

# Estatísticas de Segunda Ordem para a Distribuição

$$\kappa - \mu$$

Sandro Adriano Fasolo e Renan Stel Duque

**Resumo**—Neste artigo foram desenvolvidas as estatísticas de segunda ordem para a distribuição  $\kappa - \mu$ . A distribuição  $\kappa - \mu$  modela os efeitos de desvanecimento de curto prazo de um canal plano e é obtida a partir da suposição de um ambiente não homogêneo composto de clusters modelados pela distribuição de Rice se propagando em um ambiente homogêneo. Estas estatísticas correspondem às equações da taxa de cruzamento de nível e tempo médio de desvanecimento. Um simulador desenvolvido para gerar um sinal  $\kappa - \mu$  é empregado para comparar as estatísticas simuladas com os resultados teóricos. Os resultados obtidos ajustam-se perfeitamente às equações da distribuição  $\kappa - \mu$ .

**Palavras-Chave**—Distribuição  $\kappa - \mu$ , taxa de cruzamento de nível, tempo médio de desvanecimento.

**Abstract**—This paper presents the development of the second order statistics for the  $\kappa - \mu$  distribution, that models the fast fading effects of a signal composed of clusters of multipath waves propagating in a non-homogeneous environment. A cluster is composed of Rice distributed complex processes with in-phase and quadrature components, Gaussian distributed, with equal means and standard deviations. The statistics developed are the level crossing rate and the average fading duration. A simulator is used to evaluate these statistics's curves. The analysis between the exact equations and the simulations curves shows that there is a very good agreement between them.

**Keywords**— $\kappa - \mu$  distribution, level crossing rate, average fading duration.

## I. INTRODUÇÃO

Os atuais sistemas de comunicação são implementados a partir de diversos blocos, cada qual possuindo uma determinada função, como por exemplo, a compressão, codificação, modulação, amplificação de potência de RF, demodulação, recuperação de sincronismo, decodificação e detecção. A análise do desempenho global do sistema torna-se impossível usando um modelo analítico para cada um dos blocos que o constitui. Neste caso, a simulação é usada para estimar o desempenho total do sistema ou de um determinado bloco. Outro aspecto importante da simulação computacional é o controle absoluto dos parâmetros e fenômenos envolvidos. As principais interferências e ruídos sofridas por um sistema de comunicação são provenientes do canal de comunicação. Alguns efeitos são triviais de produzir e simular. Contudo, alguns fenômenos, como o desvanecimento de curto prazo (*fading*) não é tão trivial de simular. O desvanecimento de curto prazo é caracterizado pela recepção de um número infinito de ondas provenientes das reflexões, difrações e espalhamentos do sinal

transmitido no meio de propagação. A análise determinística dos fenômenos físicos através de equações é extensa e difícil devido ao grande número e relação entre os parâmetros e variáveis envolvidas.

Vários trabalhos encontrados na literatura mostram que a utilização de uma abordagem estocástica é mais adequada e se ajusta perfeitamente a dados experimentais. A primeira tentativa de modelar as variações de ganho e fase do sinal recebido foi desenvolvida por Lord Rayleigh (1889) [1]. Neste modelo de ambiente as fases das ondas de um conjunto de onda recebido são aleatórias e possuem atrasos semelhantes, caracterizando um modelo não seletivo em frequência, o que permite empregar o teorema central do limite. Desse modo, a somatória das diversas ondas que chegam ao receptor resulta em um processo estocástico complexo com componentes em fase e quadratura modeladas por uma função de densidade de probabilidade Gaussiana com variáveis aleatórias possuindo médias e variâncias iguais. Esse conjunto de ondas recebe a denominação de cluster e representa um processo Gaussiano complexo. Admitindo que as variáveis aleatórias em fase e quadratura possuem média zero obtém-se a distribuição de Rayleigh, a qual permite modelar um ambiente sem uma onda com potência dominante em relação às demais ondas que forma o cluster (sem linha de visada direta).

Em 1948, desenvolveu-se a distribuição de Rice [2], que difere do modelo desenvolvido por Rayleigh pelo fato das variáveis aleatórias em fase e quadratura possuírem médias iguais e diferentes de zero. A distribuição de Rice modela um ambiente onde existe uma onda com potência dominante (com linha de visada direta). Assim, fica claro que a distribuição de Rayleigh é um caso particular da distribuição de Rice. Em 1960, a partir de uma análise de dados obtidos em medidas práticas, Nakagami desenvolveu a distribuição que leva o seu nome [3]. A distribuição de Nakagami também modela as distribuições de Rayleigh e Rice através da configuração adequada do parâmetro  $m$ . Estas três distribuições são usadas para modelar um ambiente homogêneo.

Após 41 anos, o professor Michel Daoud Yacoub obteve uma generalização das distribuições acima citadas modelando o sinal de recepção como a somatória de  $n$  clusters [4]. O modelo de distribuição  $\kappa - \mu$  é obtido a partir da suposição de um ambiente não homogêneo composto de clusters (modelados de acordo com a distribuição de Rice) se propagando em um ambiente homogêneo. Dentro de cada cluster as fases das ondas espalhadas são aleatórias e possuem atrasos similares. Contudo, os atrasos entre os diversos clusters são relativamente grandes. Neste caso, a somatória de vários clusters resulta na distribuição  $\kappa - \mu$ , não valendo o teorema central do limite.

Sandro Adriano Fasolo e Renan Stel Duque, DTE - Departamento de Telecomunicações, INATEL - Instituto Nacional de Telecomunicações, Santa Rita do Sapucaí, MG, Brasil, E-mails: sandro.fasolo@inatel.br, renan.duque@inatel.br.

Esta distribuição modela um ambiente não homogêneo e é uma tentativa de solucionar o problema da fase aleatória. Fisicamente, o parâmetro  $\kappa$  representa a relação entre a potência da onda dominante e a potência das ondas espalhadas, enquanto o parâmetro  $\mu$  representa o número de clusters do sinal recebido.

Este artigo está organizado da seguinte forma: a seção II fornece o desenvolvimento da derivada em relação ao tempo da envoltória de um sinal modelado pela distribuição  $\kappa - \mu$ . Os resultados obtidos nesta seção, assim como as simulações, são mostrados na seção III. Na seção IV são desenvolvidas as equações da taxa de cruzamento de nível (LCR - *level crossing rate*) e tempo médio de desvanecimento (ADF - *average fading duration*) para a distribuição  $\kappa - \mu$ . Os resultados obtidos nesta seção, assim como as simulações, são mostrados na seção V. Estes dados (LCR e ADF) são utilizados no projeto e testes de codificadores e entrelaçadores de canais para HDTV. A seção VI apresenta as conclusões. No final são feitos os agradecimentos.

## II. DERIVADA DA ENVOLTÓRIA $\kappa - \mu$

Esta seção apresenta uma contribuição original [5]. Adaptando a idéia de [6], um sinal  $\kappa - \mu$  pode ser entendido como o resultado de uma somatória de  $n$  sinais modelados pela distribuição de Rice. A envoltória  $r$  para o sinal  $\kappa - \mu$  é dada por

$$r^2 = \sum_{i=1}^n r_i^2, \quad (1)$$

onde cada componente  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , corresponde à envoltória de um sinal Rice. Calculando a derivada em relação ao tempo  $\dot{r}$  da envoltória  $r$  dada por (1) obtém-se

$$\dot{r} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i \dot{r}_i}{r}. \quad (2)$$

Foi mostrado em [7] que a derivada em relação ao tempo  $\dot{r}_i$  de uma envoltória Rice  $r_i$  segue uma distribuição Gaussiana de média zero e variância dada por  $\dot{\sigma}_i^2 = (\sqrt{2} \pi f_m \sigma_i)^2$ , onde  $\sigma_i^2$  corresponde à variância de cada componente Gaussiana utilizada para gerar cada envoltória Rice que compõe a envoltória  $\kappa - \mu$ .

Note em (2) que, dadas as envoltórias  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , e portanto dado  $r$ ,  $\dot{r}$  é Gaussiana com média nula e variância  $\dot{\sigma}_i^2$ . Além disso, uma vez que  $r$  não aparece nos parâmetros (média e variância) de  $\dot{r}$  dado  $r$ ,  $\dot{r}$  é na verdade Gaussiana e independente de  $r$ , ou seja,  $p(\dot{r}|r) = p(\dot{r})$ , como em (3). Desta forma, a derivada temporal  $\dot{r}$  de uma envoltória  $\kappa - \mu$  é dada por

$$p(\dot{r}|r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \dot{\sigma}} \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2\dot{\sigma}^2}\right). \quad (3)$$

A função de distribuição conjunta é  $p(r, \dot{r}) = p(\dot{r}|r)p(r)$

onde  $p(r)$  é dado por [4]

$$p(r) = \frac{1}{\hat{r}} \frac{2\mu(1+\kappa)^{\frac{\mu+1}{2}}}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\mu\kappa)} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^\mu \times \exp\left[-\mu(1+\kappa)\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right] \times I_{\mu-1}\left[2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)\right] \quad (4)$$

Logo,

$$p(r, \dot{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \hat{r} \dot{\sigma}} \frac{2\mu(1+\kappa)^{\frac{\mu+1}{2}}}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\mu\kappa)} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^\mu \times \exp\left[-\mu(1+\kappa)\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2 - \frac{\dot{r}^2}{2\dot{\sigma}^2}\right] \times I_{\mu-1}\left[2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)\right] \quad (5)$$

As variáveis aleatórias  $r$  e  $\dot{r}$  são independentes.

$$p(r, \dot{r}) = \left\{ \frac{1}{\hat{r}} \frac{2\mu(1+\kappa)^{\frac{\mu+1}{2}}}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\mu\kappa)} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^\mu \times \exp\left[-\mu(1+\kappa)\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right] \times I_{\mu-1}\left[2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)\right] \right\} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \dot{\sigma}} \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2\dot{\sigma}^2}\right) \right\} \quad (6)$$

A derivada de uma envoltória  $\kappa - \mu$ ,  $p(\dot{r})$ , que é a mesma as envoltórias Rayleigh e Rice, é dada por

$$p(\dot{r}) = \int_0^\infty p(r, \dot{r}) dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \dot{\sigma}} \exp\left(-\frac{\dot{r}^2}{2\dot{\sigma}^2}\right), \quad (7)$$

onde  $\dot{\sigma}^2 = \pi^2 f_m^2 \hat{r} / (\mu(1+\kappa))$ .

## III. SIMULAÇÃO DA DERIVADA DA ENVOLTÓRIA $\kappa - \mu$

Em [8] foi desenvolvido um simulador de canal com desvanecimento que modela a envoltória de um sinal recebido segundo a distribuição  $\kappa - \mu$ . Um sinal  $\kappa - \mu$  é composto pela somatória de variáveis complexas, cujas componentes em fase e quadratura são componentes Gaussianas de médias e variâncias iguais. Desta forma, fazendo uma adaptação do simulador proposto por Smith (encontrado em [9]) para produzir um cluster de sinal modelado pela distribuição de Rice com efeito Doppler e somando um número apropriado de clusters gerados, é possível obter um sinal  $\kappa - \mu$  para qualquer valor positivo de  $\kappa$  e  $\mu$  múltiplo de 1/2.

O simulador desenvolvido foi usado para obter os dados para comparação com os resultados teóricos obtidos na Seção II. Os parâmetros utilizados na simulação são  $\kappa = 0,75$ ;  $\mu = 1,5$ ;  $v = 60 \text{ km/h}$ ;  $f = 900 \text{ MHz}$ ;  $t = 100 \text{ s}$ ;  $f_m = 50 \text{ Hz}$  e  $\Delta t = 156,25 \mu\text{s}$ . A Figura 1 mostra a envoltória do sinal gerado pelo simulador e a Figura 2 mostra as curvas teórica e simulada da fdp dessa envoltória. A Figura 3 mostra a derivada temporal da envoltória  $\kappa - \mu$  e a Figura 4 mostra as curvas teórica e simulada da fdp dessa derivada. Para os

valores simulados, a variância calculada para a derivada da envoltória é

$$\dot{\sigma}^2 = \frac{\pi^2 f_m^2 \hat{r}}{\mu(1 + \kappa)} = \frac{\pi^2 50^2}{1,5(1 + 0,75)} = 9399,6 \quad (8)$$

enquanto que o valor obtido na simulação é 9423,7.

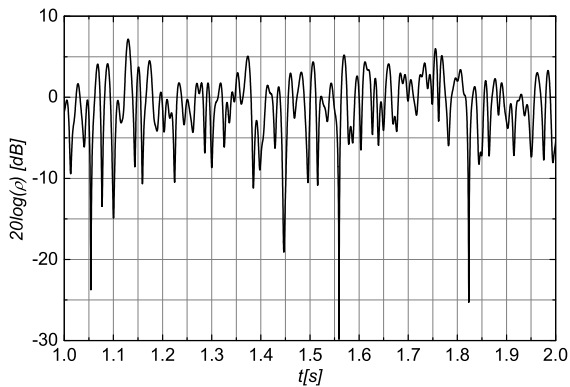


Fig. 1. Envoltória do sinal com desvanecimento  $\kappa - \mu$ .

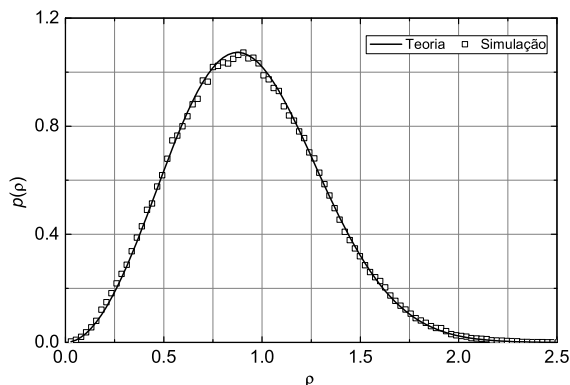


Fig. 2. Fdp da envoltória do sinal com desvanecimento  $\kappa - \mu$ .

#### IV. TAXA DE CRUZAMENTO DE NÍVEL E TEMPO MÉDIO DE DESVANECIMENTO

A taxa de cruzamento de nível  $R_c$  e o tempo médio de desvanecimento  $\tau$  de um sinal com desvanecimento representam duas estatísticas importantes, úteis no projeto de sistemas de comunicações sem fio.

A taxa de cruzamento de nível é definida como o número médio de vezes que a envoltória do sinal com desvanecimento, normalizada em relação a seu nível rms,  $\rho = r/\hat{r}$ , cruza um determinado nível  $R$  em uma direção somente, num certo período de tempo [1], e é dada por

$$R_c = E[\dot{r}, r = R] = \int_0^{+\infty} \dot{r} p(\dot{r}, r = R) d\dot{r}, \quad (9)$$

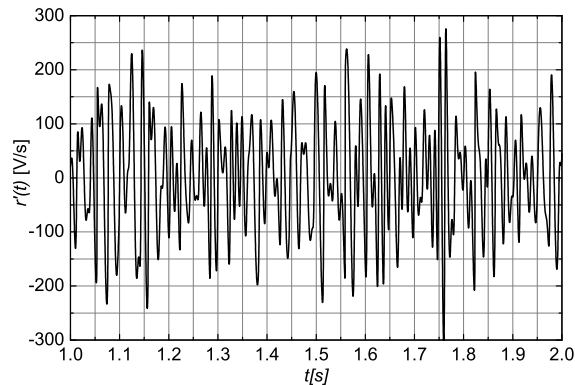


Fig. 3. Derivada da envoltória do sinal com desvanecimento  $\kappa - \mu$ .

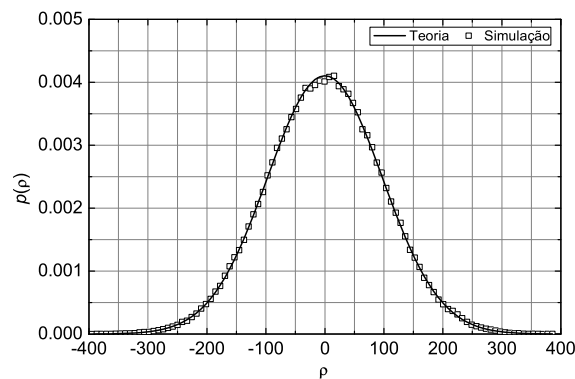


Fig. 4. Fdp da derivada da envoltória do sinal com desvanecimento  $\kappa - \mu$ .

onde  $\dot{r}$  é a derivada temporal de  $r(t)$ ,  $p(R, \dot{r})$  é a fdp conjunta de  $r$  e  $\dot{r}$ , para  $r = R$ .

O tempo médio de desvanecimento é definido como o período médio que o sinal recebido permanece abaixo de um determinado nível  $R$ , e é dado por

$$\tau = \frac{\sum \tau_i}{R_c T} = \frac{1}{R_c} p(r \leq R) = \frac{1}{R_c} \int_0^R p(r) dr, \quad (10)$$

onde  $p(r \leq R)$  é a probabilidade do sinal recebido  $r$  apresentar níveis abaixo do limiar  $R$ . Para a distribuição  $\kappa - \mu$  tem-se

$$R_c = \frac{\sqrt{\pi} f_m \left(\frac{R}{\hat{r}}\right)^\mu}{\sqrt{2\mu(1 + \kappa)}} \left\{ \frac{2\mu(1 + \kappa)^{\frac{\mu+1}{2}}}{\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\mu\kappa)} \exp \left[ -\mu(1 + \kappa) \left(\frac{R}{\hat{r}}\right)^2 \right] \right. \\ \left. \times I_{\mu-1} \left[ 2\mu\sqrt{\kappa(1 + \kappa)} \left(\frac{R}{\hat{r}}\right) \right] \right\}. \quad (11)$$

$$\tau = \frac{\sqrt{2\mu(1 + \kappa)} \exp \left[ \mu(1 + \kappa) \left(\frac{R}{\hat{r}}\right)^2 \right]}{\sqrt{\pi} f_m \left(\frac{R}{\hat{r}}\right)^\mu I_{\mu-1} \left[ 2\mu \left(\frac{R}{\hat{r}}\right) \sqrt{\kappa(1 + \kappa)} \right]} \times \\ \int_0^{\frac{R}{\hat{r}}} g^\mu \exp \left[ -\mu g^2 (1 + \kappa) \right] I_{\mu-1} \left[ 2\mu g \sqrt{\kappa(1 + \kappa)} \right] dg, \quad (12)$$

onde  $g = r/\hat{r}$  é a variável de integração.

Para a distribuição de Rayleigh as equações são obtidas tomando (11) e (12) e fazendo  $\kappa = 0, \mu = 1$ , encontrando

$$R_c = \sqrt{\pi} f_m \frac{R}{\sigma} \exp \left[ - \left( \frac{R}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

$$\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi} f_m R} \left[ \exp \left( \frac{R^2}{2\sigma^2} \right) - 1 \right]. \quad (14)$$

Para a distribuição de Rice as equações são obtidas tomando (11) e (12) e fazendo  $\kappa = K, \mu = 1$ , encontrando

$$R_c = \sqrt{\pi} f_m \frac{R}{\sigma} \exp \left( - \frac{R^2 + c^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left( \frac{Rc}{\sigma^2} \right). \quad (15)$$

$$\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi} f_m R} \frac{\exp \left( \frac{R^2 + c^2}{2\sigma^2} \right)}{I_0 \left( \frac{Rc}{\sigma^2} \right)} \times \int_0^R \frac{r}{\sigma^2} \exp \left( - \frac{r^2 + c^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left( \frac{rc}{\sigma^2} \right) dr \quad (16)$$

Para a distribuição de Nakagami- $m$  as equações são obtidas tomando (11) e (12) e fazendo  $\kappa = 0, \mu = m$ , encontrando

$$R_c = \sqrt{\pi} f_m \sigma \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp \left( - \frac{mR^2}{\Omega} \right). \quad (17)$$

$$\tau = \frac{\Gamma(m)\Omega^{m-\frac{1}{2}}}{m^{m-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi} f_m R^{2m-1}} \exp \left( \frac{mR^2}{\Omega} \right) \times \int_0^R \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \exp \left( - \frac{mr^2}{\Omega} \right) dr. \quad (18)$$

### V. SIMULAÇÕES

O simulador desenvolvido em [8] foi utilizado para obter as Figuras 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, que são comparadas com as equações 13, 14, 15, 16, 17, 18, 11 e 12.

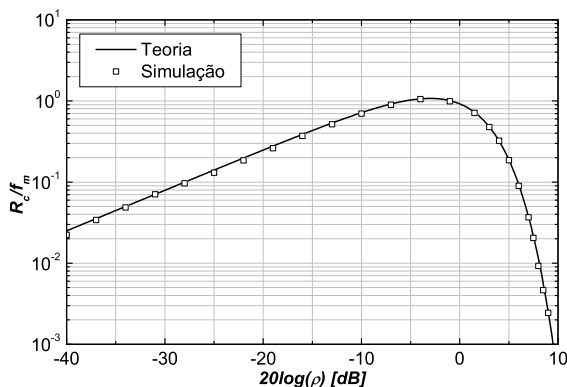


Fig. 5. Taxa de Cruzamento de Nível para a Distribuição de Rayleigh.

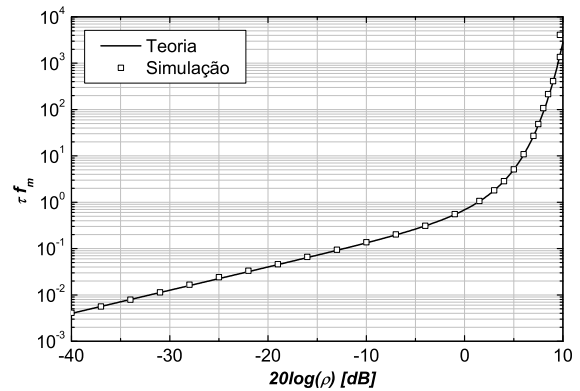


Fig. 6. Tempo Médio de Desvanecimento para a Distribuição de Rayleigh.

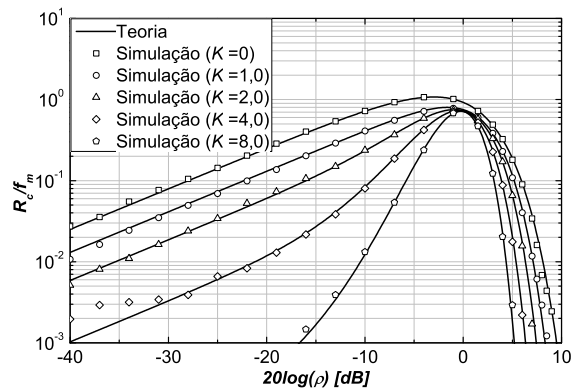


Fig. 7. Taxa de Cruzamento de Nível para a Distribuição de Rice.

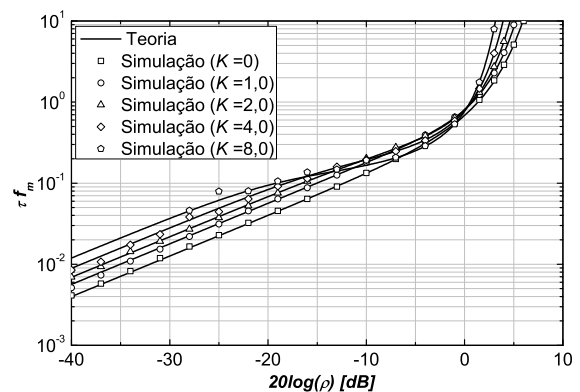


Fig. 8. Tempo Médio de Desvanecimento para a Distribuição de Rice.

### VI. CONCLUSÕES

Este artigo apresentou o desenvolvimento da equação da derivada da envoltória de um sinal com desvanecimento  $\kappa - \mu$  não seletivo em frequência. A fdp desta derivada segue uma distribuição Gaussiana de média zero e variância dada por

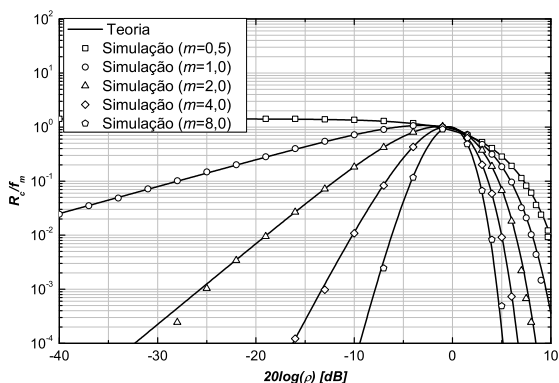


Fig. 9. Taxa de Cruzamento de Nível para a Distribuição de Nakagami- $m$ .

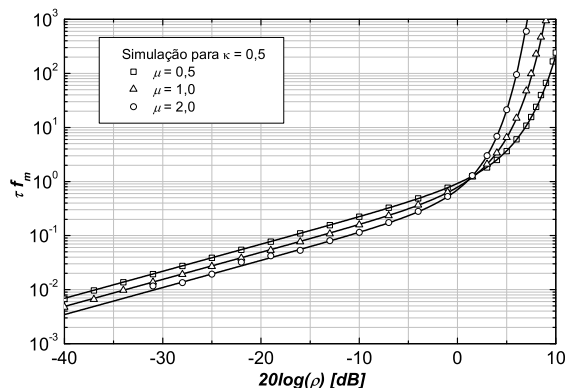


Fig. 12. Tempo Médio de Desvanecimento para a Distribuição  $\kappa - \mu$  ( $\kappa$  fixo).

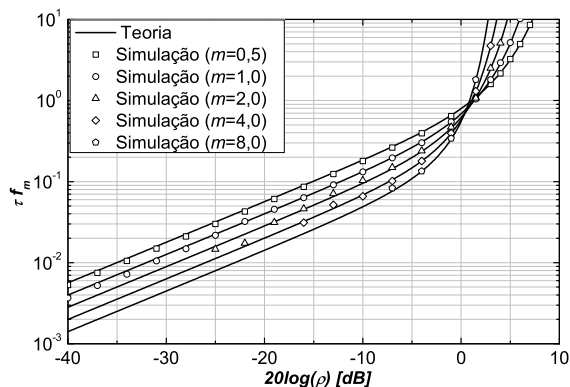


Fig. 10. Tempo Médio de Desvanecimento para a Distribuição de Nakagami- $m$ .

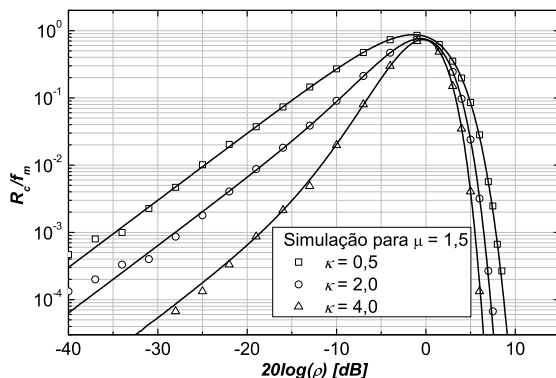


Fig. 13. Taxa de Cruzamento de Nível para a Distribuição  $\kappa - \mu$  ( $\mu$  fixo).

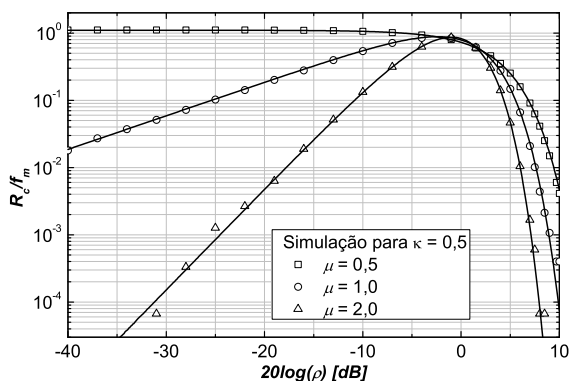


Fig. 11. Taxa de Cruzamento de Nível para a Distribuição  $\kappa - \mu$  ( $\kappa$  fixo).

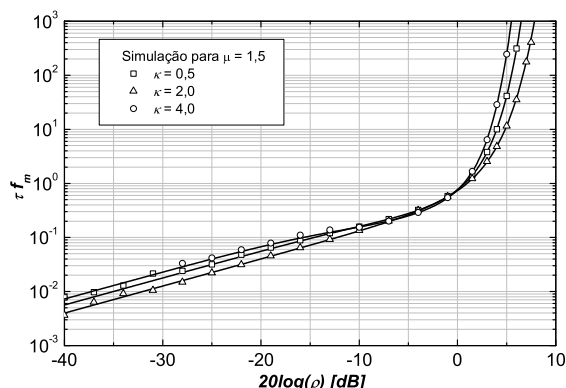


Fig. 14. Tempo Médio de Desvanecimento para a Distribuição  $\kappa - \mu$  ( $\mu$  fixo).

$\sigma^2 = 2\pi^2 f_m^2 \sigma^2$ . Através da utilização de um simulador concluiu-se que os dados simulados possuem grande concordância com os resultados teóricos. Estes resultados foram utilizados no desenvolvimento das equações das estatísticas de segunda ordem (taxa de cruzamento de nível e tempo

médio de desvanecimento) para um sinal com desvanecimento  $\kappa - \mu$ . Mostrou-se que as equações obtidas são corretas porque ajustam-se perfeitamente aos valores obtidos através de simulações. Mostrou-se também que estas estatísticas de

segunda ordem são obtidas para as distribuição de Rayleigh, Rice e Nakagami- $m$  a partir da distribuição  $\kappa - \mu$ , fazendo o ajuste correto dos parâmetros  $\kappa$  e  $\mu$ .

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao INATEL e FUNTEL pelo suporte financeiro.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Yacoub, M. D., *Foundations of mobile Radio Engineering*. CRC Press, New York, 1993.
- [2] Rice, S. O., *Mathematical Analysis of Random Noise*. Bell Syst. Tech. J., vol. 23, pp 282-332, July 1944.
- [3] Nakagami, M., *The  $m$ -distribution - A General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading in Statistical Methods in Radio Wave Propagation*. W. C. Hoffman, Ed. Elmsford, 1960.
- [4] Yacoub, M. D.,  *$\kappa - \mu$  Distribution*. XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, 2001.
- [5] Duque, R. S., *Estatísticas de Ordem Superior para a Distribuição  $\kappa - \mu$* . Dissertação de Mestrado, Instituto Nacional de Telecomunicações - INATEL, 2003.
- [6] Yacoub, M. D.; Bautista, J. E. V. e Guedes, L. G. R., *On Higher Order Statistics of the Nakagami- $m$  Distribution*. IEEE Transaction on Vehicular Technology, vol. 48, no. 3, pp 790-794, May 1999.
- [7] Fasolo, S. A. e Duque, R. S., *On Time Derivative of Yacoub's  $\kappa - \mu$  Envelope*. 15<sup>th</sup> Virginia Tech/MPRG Symposium on Wireless Personal Communication, Blacksburg, VA, USA, 2005.
- [8] Fasolo, S. A. and Duque, R. S., *A General Fading Channel Simulation for Yacoub's  $\kappa - \mu$  Distribution*. 14<sup>th</sup> Virginia Tech/MPRG Symposium on Wireless Personal Communication, Blacksburg, VA, USA, 2004.
- [9] Rappaport, T. S., *Wireless Communications: Principles and Practice*. Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 1996.