que o sistema funciona satisfatoriamente, principalmente para os pontos dos olhos, nariz e cantos da boca.

Vale a pena ressaltar que, segundo a Tabela I, existe uma queda de desempenho para os pontos pertencentes a região do nariz e, principalmente, da boca. Estes resultados já eram esperados devido à maior variância entre as amostras e a proximidade entre essas regiões. Este problema poderia ser mitigado com o uso de uma base de treinamento maior, e para a região da boca, com o uso de detectores específicos para bocas abertas e fechadas.

VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um sistema para detecção de pontos fiduciais faciais. O sistema implementado é um sistema modular dividido em três estágios principais: pré-processamento, classificação e pós-processamento. A classificação é realizada através de uma cascata de detectores baseados em filtros de correlação. Cada detector é projetado segundo a saída do estágio anterior. A principal contribuição deste trabalho foi o estabelecimento de critérios objetivos no treinamento do IPD, o que permitiu redução da complexidade e a aplicação do sistema em tempo real.

Os resultados obtidos mostram que o sistema possui um desempenho robusto e capacidade de generalização, com baixa

¹Notebook com processador Intel Core i5 e memória RAM de 4 GB. Imagem de tamanho 640 × 480.



Fig. 7. Exemplos de detecção em tempo real utilizando uma *webcam*

complexidade computacional. O sistema, é rápido o suficiente para aplicações em tempo real. Os resultados indicam que ainda há muito a ser explorado. Trabalhos futuros incluem o estudo de outras estratégias de treinamento, a avaliação do sistema com outras bases de dados e a integração com estratégias de rastreamento para refinar a detecção.

REFERÊNCIAS

- [1] G. M. Araujo, W. S. S. Junior, E. A. B. da Silva, and S. K. Goldenstein, "Facial landmarks detection based on correlation filters," in *International Telecommunications Symposium (ITS)*, 2010.
- [2] B. AG, "BioID face database." <http://www.bioid.com/downloads/software/bioid-face-database.html>, 2010. Último acesso em Março de 2012.
- [3] OpenCV, "OpenCV: Open computer vision library." <http://sourceforge.net/projects/opencvlibrary/>, 2011. último acesso em Abril de 2011.
- [4] G. M. Araujo, "Algoritmo para reconhecimento de características faciais baseado em filtros de correlação," dissertação de mestrado, COPPE/UF RJ, Rio de Janeiro, Fevereiro de 2010.
- [5] R. E. Schapire, "The strength of weak learnability," *Machine Learning*, vol. 5, pp. 197–227, Julho de 1990.
- [6] P. Viola and M. Jones, "Rapid object detection using a boosted cascade of simple features," *Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE Computer Society Conference on*, vol. 1, pp. 511–518, 2001.
- [7] R. Lienhart and J. Maydt, "An extended set of haar-like features for rapid object detection," in *IEEE ICIP 2002*, pp. 900–903, 2002.
- [8] X. Tan and B. Triggs, "Enhanced local texture feature sets for face recognition under difficult lighting conditions," in *AMFG*, pp. 168–182, 2007.
- [9] J. Astola, P. Haavisto, and Y. Neuvo, "Vector median filters," *Proceedings of the IEEE*, vol. 78, pp. 678–689, Abril de 1990.
- [10] P. Soille, *Morphological Image Analysis: Principles and Applications*. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2 ed., 2003.
- [11] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*. Brooks Cole, 3 ed., 1988.
- [12] R. Kohavi, "A study of cross-validation and bootstrap for accuracy estimation and model selection," in *Proceedings of the 14th international joint conference on Artificial intelligence - Volume 2, IJCAI'95*, (San Francisco, CA, USA), pp. 1137–1143, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1995.