

# Modelo do Algoritmo NLMS Aplicado a uma Estrutura em Sub-bandas com Decomposição Generalizada

Javier E. Kolodziej, Orlando J. Tobias e Rui Seara

**Resumo**—Este trabalho apresenta um modelo estatístico para o algoritmo NLMS aplicado a uma estrutura em sub-bandas com decomposição generalizada (GSD-NLMS). Tal estrutura é utilizada como uma alternativa à estrutura clássica FIR-NLMS implementada na forma direta. A abordagem em sub-bandas permite abrandar o problema de convergência lenta quando o sinal de entrada é correlacionado. O modelo analítico proposto descreve os momentos de primeira e segunda ordens do vetor de coeficientes da estrutura adaptativa em questão. A análise usada leva em conta a natureza variante do passo de adaptação como também o parâmetro de regularização (adicionado à estimativa de potência média) que evita a divisão por zero na operação de normalização de potência do algoritmo. Através dos resultados de simulação, pode ser comprovada a qualidade de predição obtida pelo modelo aqui proposto.

**Palavras-Chave**—Algoritmo NLMS, decomposição em sub-bandas, modelo analítico.

**Abstract**—This paper presents a stochastic model for the NLMS algorithm using a structure with generalized subband decomposition (GSD-NLMS). Such an algorithm is used as an alternative to the standard NLMS one to overcome the convergence problems under correlated input signals. Analytical models for the first and second moments of the filter weight vector are presented. The analysis used takes into account the time-varying nature of the step-size parameter as well as the regularization parameter (added to the power estimate) which prevents division by zero in the power normalization operation. Through simulation results the accuracy of the model here derived is assessed.

**Keywords**—NLMS algorithm, subband decomposition, analytical model.

## I. INTRODUÇÃO

Devido à sua simplicidade, o algoritmo LMS é amplamente utilizado para a implementação de filtros FIR adaptativos. Porém, quando o sinal de entrada é correlacionado, a convergência do algoritmo LMS padrão torna-se muito lenta. Para mitigar tal problema, podem ser consideradas duas

alternativas: usar um outro algoritmo de adaptação com melhor desempenho para esse tipo de sinal (por exemplo, o algoritmo RLS); ou uma outra estrutura mais adequada para tal condição. Seguindo a segunda opção, constata-se que muitas estruturas com decomposição em sub-bandas têm sido propostas para implementar o algoritmo FIR-LMS. Uma dessas estruturas é baseada na decomposição generalizada em sub-bandas (GSD) [1], [2]. O procedimento de decomposição apresentado em [1] consiste em implementar um filtro FIR fixo, de comprimento  $N$ , através da conexão em paralelo de  $M$  ramos, com  $1 \leq M \leq N$ , na qual cada ramo é composto pela cascata de um filtro interpolador e um filtro esparso. Na versão adaptativa [2], o interpolador é mantido fixo (implementado através de uma transformação ortogonal: DCT, DFT, etc.) e o filtro esparso, por sua vez, caracteriza a parte adaptativa da estrutura. Desse modo, a atuação de cada filtro esparso sobre uma determinada banda de frequência resultará, para a estrutura adaptativa global, em um aumento da velocidade de convergência. Além do mais, em algumas aplicações, as sub-bandas que pouco contribuem para a resposta em frequência total podem ser desconsideradas, reduzindo-se, assim, o número de operações necessárias para implementar o algoritmo. Adicionalmente, a convergência de cada filtro esparso pode ser melhorada através do uso do algoritmo NLMS [2]. O algoritmo resultante é denominado GSD-NLMS, podendo ser visto como uma generalização do algoritmo NLMS transformado (TD-NLMS). Esse algoritmo (GSD-NLMS) ainda apresenta uma vantagem adicional: um menor tamanho de transformação ortogonal [2].

Neste trabalho, é apresentado um modelo estocástico para o algoritmo GSD-NLMS. Assim, são propostas expressões analíticas para o primeiro e segundo momentos do vetor de coeficientes do filtro adaptativo, considerando sinais de entrada Gaussianos. A derivação dessas expressões considera a natureza variável no tempo do passo de adaptação como também o parâmetro de regularização (adicionado à estimativa de potência) que evita a divisão por zero na operação de normalização de potência do algoritmo. Tais considerações não foram até então utilizadas nos trabalhos disponíveis na literatura [2]. Sendo assim, a estrutura e seu modelo aqui descritos representam um novo resultado para o algoritmo GSD-NLMS. Através de simulações numéricas, pode-se verificar a qualidade do modelo apresentado.

Javier E. Kolodziej, Orlando J. Tobias e Rui Seara, LINSE – Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, E-mails: {javier, orlando, seara}@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## II. ALGORITMO NLMS USANDO UMA ESTRUTURA COM DECOMPOSIÇÃO EM SUB-BANDAS GENERALIZADA

Nesta seção, são apresentadas as expressões básicas que descrevem o algoritmo GSD-NLMS [1].

### A. Decomposição de um Filtro FIR em Sub-bandas Generalizada

Consideremos então um filtro FIR de comprimento  $N$  cuja função de transferência é dada por

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i z^{-i}. \quad (1)$$

Esse filtro pode ser implementado através de uma estrutura em sub-bandas com  $M$  ramos; cada ramo é composto pela cascata de um filtro interpolador e um filtro esparsos. Assim,

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix} \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} G_0(z^L) \\ G_1(z^L) \\ \vdots \\ G_{M-1}(z^L) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

onde

$$G_k(z^L) = \sum_{l=0}^{K-1} g_{k,l} z^{-lL}. \quad (3)$$

Em (2),  $\mathbf{T}$  caracteriza uma matriz não-singular de dimensão  $M \times M$ ,  $L$  é o fator de esparsidade,  $M$  denota o tamanho da transformação ortogonal (número de ramos) e  $K$ , o número de coeficientes em cada filtro esparsos. A relação existente entre tais parâmetros é

$$N = (K-1)L + M. \quad (4)$$

A expressão (2) representa um sistema de  $N$  equações e  $K \times M$  incógnitas. Para  $L < M$ , os coeficientes da estrutura em sub-bandas não são únicos, podendo ser escolhidos a partir de um conjunto infinito de valores [2].

Em relação aos filtros interpoladores, esses são em geral de dimensão  $M$ , sendo obtidos por

$$F_k(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix} \mathbf{t}_k, \quad (5)$$

onde  $\mathbf{t}_k$  é a  $k$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{T}^T$ .

### B. Versão Adaptativa da Estrutura GSD-FIR

A estrutura de filtragem adaptativa, mostrada na Fig. 1, considera os seguintes sinais:  $x(n)$  sinal de entrada, o qual é processado primeiramente pela transformação unitária  $\mathbf{T}$  de dimensão  $M$ , gerando os sinais  $u_k(n)$ , com  $k = 0, 1, \dots, M-1$ . Esses sinais são posteriormente processados pelos filtros esparsos  $G_k(z)$ . O vetor  $\mathbf{u}(n) \in \mathbb{C}^M$ , contendo as amostras transformadas, é descrito como

$$\mathbf{u}(n) = [u_0(n) \ u_1(n) \ \dots \ u_{M-1}(n)]^T, \quad (6)$$

estando relacionado com o vetor de entrada através da expressão

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{T} \mathbf{x}(n), \quad (7)$$

com

$$\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-M+1)]^T. \quad (8)$$

Definindo-se o vetor de coeficientes  $\mathbf{g}_\ell(n) \in \mathbb{C}^M$  como o vetor contendo o  $\ell$ -iésimo coeficiente de cada subfiltro esparsos, obtém-se

$$\mathbf{g}_\ell(n) = [g_{0,\ell}(n) \ g_{1,\ell}(n) \ \dots \ g_{M-1,\ell}(n)]^T, \quad \ell = 0, 1, \dots, K-1. \quad (9)$$

Assim, a saída do filtro  $y(n)$  é determinada a partir dos  $K$  vetores  $\mathbf{g}_\ell(n)$ , dada por

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^{K-1} \mathbf{u}^T(n - \ell L) \mathbf{g}_\ell(n). \quad (10)$$

O sinal de erro  $e(n)$  correspondente é então

$$e(n) = d(n) - y(n), \quad (11)$$

onde  $d(n)$  representa o sinal desejado.

A equação de atualização dos coeficientes, usando-se o algoritmo NLMS, é escrita como

$$\mathbf{g}_\ell(n+1) = \mathbf{g}_\ell(n) + 2\mu \mathbf{D}^{-1} e(n) \mathbf{u}^*(n - \ell L), \quad \ell = 0, 1, \dots, K-1. \quad (12)$$

Em (12),  $\mu$  caracteriza o passo de adaptação e “\*” denota o complexo conjugado.

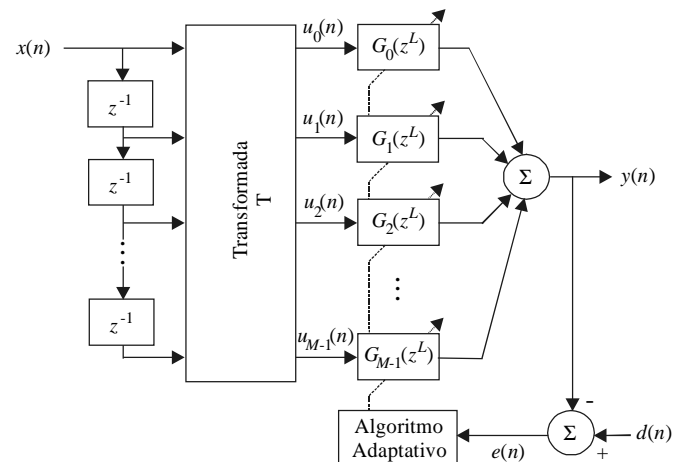


Fig. 1. Diagrama em blocos do algoritmo GSD-LMS.

## III. ANÁLISE

### A. Normalização do Passo de Adaptação

A operação de normalização da potência em (12) é efetuada multiplicando-se  $\mu$  pela inversa da matriz diagonal  $\mathbf{D}$ . Os elementos dessa matriz são as variâncias dos sinais  $u_k(n)$ , representadas por  $\sigma_k^2$ . Assim, a estrutura de  $\mathbf{D}$  é

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{M-1}^2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Note que, para implementar o algoritmo GSD-NLMS, é necessário se ter o conhecimento das variâncias  $\sigma_k^2$  para proceder com a operação de normalização. Em nosso caso, a matriz  $\mathbf{D}$  é substituída por sua versão variante no tempo, denotada por  $\mathbf{D}(n)$ . Essa última matriz, também diagonal, tem como elementos  $\sigma_i^2(n)$ , os quais são determinados a partir da seguinte expressão [3]:

$$\sigma_i^2(n) = \frac{1}{M_w} \sum_{k=0}^{M_w-1} |u_i(n-k)|^2, \quad (14)$$

onde  $u_i(n)$ , para  $i=0,1,\dots,M-1$ , representa a  $i$ -ésima amostra transformada, e  $M_w$  é a dimensão da janela de observação. Assumindo-se que  $M_w$  tenha um valor suficientemente grande, pode-se manipular (14) para implementá-la de forma recursiva. Assim,

$$\sigma_i^2(n) = \frac{1}{M_w} \sum_{k=0}^{M_w-1} |u_i(n-k)|^2 = \frac{1}{M_w} |u_i(n)|^2 + \frac{1}{M_w} \sum_{k=1}^{M_w-1} |u_i(n-k)|^2. \quad (15)$$

Assumindo-se  $M_w \gg 1$ , tem-se a seguinte aproximação para (15):

$$\sigma_i^2(n-1) = \frac{1}{M_w} \sum_{k=1}^{M_w-1} |u_i(n-k)|^2 \cong \frac{1}{M_w-1} \sum_{k=1}^{M_w-1} |u_i(n-k)|^2. \quad (16)$$

Combinando-se então (15) e (16), obtém-se

$$\sigma_i^2(n) = \sigma_i^2(n-1) + \frac{1}{M_w} \left[ |u_i(n)|^2 - \sigma_i^2(n-1) \right], \quad i=0,1,\dots,M-1. \quad (17)$$

Finalmente, para prevenir uma possível divisão por zero na determinação da inversa  $\mathbf{D}^{-1}(n)$ , uma prática comum é adicionar uma constante positiva  $\varepsilon$ , de valor pequeno, a cada elemento da diagonal. Tal constante é denominada parâmetro de regularização. Assim, neste trabalho, tal parâmetro é também considerado na derivação do modelo. Portanto, a estrutura da matriz de normalização  $\mathbf{D}(n)$  é

$$\mathbf{D}(n) = \begin{bmatrix} \sigma_0^2(n) + \varepsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{M-1}^2(n) + \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (18)$$

### B. Comportamento Médio do Vetor de Coeficientes

Definindo-se o vetor  $\mathbf{g}(n) \in \mathbb{C}^{K \times M}$  de tal forma que ele contenha todos os coeficientes dos filtros esparsos, tem-se

$$\mathbf{g}(n) = [\mathbf{g}_0^T(n) \mathbf{g}_1^T(n) \dots \mathbf{g}_{K-1}^T(n)]^T. \quad (19)$$

O vetor de entradas transformadas ampliado  $\mathbf{u}_a(n) \in \mathbb{C}^{K \times M}$  é definido por

$$\mathbf{u}_a(n) = \{\mathbf{u}^T(n) \mathbf{u}^T(n-L) \dots \mathbf{u}^T[n-(K-1)L]\}^T. \quad (20)$$

Agora podemos rescrever a expressão do sinal de saída dado em (10), como

$$y(n) = \mathbf{u}_a^T(n) \mathbf{g}(n). \quad (21)$$

Similarmente ao vetor  $\mathbf{u}_a(n)$ , podemos também definir o vetor de entrada ampliado  $\mathbf{x}_a(n) \in \mathbb{C}^{K \times M}$  como

$$\mathbf{x}_a(n) = \{\mathbf{x}^T(n) \mathbf{x}^T(n-L) \dots \mathbf{x}^T[n-(K-1)L]\}^T. \quad (22)$$

Desta forma, considerando-se que os sinais transformados  $u_k(n)$  estão vinculados ao sinal de entrada através de (7), os vetores definidos em (21) e (22) estão relacionados por

$$\mathbf{u}_a(n) = \mathbf{W} \mathbf{x}_a(n), \quad (23)$$

onde a matriz  $\mathbf{W}$  de dimensão  $KM \times KM$  está relacionada com a matriz de transformação  $\mathbf{T}$  de dimensão  $M \times M$  através da seguinte expressão:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

onde  $\mathbf{0}$  representa uma matriz nula de dimensão  $M \times M$ .

Assim, a equação de atualização para o vetor  $\mathbf{g}(n)$  é dada por

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n) + 2\mu \mathbf{D}_a^{-1}(n) [d(n) - y(n)] \mathbf{u}_a^*(n), \quad (25)$$

onde

$$\mathbf{D}_a(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Substituindo-se (21) em (25), e determinando-se o valor esperado em ambos os lados da expressão resultante, tem-se

$$E[\mathbf{g}(n+1)] = E[\mathbf{g}(n)] + 2\mu E[\mathbf{D}_a^{-1}(n) \mathbf{u}_a^*(n) d(n)] - 2\mu E[\mathbf{D}_a^{-1}(n) \mathbf{u}_a^*(n) \mathbf{u}_a^T(n)] E[\mathbf{g}(n)]. \quad (27)$$

Para determinar os valores esperados de (27), utilizam-se as seguintes considerações:

- i)  $\mathbf{g}(n)$  e  $\mathbf{u}_a(n)$  são estatisticamente independentes [2], [4], [5].
- ii)  $\mathbf{D}_a^{-1}(n)$  e  $\mathbf{u}_a^*(n) \mathbf{u}_a^T(n)$  são processos conjuntamente estacionários e  $\mathbf{D}_a^{-1}(n)$  tem uma variação lenta em relação a  $\mathbf{u}_a^*(n) \mathbf{u}_a^T(n)$ . Dessa forma, o Princípio da Média [6] pode ser invocado.

Então, para determinar  $E[\mathbf{D}_a^{-1}(n) \mathbf{u}_a^*(n) \mathbf{u}_a^T(n)]$ , considera-se o  $i$ -ésimo elemento da diagonal da matriz  $\mathbf{D}_a^{-1}(n) \mathbf{u}_a^*(n) \mathbf{u}_a^T(n)$ , dado por  $[u_i^2(n) [\sigma_i^2(n) + \varepsilon]^{-1}]$ , onde, para fins de implementação,  $\sigma_i^2(n)$  é obtido a partir de (17). No entanto, para a modelagem, visando obter expressões matemáticas mais tratáveis, utiliza-se a forma equivalente não-recursiva [equação (15)] para determinar o  $\sigma_i^2(n)$ . Assim, o  $i$ -ésimo elemento da diagonal é dado por

$$[u_i^2(n)M_w][u_i^2(n) + u_i^2(n-1) + \dots + u_i^2(n-M_w+1) + M_w\epsilon]^{-1}. \quad (28)$$

Em (28), considera-se que o termo com expoente negativo tem variação lenta quando comparado com  $u_i^2(n)$ , permitindo assim a aplicação de (ii), resultando em

$$E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)\mathbf{u}_a^*(n)\mathbf{u}_a^T(n)] \approx E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]E[\mathbf{u}_a^*(n)\mathbf{u}_a^T(n)] \\ = E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a}. \quad (29)$$

Similarmente, para o valor esperado do outro termo de (27), tem-se

$$E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)\mathbf{u}_a^*(n)d(n)] \approx E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]E[\mathbf{u}_a^*(n)d(n)] \\ = E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]\mathbf{p}_{\mathbf{u}_a d}, \quad (30)$$

onde  $\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a} = E[\mathbf{u}_a^*(n)\mathbf{u}_a^T(n)]$  é a matriz de autocorrelação do sinal de entrada transformado e  $\mathbf{p}_{\mathbf{u}_a d} = E[\mathbf{u}_a^*(n)d(n)]$  é o vetor de correlação cruzada entre o sinal de entrada transformado e o sinal desejado. Substituindo-se (29) e (30) em (27), obtém-se

$$E[\mathbf{g}(n+1)] = \{\mathbf{I} - 2\mu E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a}\}E[\mathbf{g}(n)] \\ + 2\mu E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]\mathbf{p}_{\mathbf{u}_a d}. \quad (31)$$

A derivação do momento de primeira ordem de  $\mathbf{g}(n)$  é finalmente concluído determinando-se o valor esperado  $E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]$ . Assim, assumindo-se que o processo  $\{u_i^2(n)\}$  tem uma distribuição *qui*-quadrado com  $M_w$  graus de liberdade [7], o valor esperado procurado é dado por [3]

$$E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] = \frac{M_w}{(M_w - 2)}[\text{diag}(\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a})]^{-1} \\ - \epsilon \frac{M_w^2}{(M_w - 2)(M_w - 4)}[\text{diag}(\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a}^2)]^{-1}. \quad (32)$$

### C. Curva de Aprendizagem e Momento de Segunda Ordem do Vetor de Erro

O vetor de erro nos coeficientes é definido pela expressão  $\mathbf{f}(n) = \mathbf{g}(n) - \mathbf{g}_\infty$ , onde  $\mathbf{g}_\infty$  é o valor em regime permanente do vetor de coeficientes da estrutura em sub-bandas. Assumindo-se que o algoritmo converge, tal valor é obtido de (31) fazendo-se  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{g}(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{g}(n)] = \mathbf{g}_\infty$ . Agora, expressando-se o sinal de erro em função do vetor de erro, tem-se

$$e(n) = d(n) - \mathbf{u}_a^T(n)\mathbf{f}(n) - \mathbf{u}_a^T(n)\mathbf{g}_\infty + z(n) \\ = e_o(n) - \mathbf{u}_a^T(n)\mathbf{f}(n), \quad (33)$$

onde  $z(n)$  representa o erro de medição, o qual é uma variável aleatória i.i.d, com média zero e variância  $\sigma_z^2$ , não correlacionada com qualquer outro sinal do sistema; e  $e_o(n)$  é o erro de estimação, dado por

$$e_o(n) = d(n) - \mathbf{u}_a^T(n)\mathbf{g}_\infty + z(n). \quad (34)$$

Elevando-se ao quadrado ambos os lados de (33), e calculando-se o valor esperado da expressão resultante, tem-se

$$E[e^2(n)] = E[e_o^2(n)] - 2E[e_o(n)\mathbf{u}_a^T(n)\mathbf{f}(n)] \\ + E[\mathbf{f}^T(n)\mathbf{u}_a(n)\mathbf{u}_a^T(n)\mathbf{f}(n)]. \quad (35)$$

Pelo Princípio da Ortogonalidade tem-se que  $E[e_o(n)\mathbf{u}_a(n)] = 0$ . Além disso, as variáveis  $\mathbf{u}_a(n)$  e  $\mathbf{g}(n)$  são estatisticamente independentes. Então, a expressão da curva de aprendizagem pode ser escrita como

$$E[e^2(n)] = e_{\min} - \text{tr}\{\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a}^* E[\mathbf{f}^*(n)\mathbf{f}^T(n)]\}, \quad (36)$$

onde  $e_{\min} = E[e_o^2(n)]$  é o mínimo erro atingível em regime permanente. Note que (36) é completamente determinada se a matriz de covariância do vetor de erro  $\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{f}^*(n)\mathbf{f}^T(n)]$  é conhecida. Para tal fim, podemos subtrair  $\mathbf{g}_\infty$  de ambos os lados de (25), determinar o produto externo  $\mathbf{f}^*(n)\mathbf{f}^T(n)$  e tomar o valor esperado em ambos os lados da expressão resultante. Dessa forma, obtém-se

$$\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{K}(n) - 2\mu\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a}^* E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] \\ - 2\mu E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a}^* \mathbf{K}(n) + 4\mu^2 E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] \\ \times \left\{ 2\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a}^* \mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a}^* + \mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a}^* \text{tr}[\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a}^* \mathbf{K}(n)] \right\} \\ \times E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)] + 4\mu^2 E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]\mathbf{R}_{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_a}^* E[\mathbf{D}_a^{-1}(n)]e_{\min}. \quad (37)$$

## IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Para verificar a precisão do modelo proposto, são apresentados alguns resultados de simulação numérica, considerando-se um problema de identificação de sistema. Assim, consideraremos então dois exemplos: um com sinal de entrada não-correlacionado e outro com um sinal correlacionado, esse último obtido a partir de um processo auto-regressivo AR(2), dado por

$$x(n) = a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + v(n), \quad (38)$$

onde  $v(n)$  é um sinal branco com variância unitária. Os coeficientes do modelo auto-regressivo são:  $a_1 = -1,3214$  e  $a_2 = 0,8500$ . A dispersão dos autovalores é 305,9. O ruído de medição  $z(n)$  utilizado tem uma variância  $\sigma_z^2 = 10^{-4}$  (SNR = 40 dB). Os outros parâmetros são:  $M = 4$ ,  $K = 4$ ,  $L = 2$  e  $M_w = 32$ . O comprimento do filtro FIR equivalente, calculado a partir de (4), é  $N = 10$ .

A Fig. 2 ilustra a comparação entre o modelo proposto e os resultados obtidos por simulação Monte Carlo (MC), considerando-se o sinal de entrada não-correlacionado. A Fig. 2(a) mostra os coeficientes do primeiro filtro esparsos

$(g_{00} g_{01} g_{02} g_{03})$  e a Fig. 2(b) ilustra as curvas de aprendizagem. A Fig. 3 apresenta o mesmo padrão da Fig. 2, considerando-se agora um sinal de entrada correlacionado. Em ambos os casos, é observado um bom casamento entre o modelo proposto e os resultados de simulação. As Figs. 2(b) e 3(b) ilustram, para fins de comparação, as curvas de aprendizagem obtidas a partir do algoritmo NLMS padrão. Dessas figuras, observa-se, para um sinal de entrada não-correlacionado, que o uso de uma estrutura em sub-bandas não proporciona qualquer melhora na velocidade de convergência do algoritmo. Entretanto, quando o sinal de entrada é correlacionado, tal estrutura proporciona um considerável ganho de velocidade de convergência quando comparada com uma implementação FIR na forma direta.

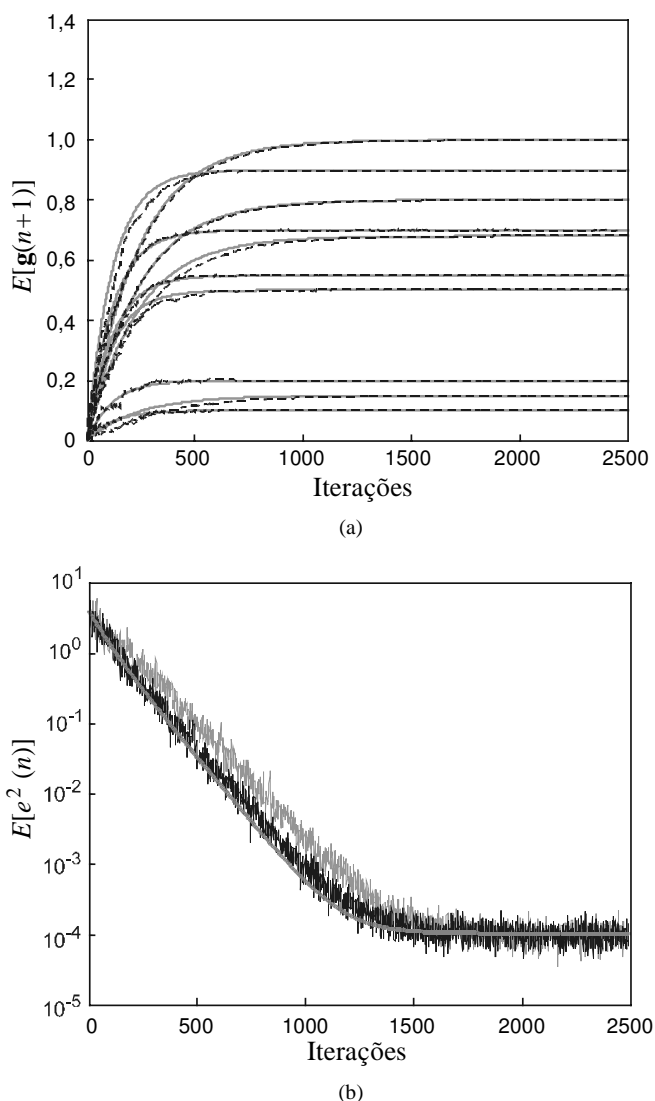


Fig. 2. Comportamento do algoritmo GSD-NLMS para um sinal de entrada branco e  $\mu = 0,004$ . (a) Comportamento médio dos coeficientes. (Linha tracejada preta) simulação MC (média de 200 rodadas independentes). (Linha contínua cinza) modelo proposto. (b) Curvas de EQM: (Linha irregular preta) simulação MC; (linha contínua cinza) modelo proposto; (linha irregular cinza) simulação MC do algoritmo FIR-NLMS na forma direta apenas para efeito de comparação.

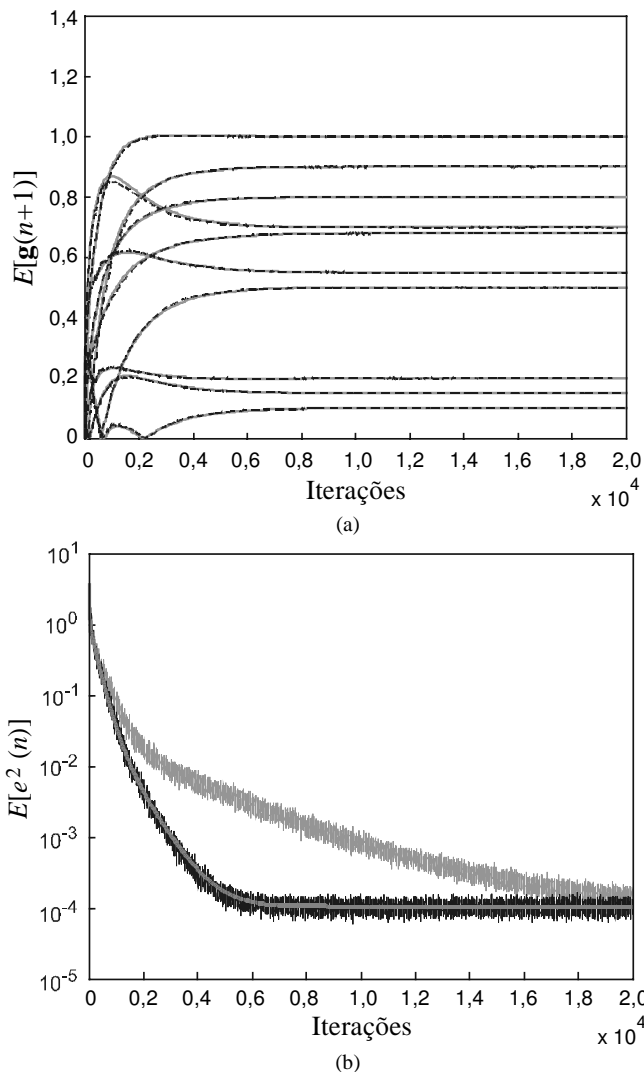


Fig. 3. Comportamento do algoritmo GSD-NLMS para um sinal de entrada correlacionado e  $\mu = 0,004$ . (a) Comportamento médio dos coeficientes. (Linha tracejada preta) simulação MC (média de 200 rodadas independentes). (Linha contínua cinza) modelo proposto. (b) Curvas de EQM: (Linha irregular preta) simulação MC; (linha contínua cinza) modelo proposto; (linha irregular cinza) simulação MC do algoritmo FIR-NLMS na forma direta apenas para efeito de comparação.

## V. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma análise estatística do algoritmo GSD-NLMS. Tal análise é independente da ordem do filtro adaptativo como também do tipo de transformação ortogonal utilizada. São propostos modelos analíticos para os momentos de primeira e segunda ordens do vetor de coeficientes dos filtros adaptativos, considerando-se a hipótese de adaptação lenta. No modelo desenvolvido, é também levado em conta o parâmetro de regularização que evita a divisão por zero na operação de normalização de potência do algoritmo.

## REFERÊNCIAS

[1] S. K. Mitra, A. M. Mahalanobis, and T. Saramäki, "A generalized structural subband decomposition of FIR filters and its applications in efficient FIR filter design and implementation," *IEEE Trans. Circuits and Systems II*, vol. 40, no. 6, pp. 363-374, Jun 1993.

- [2] M. R. Petraglia and S. K. Mitra, "Adaptive FIR filter structure based on the generalized subband decomposition of FIR filters," *IEEE Trans. Circuits and Systems II*, vol. 40, no. 6, pp. 354-362, Jun 1993.
- [3] E. M. Lobato, O. J. Tobias e R. Seara, "Modelo analítico do algoritmo  $\epsilon$ LMS no domínio transformado para sinais de entrada Gaussianos," *Anais do XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Belém, PA, CD-ROM, artigo nº 282, Set. 2004, pp. 1-6.
- [4] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4<sup>th</sup> ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.
- [5] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, 1998.
- [6] C. G. Samson and U. Reddy, "Fixed point error analysis of the normalized ladder algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 31, no. 5, pp. 1177-1191, Oct 1983.
- [7] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 3<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill, 1991.