Análise Estatística do Algoritmo εLMS no Domínio Transformado em Ambientes Não-estacionários

Elen M. Lobato, Orlando J. Tobias e Rui Seara

***Resumo*—Este artigo propõe um modelo analítico do algoritmo εLMS no domínio transformado (TD-εLMS) operando em um ambiente não-estacionário. O modelo é derivado para sinais de entrada Gaussianos, grau de não-estacionaridade pequeno e condição de adaptação lenta. Através de simulações numéricas, constata-se uma boa concordância entre os resultados de simulação Monte Carlo e os obtidos através do modelo proposto, tanto para o comportamento médio dos coeficientes quanto para o erro quadrático médio.**

***Palavras-Chave*—Domínio transformado, filtragem adaptativa, modelagem estatística, não-estacionariedade.**

***Abstract*—This paper proposes an analytical model of the transform-domain εLMS algorithm (TD-εLMS) operating in a nonstationary environment. The model is derived for Gaussian inputs, small degree of nonstationary, and slow adaptation condition. Through numerical simulations one verifies a very good agreement between the results obtained by the Monte Carlo method and the ones from the proposed analytical model for both mean coefficient behavior and mean-square error.**

***Keywords*—Transform domain, adaptive filtering, statistical modeling, nonstationary.**

I. INTRODUÇÃO

O algoritmo LMS é um dos algoritmos mais empregados em filtragem adaptativa [1]-[3]. Isso se deve à sua simplicidade, robustez e baixa complexidade computacional requeridas em muitas aplicações. Entretanto, esse algoritmo apresenta uma séria limitação quando o sinal de entrada é correlacionado: sua velocidade de convergência torna-se muito baixa. Com vistas a superar tal problema, Narayan *et al*. [4] introduziram o algoritmo LMS no domínio transformado (TD-LMS). Nesse algoritmo, o sinal de entrada é pré-processado pela transformada discreta de Fourier (TDF), ou por alguma outra transformação ortogonal. Após tal transformação, o passo de adaptação é normalizado segundo a potência média do sinal de entrada para cada coeficiente do filtro adaptativo.

Elen M. Lobato, Orlando J. Tobias e Rui Seara, LINSE – Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, E-mails: {elen, orlando, seara}@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

A análise estatística do algoritmo TD-LMS como também do TD-εLMS para ambientes estacionários tem sido objeto de um bom número de trabalhos apresentados na literatura [5]-[10]. No entanto, para ambientes não-estacionários, em nosso conhecimento, somente umas poucas análises constam da literatura da área. Em [11], uma análise do algoritmo adaptativo para ambientes não-estacionários usando uma abordagem baseada em energia é discutida. Uma característica interessante dessa análise é a independência do tipo de não-linearidade usado e da função densidade de probabilidade do sinal de entrada considerada. Contudo, tal abordagem não permite obter modelos teóricos para predizer a evolução do comportamento médio dos pesos e do erro quadrático médio.

Este artigo tem como propósito desenvolver uma análise estatística do algoritmo TD-εLMS para o caso de ambientes não-estacionários.

O artigo está organizado como segue. A Seção II apresenta a formulação do problema de rastreamento de uma planta variante no tempo. Na Seção III, é definido o vetor de erro do algoritmo TD-εLMS para uma planta variante. A análise estatística do algoritmo TD-εLMS é considerada na Seção IV. A Seção V apresenta e discute os resultados obtidos via simulação Monte Carlo (MC) e através do modelo estatístico proposto. Finalmente, na Seção VI, são expostas as conclusões finais do trabalho.

II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE RASTREAMENTO

O sinal desejado é modelado como sendo um regressor linear múltiplo caracterizado pela seguinte equação [2]:

$$d(n) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{w}^{\mathrm{o}}(n) + z(n)\,, \qquad (1)$$

onde $\mathbf{x}(n) = [x(n) \;\; x(n-1) \cdots x(n-N+1)]^{\mathrm{T}}$ é o vetor constituído pelo sinal de entrada; $\mathbf{w}^{\mathrm{o}}(n) = [w_0^{\mathrm{o}}(n) \;\; w_1^{\mathrm{o}}(n) \ldots w_{N-1}^{\mathrm{o}}(n)]^{\mathrm{T}}$ é o vetor de coeficientes da planta; e $z(n)$ representa o ruído de medição. Mapeando-se os vetores $\mathbf{x}(n)$ e $\mathbf{w}^{\mathrm{o}}(n)$ para o domínio transformado, obtém-se $\mathbf{w}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{o}}(n) = \mathbf{T}\mathbf{w}^{\mathrm{o}}(n)$ e $\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n) = \mathbf{T}\mathbf{x}(n)$ [2], onde $\mathbf{T}$ é a matriz de transformação ortogonal. Assim, pode-se rescrever (1) como

$$d(n) = \mathbf{x}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{w}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{o}}(n) + z(n)\,, \qquad (2)$$

onde $\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n) = [x_{\mathrm{T},0}(n) \;\; x_{\mathrm{T},1}(n) \cdots x_{\mathrm{T},N\text{-}1}(n)]^{\mathrm{T}}$ é o vetor do sinal de entrada transformado e $\mathbf{w}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{o}}(n)=[w_{\mathrm{T},0}^{\mathrm{o}}(n)\ \ w_{\mathrm{T},1}^{\mathrm{o}}(n)\cdots w_{\mathrm{T},N\text{-}1}^{\mathrm{o}}(n)]^{\mathrm{T}}$ é o vetor de coeficientes da planta, representados no domínio transformado. O vetor de coeficientes da planta variante é um processo caracterizado pela seguinte equação de diferenças:

$$\mathbf{w}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{o}}(n+1)=\mathbf{w}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{o}}(n)+\mathbf{g}(n)\,, \tag{3}$$

onde $\mathbf{g}(n)$ é o vetor de perturbação do processo.

III. ALGORITMO εLMS NO DOMÍNIO TRANSFORMADO (TD-εLMS)

A equação de adaptação do vetor de coeficientes do algoritmo TD-εLMS [2] é dada por

$$\mathbf{w}_{\mathrm{T}}(n+1)=\mathbf{w}_{\mathrm{T}}(n)+2\mu\mathbf{D}^{-1}(n)e(n)\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n)\,, \tag{4}$$

onde $e(n)$ representa o sinal de erro escrito como

$$e(n)=d(n)-\mathbf{x}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{w}_{\mathrm{T}}(n)\,. \tag{5}$$

Em (4), o vetor $\mathbf{w}_{\mathrm{T}}(n)=[w_{\mathrm{T},0}(n)\ \ w_{\mathrm{T},1}(n)\cdots w_{\mathrm{T},N\text{-}1}(n)]^{\mathrm{T}}$ é o vetor de coeficientes no domínio transformado e $\mathbf{D}^{-1}(n)$ é uma matriz diagonal, definida por

$$\mathbf{D}^{-1}(n)=\{\mathrm{diag}[\sigma_{\mathrm{T},0}^{2}(n)+\varepsilon\ \ \sigma_{\mathrm{T},1}^{2}(n)+\varepsilon\cdots\sigma_{\mathrm{T},N-1}^{2}(n)+\varepsilon]\}^{-1}, \tag{6}$$

onde $\sigma_{\mathrm{T},i}^{2}(n)$ para $i=0,1,\ldots,N-1$ denota a variância de cada sub-banda do sinal transformado e ε é um parâmetro de regularização que assegura a estabilidade numérica do algoritmo caso o sinal de entrada assuma valores muito pequenos.

Uma vez aplicada a transformação ortogonal, efetua-se através da matriz $\mathbf{D}^{-1}(n)$ a normalização do sinal de entrada. Substituindo-se (2) em (5) e o resultado em (4), obtém-se

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{\mathrm{T}}(n+1)=\mathbf{w}_{\mathrm{T}}(n)+2\mu\mathbf{D}^{-1}(n)\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n)[\mathbf{x}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{w}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{o}}(n)\\+z(n)-\mathbf{x}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{w}_{\mathrm{T}}(n)].\end{aligned} \tag{7}$$

Definindo-se o vetor de erro no domínio transformado $\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n)=\mathbf{w}_{\mathrm{T}}(n)-\mathbf{w}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{o}}(n)$ e considerando (3) e (7), obtém-se

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n+1)=[\mathbf{I}-2\mu\mathbf{D}^{-1}(n)\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n)\mathbf{x}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}(n)]\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n)\\+2\mu\mathbf{D}^{-1}(n)\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n)z(n)-\mathbf{g}(n).\end{aligned} \tag{8}$$

IV. ANÁLISE

A. Momento de Primeira Ordem

Tomando-se o valor esperado de ambos os lados de (8), tem-se

$$\begin{aligned}E[\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n+1)]=E[\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n)]+2\mu E[\mathbf{D}^{-1}(n)\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n)z(n)]\\-2\mu E[\mathbf{D}^{-1}(n)\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n)\mathbf{x}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n)]-E[\mathbf{g}(n)].\end{aligned} \tag{9}$$

Antes de proceder com a determinação dos valores esperados em (9), devem-se estabelecer algumas hipóteses simplificativas para tal análise.

i) $z(n)$ é descorrelacionado de qualquer outro sinal, possui média nula e variância σ_z^2;

ii) $\mathbf{g}(n)$ é um vetor independente com média nula e com matriz de autocorrelação $\mathbf{G}=\sigma_g^2\mathbf{I}$;

iii) $\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n)$ é um processo estacionário com distribuição Gaussiana e matriz de autocorrelação $\mathbf{R}_{\mathrm{T}}$;

iv) $\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n)$ e $\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n)$ são processos estatisticamente independentes;

v) $\mathbf{D}^{-1}(n)$ e $\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n)\mathbf{x}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}(n)$ são processos conjuntamente estacionários, tal que $\mathbf{D}^{-1}(n)$ varie lentamente em relação a $\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n)\mathbf{x}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}(n)$ (Princípio da Média [12]).

Assim, considerando-se as hipóteses (i), (ii), (iii) e (iv) em (9), obtém-se

$$E[\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n+1)]\cong\{\mathbf{I}-2\mu E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_{\mathrm{T}}\}E[\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n)]\,. \tag{10}$$

O valor esperado de $\mathbf{D}^{-1}(n)$ é obtido conforme [9]-[10], sendo sua expressão dada por

$$\begin{aligned}E[\mathbf{D}^{-1}(n)]=\frac{M}{(M-2)}[\mathrm{diag}(\mathbf{R}_{\mathrm{T}})]^{-1}\\-\varepsilon\frac{M^2}{(M-2)(M-4)}[\mathrm{diag}(\mathbf{R}_{\mathrm{T}}^2)]^{-1}.\end{aligned} \tag{11}$$

Substituindo-se (11) em (10), obtém-se a expressão recursiva que descreve o comportamento médio do vetor de erro nos coeficientes do algoritmo TD-εLMS . Assim,

$$\begin{aligned}E[\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n+1)]&=\mathrm{E}[\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n)]\\&-2\mu\frac{M}{(M-2)}[\mathrm{diag}(\mathbf{R}_{\mathrm{T}})]^{-1}\mathbf{R}_{\mathrm{T}}E[\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n)]\\&+2\mu\varepsilon\frac{M^2}{(M-2)(M-4)}[\mathrm{diag}(\mathbf{R}_{\mathrm{T}}^2)]^{-1}\mathbf{R}_{\mathrm{T}}E[\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n)].\end{aligned} \tag{12}$$

A partir de (12), verifica-se que o momento de primeira ordem dos coeficientes do filtro adaptativo não é afetado pela perturbação $\mathbf{g}(n)$ dada em (3).

B. Erro Quadrático Médio e Momento de Segunda Ordem

Nesta seção, é determinada a expressão que descreve o erro quadrático médio (EQM) do algoritmo TD-εLMS. Partindo-se então do erro de adaptação, definido por

$$e(n)=d(n)-\mathbf{x}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{w}_{\mathrm{T}}(n)\,, \tag{13}$$

substituindo-se (2) em (13) e utilizando o vetor de erro nos coeficientes $\mathbf{w}_{\mathrm{T}}(n)=\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n)+\mathbf{w}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{o}}(n)$, obtém-se

$$e(n)=z(n)-\mathbf{x}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}(n)\,\mathbf{v}_{\mathrm{T}}(n)\,. \tag{14}$$

Elevando-se ao quadrado ambos os lados de (14), tomando-se o valor esperado da expressão resultante e fazendo-se uso das considerações (i) e (iv) da Seção IV, tem-se

$$E[e^2(n)] = E[z^2(n)] + E[\mathbf{v}_\mathrm{T}^\mathrm{T}(n)\mathbf{x}_\mathrm{T}(n)\mathbf{x}_\mathrm{T}^\mathrm{T}(n)\mathbf{v}_\mathrm{T}(n)]. \quad (15)$$

O termo $E[\mathbf{v}_\mathrm{T}^\mathrm{T}(n)\mathbf{x}_\mathrm{T}(n)\mathbf{x}_\mathrm{T}^\mathrm{T}(n)\mathbf{v}_\mathrm{T}(n)]$ é um escalar, logo pode ser rescrito como

$$E[\mathbf{v}_\mathrm{T}^\mathrm{T}(n)\mathbf{x}_\mathrm{T}(n)\mathbf{x}_\mathrm{T}^\mathrm{T}(n)\mathbf{v}_\mathrm{T}(n)] = \mathrm{tr}\{\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{v}_\mathrm{T}(n)\mathbf{v}_\mathrm{T}^\mathrm{T}(n)]\}, \quad (16)$$

onde $\mathrm{tr}\{\cdot\}$ representa o traço da matriz. Substituindo-se (16) em (15), obtém-se:

$$E[e^2(n)] = \sigma_z^2 + \mathrm{tr}\{\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{v}_\mathrm{T}(n)\mathbf{v}_\mathrm{T}^\mathrm{T}(n)]\}. \quad (17)$$

Para analisar o comportamento do EQM, é necessário obter uma expressão que permita calcular a matriz de covariância do vetor de erro $\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{v}_\mathrm{T}(n)\mathbf{v}_\mathrm{T}^\mathrm{T}(n)]$. Para tal, multiplica-se (8) pelo seu transposto e calcula-se o valor esperado da expressão resultante, levando-se em conta as hipóteses simplificativas da Seção IV. Assim, obtém-se a expressão recursiva que descreve a evolução da matriz de covariância do vetor de erro, dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(n+1) = {} & \mathbf{K}(n) - 2\mu\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{D}^{-1}(n)] \\ & - 2\mu E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}(n) \\ & + 4\mu^2 E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\{2\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_\mathrm{T} \\ & + \mathbf{R}_\mathrm{T}\mathrm{tr}[\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}(n)]\}E[\mathbf{D}^{-1}(n)] \\ & + 4\mu^2\sigma_z^2 E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{D}^{-1}(n)] + \mathbf{G},\end{aligned} \quad (18)$$

onde $\mathbf{G} = E[\mathbf{g}(n)\mathbf{g}_\mathrm{T}^\mathrm{T}(n)]$.

C. Análise em Regime Permanente

Lembrando-se que o erro em excesso é definido como a diferença entre o EQM e o EQM para a solução ótima (EQM mínimo), tem-se

$$\xi_\mathrm{exc}(n) = \mathrm{tr}[\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}(n)]. \quad (19)$$

Pré-multiplicando ambos os lados de (18) pela matriz inversa de $E[\mathbf{D}^{-1}(n)]$ e assumindo-se que em regime permanente $\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{K}(n) = \mathbf{K}_\infty$, obtém-se

$$\begin{aligned}& 2\mu\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\}^{-1}\mathbf{K}_\infty\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{D}^{-1}(n)] + 2\mu\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}_\infty \\ & = 8\mu^2\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}_\infty\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{D}^{-1}(n)] + \{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\}^{-1}\mathbf{G} \\ & \quad + 4\mu^2\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathrm{tr}[\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}_\infty]E[\mathbf{D}^{-1}(n)] \\ & \quad + 4\mu^2\sigma_z^2\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{D}^{-1}(n)].\end{aligned} \quad (20)$$

Tomando-se o traço de ambos os lados de (20), tem-se

$$\begin{aligned}& 2\mu\mathrm{tr}\left\{\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\}^{-1}\mathbf{K}_\infty\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\right\} + 2\mu\mathrm{tr}[\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}_\infty] \\ & = 8\mu^2\mathrm{tr}\{\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}_\infty\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\} + \mathrm{tr}\left\{\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\}^{-1}\mathbf{G}\right\} \\ & \quad + 4\mu^2\mathrm{tr}\{\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\}\mathrm{tr}[\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}_\infty] \\ & \quad + 4\mu^2\sigma_z^2\mathrm{tr}\{\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\}.\end{aligned} \quad (21)$$

Utilizando-se então a identidade matricial $\mathrm{tr}[\mathbf{AB}] = \mathrm{tr}[\mathbf{BA}]$, obtêm-se

a) $\mathrm{tr}\left\{\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\}^{-1}\mathbf{K}_\infty\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\right\} = \mathrm{tr}[\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}_\infty]$,

b) $\mathrm{tr}\{\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}_\infty\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\} = \mathrm{tr}\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}_\infty\mathbf{R}_\mathrm{T}\}$,

c) $\mathrm{tr}\{\mathbf{R}_\mathrm{T}E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\} = \mathrm{tr}\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\}$.

Assim,

$$\begin{aligned}2\xi_\mathrm{exc} = {} & 4\mu\,\mathrm{tr}\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}_\infty\mathbf{R}_\mathrm{T}\} + \frac{1}{2\mu}\mathrm{tr}\left\{\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\}^{-1}\mathbf{G}\right\} \\ & + 2\mu\,\mathrm{tr}\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\}\xi_\mathrm{exc} + 2\mu\sigma_z^2\,\mathrm{tr}\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\}.\end{aligned} \quad (22)$$

Dado que na convergência os coeficientes do filtro tendem para os valores ótimos, ou seja $\mathbf{K}_\infty \approx 0$, o termo $4\mu\mathrm{tr}\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\mathbf{K}_\infty\mathbf{R}_\mathrm{T}\}$ pode ser desconsiderado. Logo, (22) pode ser escrita como

$$\xi_\mathrm{exc} = \frac{\frac{1}{4\mu}\mathrm{tr}\left\{\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]^{-1}\}\mathbf{G}\right\}}{1 - \mu\,\mathrm{tr}\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\}} + \frac{\mu\sigma_z^2\mathrm{tr}\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\}}{1 - \mu\,\mathrm{tr}\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\}}. \quad (23)$$

Então, o desajuste do algoritmo TD-εLMS para o caso não-estacionário é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{M} & = \frac{\xi_\mathrm{exc}}{\xi_\mathrm{min}} \\ & = \frac{\frac{1}{4\mu}\sigma_z^{-2}\mathrm{tr}\left\{\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\}^{-1}\mathbf{G}\right\}}{1 - \mu\mathrm{tr}\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\}} + \frac{\mu\mathrm{tr}\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\}}{1 - \mu\mathrm{tr}\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\}}.\end{aligned} \quad (24)$$

A partir de (24), verifica-se que o desajuste (assim como o erro em excesso) apresenta uma parcela diretamente proporcional à perturbação $\mathbf{g}(n)$.

D. Passo de Adaptação Ótimo

O passo de adaptação ótimo, que minimiza o EQM em excesso e, conseqüentemente, o desajuste do algoritmo TD-εLMS, é obtido derivando (23) em relação ao fator μ e igualando-se a zero a expressão resultante. Assim, fazendo-se $a = \mathrm{tr}\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\mathbf{R}_\mathrm{T}\}$ e $b = \mathrm{tr}\left\{\{E[\mathbf{D}^{-1}(n)]\}^{-1}\mathbf{G}\right\}$, a derivada da expressão (23) é dada por

$$\frac{d\xi_\mathrm{exc}}{d\mu} = \frac{d}{d\mu}\left[\frac{1}{1-\mu a}\left(\frac{b}{4\mu} + \mu\sigma_z^2 a\right)\right] = 0. \quad (25)$$

Através de algumas manipulações matemáticas, chega-se ao valor de passo de adaptação ótimo que minimiza o EQM. Assim,

$$\mu_\text{ótimo} = \frac{-ab + \sqrt{(ab)^2 + 4\sigma_z^2 ab}}{4\sigma_z^2 a}. \quad (26)$$

E. Grau de Não-estacionariedade

O grau de não-estacionariedade [1], denotado por α, é definido como

$$\alpha = \left[\frac{E[|\mathbf{g}^\mathrm{H}(n)\mathbf{x}_\mathrm{T}(n)|^2]}{E[|z(n)|^2]}\right]^{1/2}. \quad (27)$$

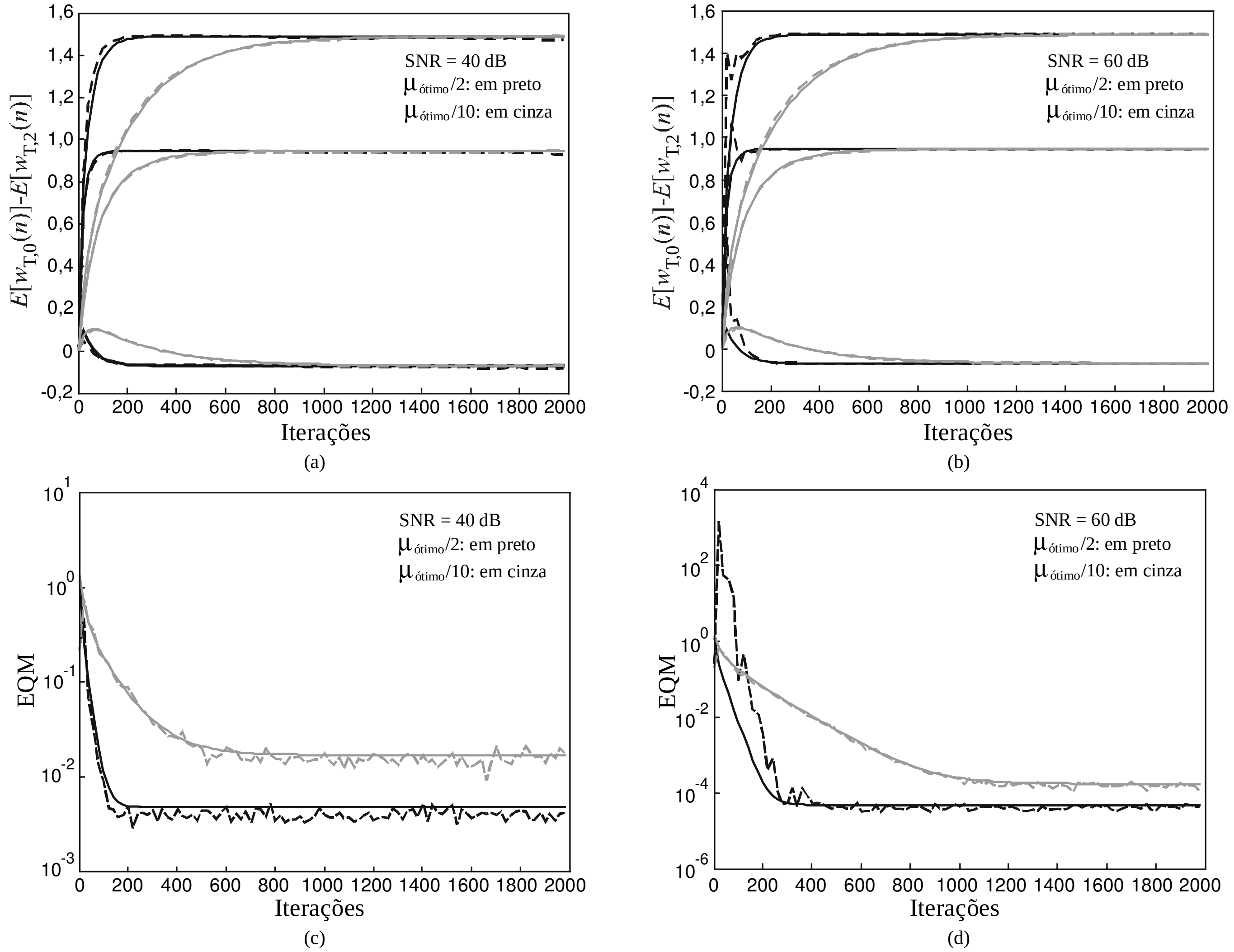

Fig. 1. Exemplo 1. Dispersão dos autovalores igual a 81 e $\alpha = 2$. (a) e (b) Curvas de comportamento médio dos coeficientes do filtro obtidas através de simulação MC (linhas tracejadas) e do modelo proposto $E[w_{\mathrm{T},i}(n)]$, $i = 0, 1, 2$ (linhas contínuas). (c) e (d) Curvas de EQM: simulação MC (linhas tracejadas) e modelo proposto Eqs. (17)-(18) (linhas contínuas).

Considerando-se que $\mathbf{g}(n)$ e $\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n)$ são independentes, o numerador de (27) pode ser rescrito como segue:

$$E[|\,\mathbf{g}^{\mathrm{H}}(n)\mathbf{x}_{\mathrm{T}}(n)\,|^2] = \mathrm{tr}[\mathbf{G}\mathbf{R}_{\mathrm{T}}]\,. \qquad (28)$$

Agora, dado que o denominador de (27) é a variância do ruído de medição $z(n)$, o grau de não-estacionariedade pode então ser escrito como

$$\alpha = \frac{1}{\sigma_z}\{\mathrm{tr}[\mathbf{G}\mathbf{R}_{\mathrm{T}}]\}^{1/2} = \frac{1}{\sigma_z}[(\sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_{N-1}^2)\sigma_{\mathbf{g}}^2]^{1/2} = \frac{\sigma_{\mathbf{g}}}{\sigma_z}[\mathrm{tr}(\mathbf{R}_{\mathrm{T}})]^{1/2}. \qquad (29)$$

V. Resultados de Simulação

O modelo estatístico do TD-εLMS aqui proposto é verificado a partir de um problema de identificação de sistemas. Os sinais de entrada utilizados são correlacionados e têm distribuição Gaussiana. Eles são obtidos de um processo AR(2) dado por

$$x(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + v(n)\,, \qquad (30)$$

onde $v(n)$ é um ruído branco com variância σ_v^2 de modo que a variância do sinal $x(n)$ seja igual a 1. Os coeficientes do processo auto-regressivo são: $a_2 = -0{,}85$ e a_1 selecionado de modo a controlar a dispersão dos autovalores do sinal de entrada $x(n)$. Dois valores de variância do ruído de medição $z(n)$ são considerados: 10^{-4} $(\mathrm{SNR} = 40\,\mathrm{dB})$ e 10^{-6} $(\mathrm{SNR} = 60\,\mathrm{dB})$. Note que, uma vez dados os parâmetros σ_z^2 e α como também a transformação ortogonal, obtém-se a partir de (29) a variância do processo de perturbação. Todas as simulações MC são obtidas utilizando-se uma média de 500 realizações independentes. Os coeficientes variantes no tempo da planta são obtidos da expressão (3), repetida aqui por conveniência. Assim,

$$\mathbf{w}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{o}}(n+1) = \mathbf{w}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{o}}(n) + \mathbf{g}(n)\,,$$

onde,

$$\mathbf{w}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{o}}(0) = \mathbf{T}[\mathrm{sinc}(0)\;\; \mathrm{sinc}(1/N) \cdots \mathrm{sinc}(N-1/N)]^{\mathrm{T}}\,. \qquad (31)$$

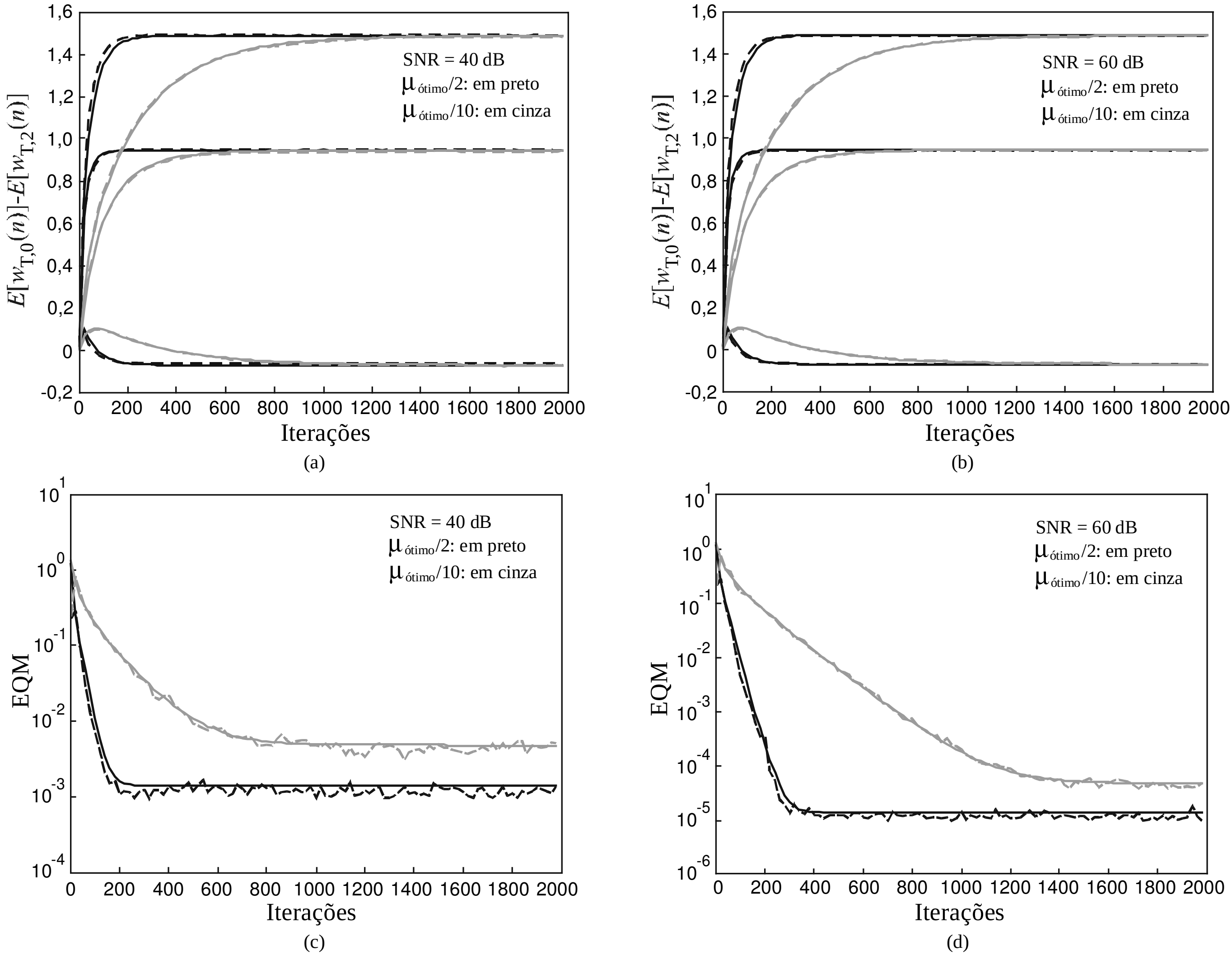

Fig. 2. Exemplo 2. Dispersão dos autovalores igual a 81 e $\alpha = 1$. (a) e (b) Curvas de comportamento médio dos coeficientes do filtro obtidas através de simulação MC (linhas tracejadas) e do modelo proposto $E[w_{\mathrm{T},i}(n)]$, $i = 0, 1, 2$ (linhas contínuas). (c) e (d) Curvas de EQM: simulação MC (linhas tracejadas) e modelo proposto Eqs. (17)-(18) (linhas contínuas).

A transformada ortogonal usada em todos os exemplos é a DCT; no entanto, deve ser ressaltado que o modelo aqui proposto não depende do tipo de transformação utilizado. O efeito da transformação é evidenciado a partir de sua habilidade em descorrelacionar o sinal de entrada.

O passo de adaptação μ usado nos exemplos é relacionado com o valor de passo ótimo $\mu_{\text{ótimo}}$ determinado em (26). A constante $\varepsilon = 0,001$ (parâmetro de regularização) é também considerada em todos os exemplos.

Exemplo 1

Para este exemplo, os seguintes parâmetros são considerados: $N = 8$, $M = 32$ e $\mu_{\text{ótimo}} = 0,0585$. A dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada é 81 e o grau de não-estacionaridade, dado por (29), é $\alpha = 2$. Nas Figs. 1(a) e 1(c) são ilustrados os momentos de primeira e segunda ordens dos coeficientes do filtro adaptativo para SNR de 40 dB, enquanto nas Figs. 1(b) e 1(d) é mostrado o caso com 60 dB. Para facilitar a visualização das curvas, nas figuras onde é ilustrada a evolução do valor esperado, apenas quatro coeficientes são plotados. Através das curvas do EQM, pode ser observado um descasamento entre o modelo proposto e o resultado de simulação durante a fase transitória. Tal descasamento é mais evidente para valores de passo de adaptação próximo a $\mu_{\text{ótimo}}$. Isso é decorrente das considerações simplificadoras usadas, as quais estão baseadas na condição de adaptação lenta $(\mu \ll \mu_{\text{ótimo}})$. Note, entretanto, que o comportamento médio dos coeficientes não apresenta tal descasamento, mesmo para valores maiores do passo de adaptação. As predições teóricas para o caso de $\mathrm{SNR} = 60\,\mathrm{dB}$ apresentam uma melhor concordância com os resultados de simulação devido à menor variância do processo de perturbação $\mathbf{g}(n)$.

Exemplo 2

Para este exemplo, são usados os mesmos parâmetros do Exemplo 1, porém com um diferente grau de não-estacionaridade $\alpha = 1$. Os resultados obtidos são mostrados na Fig. 2, seguindo o mesmo padrão de apresentação utilizado para a Fig. 1. Nesse caso, devido ao menor grau de não-estacionaridade, a precisão do modelo é melhor para ambos os valores de SNR usados.

VI. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma análise estatística do algoritmo εLMS no domínio transformado (TD-εLMS) operando em ambientes não-estacionários. Essa análise é independente da ordem do filtro bem como do tipo de transformação ortogonal utilizado. A comparação entre os resultados de simulação numérica e as predições obtidas pelo modelo proposto confirmam a eficácia das condições e simplificações de modelagem consideradas.

REFERÊNCIAS

[1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 3ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.

[2] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, 1998.

[3] B. Widrow and S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985.

[4] S. S. Narayan, A. M. Peterson, and M. J. Narasimha, "Transform domain LMS algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 31, no. 3, pp. 609-615, June 1983.

[5] S. Hosur and A. H. Tewfik, "Wavelet transform domain adaptive FIR filtering," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 45, no. 3, pp. 617-630, Mar. 1997.

[6] S. J. Chern, J. C. Horng, and K. M. Wong, "The performance of the hybrid LMS adaptive algorithm," *Elsevier Signal Processing*, vol. 44, pp. 67-88, June 1995.

[7] D. I. Kim and P. De Wilde, "Performance analysis of the DCT-LMS adaptive filtering algorithm," *Elsevier Signal Processing*, vol. 80, pp. 1629-1654, Aug. 2000.

[8] E. M. Lobato, O. J. Tobias e R. Seara, "Análise estatística do algoritmo LMS no domínio transformado," *Anais do XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Rio de Janeiro, RJ, Out. 2003, pp. 1-6.

[9] E. M. Lobato, O. J. Tobias e R. Seara, "Modelo analítico do algoritmo εLMS no domínio transformado para sinais de entrada Gaussianos," *Anais do XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Belém, PA, CD-ROM, artigo nº 282, Set. 2004, pp. 1-6.

[10] E. M. Lobato, O. J. Tobias e R. Seara, "A stochastic model for the transform-domain LMS algorithm," *Proc. 12th European Signal Process. Conf.*, Vienna, Austria, Sep. 2004, pp. 1833-1836.

[11] A. H. Sayed and T. Y. Al-Naffouri, "Mean-square analysis of normalized leaky adaptive filters," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process.*, Salt Lake City, USA, vol. 6, May 2001, pp. 3873-3876.

[12] C. G. Samson and U. Reddy, "Fixed point error analysis of the normalized ladder algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 31, no. 5, pp. 1177-1191, Oct. 1983.