

Um método eficiente para detecção DTMF baseado na Transformada Aritmética de Fourier

Juliano Bandeira Lima e Ricardo M. Campello de Souza

Resumo—Este artigo propõe um método para detectar sinais *Dual-Tone Multifrequency* (DTMF) baseado na Transformada Aritmética de Fourier (AFT). Além de oferecer uma vantagem significativa sobre outros algoritmos, em termos de complexidade computacional, a AFT permite a detecção da frequência exata que se deseja analisar. Com isto, é possível atender às recomendações da ITU para o sistema DTMF. Implementações e diversos resultados do método proposto são apresentados.

Palavras-Chave—DTMF, análise espectral, algoritmos rápidos, Transformada Aritmética de Fourier.

Abstract—This article proposes a method based on the Arithmetic Fourier Transform (AFT) to detect Dual-Tone Multifrequency (DTMF) signals. The AFT offers a significant advantage in terms of computational complexity, when compared to other algorithms. It provides an accurate detection of the frequency being analyzed, thus satisfying the requirements of the ITU. Implementations and results of the proposed method are presented.

Keywords—DTMF, spectral analysis, fast algorithms, Arithmetic Fourier Transform.

I. INTRODUÇÃO

A SINALIZAÇÃO DTMF – *Dual-Tone Multifrequency* – tem diversas aplicações importantes, sendo usada em muitos sistemas de Telecomunicações, tais como telefonia a teclado, correio de voz, comércio eletrônico e sistemas bancários interativos. Cada um dos 16 sinais DTMF é associado a um dígito (0–9, A–D, #, *) e gerado a partir da soma de dois tons senoidais, um de alta e outro de baixa frequência. As normas para detecção de sinais DTMF, determinadas pela recomendação Q.24 da ITU – *International Telecommunication Union* – definem padrões a respeito da tolerância frequencial, da duração e da potência dos sinais [1]. Essas especificações são apresentadas de forma resumida na Tabela I.

Basicamente, a decodificação de um sinal DTMF é realizada observando a energia associada às 8 possíveis frequências de operação do sistema. As componentes de baixa e de alta frequência mais significativas determinam o dígito recebido. Para que este procedimento atenda à recomendação Q.24, no que diz respeito à tolerância frequencial, é necessário que se detecte cada frequência com exatidão. Esse requisito, entretanto, não pode ser alcançado pelo uso de transformadas discretas que amostram uniformemente o espectro de um sinal [1]. Com o intuito de eliminar tal restrição, têm sido propostos

Juliano Bandeira Lima e Ricardo M. Campello de Souza, Grupo de Processamento Digital de Sinais, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil, E-mails: juliano_bandeira@hotmail.com, ricardo@ufpe.br.

TABELA I
RECOMENDAÇÕES DA ITU PARA A SINALIZAÇÃO DTMF

<i>Frequências do Sinal</i>	Grupo de Baixas	697, 770, 852, 941 Hz
	Grupo de Altas	1209, 1336, 1477, 1633 Hz
<i>Tolerância Frequencial</i>	Operação	$\leq 1.5\%$
	Não-operação	$\geq 3.5\%$
<i>Duração do Sinal</i>	Operação	40 ms, mínimo
	Não-operação	23 ms, máximo
<i>Pausa e Interrupção</i>	Duração da Pausa	40 ms, máximo
	Interrupção do Sinal	10 ms, mínimo
"Twist"	Direto	8 dB
	Reverso	4 dB
<i>Energia do Sinal</i>	SNR	15 dB, mínimo
	Potência do Sinal	-26 dBm, mínimo

detectores baseados na Transformada Discreta de Fourier Não-uniforme (NDFT) [2], usualmente, implementada através do algoritmo de Goertzel [3]–[5].

Em [6], foi apresentado um procedimento para detectar sinais DTMF, baseado na Transformada Aritmética de Fourier (AFT), que é, de fato, um algoritmo rápido para o cálculo dos coeficientes da série de Fourier de um sinal. Neste trabalho, esse método é estendido, de modo a permitir uma amostragem espectral não-uniforme. Escolhendo de maneira adequada determinados parâmetros, pode-se calcular por meio da AFT a energia associada a exatamente cada uma das frequências DTMF.

São enfatizadas as vantagens que o novo esquema proporciona no que diz respeito ao número de operações aritméticas necessárias. Sob esse aspecto, a AFT é bem mais eficiente que outros algoritmos usados para a mesma aplicação. Uma implementação do método proposto é sugerida e resultados que refletem seu desempenho são apresentados.

II. A TRANSFORMADA ARITMÉTICA DE FOURIER

O surgimento da Transformada Aritmética de Fourier remonta ao ano de 1903, quando o matemático alemão H. Bruns inventou um método para calcular os coeficientes da série de Fourier de um sinal [7]. Este procedimento, baseado na fórmula de inversão de Möbius para séries finitas, necessita apenas de adições e de multiplicações por fatores de escalonamento. Recentemente, um algoritmo bastante parecido com o original de Bruns foi desenvolvido por D. Tufts e G. Sadasiv [8], o que proporcionou o surgimento de novas e aprimoradas versões do mesmo [9]. A AFT Simplificada, versão mais recente do algoritmo, proposta por Reed e Shih em 1992 [10], é apresentada nesta seção.

Inicialmente, convém enunciar o teorema em que se baseia o algoritmo.

Teorema 1: (Fórmula de inversão de Möbius para séries finitas) Seja n inteiro e positivo e $f(n)$ uma seqüência não-nula para $1 \leq n \leq N$ e nula para $n > N$. Se

$$g(n) = \sum_{k=1}^{\lfloor N/n \rfloor} f(kn), \quad (1)$$

então

$$f(n) = \sum_{m=1}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(m)g(mn). \quad (2)$$

onde $\mu(\cdot)$ denota a função de Möbius. A prova deste teorema é apresentada em [9]. ■

Agora, considera-se uma função $v(t)$ real com período T cuja série de Fourier é finita (hipótese de sinal banda limitada), com N termos, e dada por:

$$v(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \quad (3)$$

onde a_0 é o valor médio de $v(t)$. O cálculo dos coeficientes harmônicos a_n e b_n , representados na equação (3), é feito com base na definição e no teorema que seguem.

Definição 1 (Soma de Bruns): A $2n$ -ésima soma alternante de Bruns, $B_{2n}(\alpha)$, é definida por:

$$B_{2n}(\alpha) = \frac{1}{2n} \sum_{m=0}^{2n-1} (-1)^m v\left(m\frac{T}{2n} + \alpha T\right). \quad (4)$$

Teorema 2 (AFT Simplificada): Os coeficientes de Fourier, para $n = 0, 1, 2, \dots, N$, são computados pelas expressões:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt, \quad (5a)$$

$$a_n = \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) B_{2nl}(0), \quad (5b)$$

$$b_n = \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) (-1)^{\frac{l-1}{2}} B_{2nl}\left(\frac{1}{4nl}\right). \quad (5c)$$

A prova deste teorema é apresentada em [10]. ■

A complexidade multiplicativa e a aditiva (em termos de operações reais) associadas ao cálculo de todos os coeficientes de Fourier até o N -ésimo harmônico são dadas, respectivamente, por

$$M_R(N) = 2N \quad (6)$$

e

$$A_R(N) = N^2. \quad (7)$$

É importante que alguns aspectos desse algoritmo sejam destacados. O primeiro deles diz respeito à independência no cálculo de cada soma alternante de Bruns. Isto sugere a implementação da AFT Simplificada por meio de processadores paralelos. Os esforços computacionais similares para a obtenção dos a_n e dos b_n constituem outra característica positiva do método apresentado. Finalmente, destaca-se a necessidade de se ter amostras do sinal $v(t)$ em instantes de

tempo fracionários. Mais à frente, ver-se-á que este último fato não compromete a aplicação do algoritmo no tratamento de sinais digitais, onde se tem apenas amostras em instantes de tempo bem definidos.

III. ANÁLISE DE SINAIS DTMF VIA AFT

Nesta seção, descreve-se efetivamente o uso da Transformada Aritmética de Fourier na detecção de sinais DTMF. Os parâmetros que determinam a forma de aplicar o algoritmo são escolhidos e uma implementação é apresentada.

A. Frequências DTMF vs. Frequências Harmônicas

Para que a presença de uma frequência DTMF seja verificada com exatidão através da AFT, é necessário fazê-la coincidir com uma das frequências harmônicas contidas na expansão em série do sinal. Dessa maneira, pode-se calcular os coeficientes a_n e b_n relacionados à mesma e observar sua energia. Neste ponto, o principal aspecto a ser considerado é que as frequências harmônicas são definidas pelo período T , associado à frequência fundamental da série de Fourier. Isto significa que este parâmetro precisa estar sujeito a variações, de modo que cada frequência seja observada com precisão.

Com o intuito de buscar uma conformidade com a recomendação Q.24, será atribuído a T o valor inicial de 13, 25ms. Esse tempo corresponde, aproximadamente, à terça parte da duração mínima de um sinal DTMF e prevê uma separação adequada entre as frequências harmônicas. Além disso, 13, 25ms equivale à duração exata de um sinal discreto de comprimento 106 (que fora amostrado à frequência de 8kHz). Este fato torna-se relevante na adequação da AFT ao tratamento de sinais digitais e na comparação deste algoritmo com aqueles baseados em Transformadas Discretas usuais.

Para que se determine a que coeficiente harmônico, n , cada frequência f está associada, usa-se a expressão

$$n = fT. \quad (8)$$

Normalmente, n não será um valor inteiro. A proposta é, então, arredondá-lo para o inteiro mais próximo e ajustar T para que a relação de igualdade permaneça. A Tabela II mostra a que harmônico cada frequência DTMF está relacionada e apresenta os respectivos valores de T , ajustados segundo o procedimento descrito.

B. A Aplicação da AFT

O próximo passo na implementação do algoritmo é definir que somas de Bruns serão necessárias ao cálculo de cada coeficiente harmônico. Como apenas as componentes associadas às frequências DTMF são significativas, pode-se truncar a série de Fourier do sinal, fazendo $N = 22$, de acordo com a segunda coluna da Tabela II. Observa-se que, para os valores de n contidos nesta mesma tabela, a qual se completa utilizando a equação (5), tem-se $a_n = B_{2n}(0)$ e $b_n = B_{2n}\left(\frac{1}{4n}\right)$. É importante enfatizar que a escolha inicial do parâmetro T e sua posterior variação determinam a obtenção de oito séries de Fourier distintas. Em cada uma dessas séries, apenas um termo é relevante para que se analise a frequência DTMF correspondente ao mesmo.

TABELA II
ANÁLISE DE SINAIS DTMF VIA AFT

f (Hz)	n	T (ms)	Somas de Bruns
697	9	12,91	$B_{18}(0), B_{18}\left(\frac{1}{36}\right)$
770	10	12,99	$B_{20}(0), B_{20}\left(\frac{1}{40}\right)$
852	11	12,91	$B_{22}(0), B_{22}\left(\frac{1}{44}\right)$
941	12	12,75	$B_{24}(0), B_{24}\left(\frac{1}{48}\right)$
1209	16	13,23	$B_{32}(0), B_{32}\left(\frac{1}{64}\right)$
1336	18	13,47	$B_{36}(0), B_{36}\left(\frac{1}{72}\right)$
1477	20	13,54	$B_{40}(0), B_{40}\left(\frac{1}{80}\right)$
1633	22	13,47	$B_{44}(0), B_{44}\left(\frac{1}{88}\right)$

Como foi comentado, para a aplicação da AFT, necessita-se de amostras de $v(t)$ em instantes de tempo fracionários. Entretanto, os sistemas nos quais, hoje, utiliza-se a sinalização DTMF são completamente digitais. Portanto, é necessário realizar interpolações, a fim de adaptar o algoritmo ao tratamento de sinais discretos. Amostrando um sinal contínuo à taxa de Nyquist garante resultados satisfatórios, quando se usa interpolação linear para estimar o valor das amostras não disponíveis [9]. Com o intuito de evitar o aumento da complexidade computacional por conta deste último procedimento, será empregada interpolação de ordem zero. Ou seja, cada amostra necessária será aproximada à amostra disponível mais próxima. Os efeitos dessa aproximação serão analisados posteriormente.

O passo final para a implementação do algoritmo é determinar as amostras do sinal a partir das quais se obtém cada coeficiente. Considerando um sinal DTMF discreto $v[i]$, que tenha sido amostrado à frequência de 8kHz, e aplicando a equação (4), verifica-se que, devido à variação de T , são necessárias 108 amostras. Então, o cálculo dos a_n e b_n pode ser expresso na forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{v} \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{v}. \quad (10)$$

O conjunto de expressões (11), em que o número -1 é denotado pelo sinal “-”, detalha cada termo das equações (9) e (10).

As matrizes \mathbf{A}' e \mathbf{B}' selecionam as amostras de $v[i]$ que serão somadas para obter cada coeficiente, determinando, portanto, a complexidade aditiva do algoritmo. Os fatores de escalonamento nas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} representam as multiplicações necessárias. Para que se observe a energia, E_n , de cada componente frequencial, ainda se deve calcular

$$E_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (12)$$

o que significa o acréscimo de mais uma adição e duas multiplicações para cada uma das oito frequências DTMF. No total, precisa-se de 464 adições e 32 multiplicações para computar os a_n , b_n e, posteriormente, os E_n desejados.

Esses resultados permitem uma comparação inicial entre a complexidade aritmética da AFT e a da NDFT, calculada através do algoritmo de Goertzel [3]. Este último algoritmo

requer 880 multiplicações e 1712 adições, quando aplicado a um sinal discreto de comprimento comparável àquele utilizado pela AFT. Portanto, no que diz respeito ao número de operações aritméticas necessárias, o método proposto neste trabalho apresenta uma vantagem significativa sobre o algoritmo de Goertzel.

IV. SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Conceber um detector DTMF que atenda rigorosamente às especificações apresentadas na Tabela I é uma tarefa trabalhosa. Particularmente, quando se deseja implementá-lo num Processador Digital de Sinais (DSP), é necessário desenvolver um conjunto de controles lógicos que respeitem as restrições sobre a tolerância frequencial, a duração e o conteúdo de energia dos sinais [4], [5]. O foco deste trabalho, entretanto, é apresentar a AFT como ferramenta matemática capaz de detectar de modo eficiente sinais DTMF. Portanto, a análise de seu desempenho nesta aplicação será baseada em simulações computacionais.

Na subseção que segue, uma figura de mérito é definida. Posteriormente, são descritos os procedimentos e parâmetros utilizados nas simulações e apresentados, de forma comparativa, os resultados das mesmas.

A. Figura de Mérito

Para avaliar o desempenho da detecção DTMF via AFT, comparando-a a outros métodos, faz-se necessário definir uma medida [3]. Com este intuito, calcula-se a diferença, em dB, entre a energia associada à frequência de operação (frequência gerada no transmissor) e a maior energia associada a uma frequência não-operacional (assumindo que se conhece o sinal transmitido). Isso é feito separadamente para o grupo de baixas frequências e para o de altas frequências. Assim, a figura de mérito é dada por

$$F = \min(D_l, D_h), \quad (13)$$

onde

$$D_l = 10 \log_{10} X_l - 10 \log_{10} X_{ls}, \quad (14a)$$

$$D_h = 10 \log_{10} X_h - 10 \log_{10} X_{hs}. \quad (14b)$$

X_l e X_h são as energias associadas à frequência de operação do grupo de baixas frequências e do de altas frequências, respectivamente; X_{ls} e X_{hs} correspondem à energia mais alta detectada entre as três frequências não operacionais de cada grupo. O parâmetro F pode ser interpretado como o destaque dado ao par de frequências que determina a decodificação correta de um sinal DTMF. Cada vez que a figura de mérito assumir um valor menor que zero, houve erro na detecção. Neste processo, deseja-se que, para um dado F , a complexidade computacional do algoritmo empregado seja a menor possível.

B. Simulação

O método para detecção DTMF, introduzido na seção III deste trabalho, foi implementado no *Matlab*®. Para que se pudesse realizar uma análise mais ampla de seu desempenho,

$$\mathbf{A} = [18. a_9 \quad 20. a_{10} \quad 22. a_{11} \quad 24. a_{12} \quad 32. a_{16} \quad 36. a_{18} \quad 40. a_{20} \quad 44. a_{22}]^T, \tag{11}$$

$$\mathbf{B} = [18. b_9 \quad 20. b_{10} \quad 22. b_{11} \quad 24. b_{12} \quad 32. b_{16} \quad 36. b_{18} \quad 40. b_{20} \quad 44. b_{22}]^T,$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 100000-0000100000-00000100000-0000100000-00000100000-0000100000-0000100000-0000100000-0000100000-00000100000-0000000000 \\ 10000-0000100000-000010000-000010000-000010000-000010000-000010000-000010000-000010000-000010000-0000000000 \\ 10000-00010000-00001000-000010000-00001000-000010000-00010000-00001000-000010000-00001000-000010000-0000000000 \\ 1000-00001000-0001000-00001000-0001000-00001000-0001000-00001000-0001000-00001000-0001000-00001000-0000000000 \\ 100-000100-001000-00100-001000-00100-000100-00100-000100-00100-000100-00100-000100-00100-000100-00100-0000000000 \\ 100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-0000000000 \\ 100-0100-00100-0100-0010-00100-0100-00100-0100-0010-00100-0010-00100-0100-00100-0100-0010-00100-0100-00100-0 \\ 10-0010-0010-0010-0010-0100-0100-0100-0100-010-0010-0010-0010-0010-0100-0100-0100-0100-010-010-0010-00$$

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 000100000-0000100000-00000100000-0000100000-00000100000-0000100000-00000100000-00000100000-00000100000-0000000000 \\ 00010000-000010000-0000100000-000010000-000010000-00000100000-000010000-0000100000-000010000-000010000-0000000000 \\ 0010000-00001000-000010000-00001000-000010000-00001000-00001000-00001000-00001000-000010000-000010000-0000000000 \\ 001000-00001000-0001000-00001000-00001000-00001000-00001000-00001000-00001000-00001000-00001000-0000000000 \\ 00100-001000-00100-000100-00100-000100-000100-000100-000100-00001000-001000-00001000-0001000-0001000-001000-000 \\ 0100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-00100-0 \\ 0100-0010-00100-0010-00100-0100-00100-0100-0010-00100-0010-00100-0010-00100-0010-00100-0010-00100-0100-00100-0100- \\ 0100-0100-010-0010-0010-0010-0010-0010-0100-0100-0100-0100-010-0010-0010-0010-0010-0010-0010-0010-0100-0100-0100-0100-$$

$$\mathbf{v} = [v_0 \quad v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_{107}]^T.$$

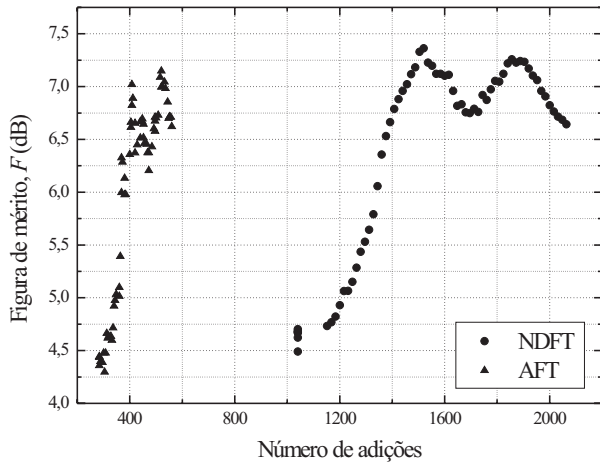


Fig. 1. Figura de mérito alcançada pela AFT e pela NDFT na detecção de sinais DTMF. Para cada algoritmo desenvolvido, apresenta-se o valor de F associado ao número de multiplicações reais necessárias.

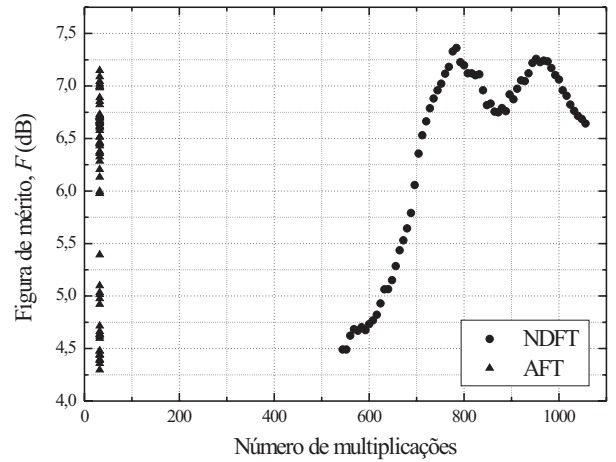


Fig. 2. Figura de mérito alcançada pela AFT e pela NDFT na detecção de sinais DTMF. Para cada algoritmo desenvolvido, apresenta-se o valor de F associado ao número de adições reais necessárias.

observou-se a figura de mérito para uma faixa de valores iniciais de T de 8 a 16ms, espaçados de $\Delta t = 1/8000$ s. Cada sinal foi gerado pela adição de duas senóides representando as frequências de operação e de outras seis, atenuadas de 30dB, representando as demais frequências DTMF [3]. Para cada T , foi simulada a decodificação dos 16 dígitos e obtido um valor médio de F . Ao longo deste processo, as duas frequências operacionais foram variadas dentro da faixa de tolerância de

$\pm 1, 5\%$. Considerou-se, também, a variação do *twist* segundo as especificações da Tabela II e incorporou-se a cada sinal uma fase arbitrária. A simulação foi repetida para a decodificação através da NDFT. Neste caso, o valor de T está associado ao comprimento do sinal discreto utilizado, que variou de 64 a 128 amostras.

Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 1 e 2. Nestes gráficos, cada ponto representa um algoritmo

que foi desenvolvido para um dado valor de T . Para cada implementação simulada, apresenta-se a figura de mérito obtida e o respectivo número de operações aritméticas necessárias. Particularmente, para $T = 13,25\text{ms}$, $F_{NDFT} = 6,79\text{dB}$ e $F_{AFT} = 6,47\text{dB}$. Essa diferença tem origem na interpolação, que é necessária para estimar as amostras do sinal em instantes de tempo fracionários e aplicar a AFT Simplificada. No entanto, o aspecto que torna bastante atrativo o método proposto é que a pequena desigualdade entre o seu desempenho e o da DFT Não-uniforme é amplamente compensada pelo ganho computacional.

Como foi comentado no final da seção III, o número de adições e o de multiplicações que a AFT requer são consideravelmente menores, em relação à NDFT de comprimento comparável. Nas Figuras 1 e 2, observa-se que todos os pontos correspondentes à AFT estão localizados em regiões de baixa complexidade computacional. Este fato alia-se à velocidade determinada pelo processamento paralelo no cálculo de cada soma de Bruns. O significado dessas vantagens é que, para atingir uma dada figura de mérito, estão associados à detecção DTMF via Transformada Aritmética de Fourier um processamento mais rápido e uma menor complexidade computacional.

V. CONCLUSÕES

Neste artigo, foi apresentado um novo método para detecção de sinais DTMF baseado na Transformada Aritmética de Fourier. A flexibilidade da AFT Simplificada permitiu o desenvolvimento de um procedimento específico, adequado à análise espectral de sinais multi-tom discretos no tempo. A baixa complexidade aritmética e a rapidez do método proposto sugerem sua utilização em sistemas onde a velocidade e a simplicidade são os principais requisitos na decodificação dos dígitos DTMF. A investigação do uso da AFT em outras aplicações e o estudo mais detalhado de sua sensibilidade a erros constituem possíveis temas de trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- [1] ITU Blue Book, *Recommendation Q.24: Multi-Frequency Push-Button Signal Reception*, Geneva, Switzerland, 1989.
- [2] S. Bagchi e S. K. Mitra, "The nonuniform discrete Fourier transform and its applications in filter design: Part I—1-D," *IEEE Trans. Circuits and Systems II*, v. 43, p. 422-433, Junho 1996.
- [3] —, "An efficient algorithm for DTMF decoding using the subband NDFT," in *Proc. IEEE Int. Sym. Circ. Sys.*, p. 1936-1939, Maio 1995.
- [4] M. D. Felder, J. C. Mason e B. L. Evans, "Efficient dual-tone multifrequency detection using the nonuniform discrete fourier transform," *IEEE Signal Processing Letters*, v. 5, p. 160-163, Julho 1998.
- [5] S. L. Gay, J. Hartung e G. L. Smith, "Algorithms for multi-channel DTMF detection for the WEDSP32 family," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing*, p. 909-912, Abril 1992.
- [6] J.B. Lima, R. M. C. de Souza, H. M. de Oliveira and M. M. C. de Souza, "Faster DTMF decoding", *Lecture Notes in Computer Science, LNCS 3124*, p. 510-515, Springer-Verlag, 2004.
- [7] H. Bruns, *Grundlinien des Wissenschaftlichichnen Rechnens*. Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1903.
- [8] D. W. Tufts e G. Sadasiv, "The arithmetic Fourier transform," *IEEE Acoust., Speech, Signal Processing Mag.*, p. 13-17, Janeiro 1988.
- [9] I. S. Reed, D. W. Tufts, X. Yu *et al.*, "Fourier analysis and signal processing by use of the Möbius inversion formula," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, v. 38, p. 458-469, Março 1990.
- [10] M. T. Shih, I. S. Reed, T. K. Truong *et al.*, "A VLSI architecture for simplified arithmetic Fourier transform algorithm," *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 40, p. 1122-1133, Maio 1992.