

Análise Estatística dos Momentos de Primeira e Segunda Ordens do Algoritmo LMS de Erro Filtrado Modificado

Juan R.V. López, Javier E. Kolodziej, Orlando J. Tobias e Rui Seara

Resumo—Este artigo apresenta um modelo analítico para os momentos de primeira e segunda ordens do algoritmo LMS de erro filtrado modificado (MFE-LMS). O modelo proposto é obtido sem usar a teoria da independência e levando em conta a hipótese de adaptação lenta. Simulações numéricas ratificam a boa concordância existente entre os resultados obtidos pelo método Monte Carlo e pelo modelo proposto, tanto para sinal de entrada Gaussiano branco quanto para colorido.

Palavras-Chave—Adaptação lenta, algoritmo LMS, algoritmo MFE-LMS, teoria da independência.

Abstract—This paper presents an analytical model for the first and second moments of the modified filtered error LMS algorithm (MFE-LMS). The proposed model is obtained without using the independence theory and taking into account the slow adaptation assumption. Numerical simulations attest the good agreement between the results obtained by the Monte Carlo method and those of the proposed model for both white and colored Gaussian inputs.

Keywords—Slow adaptation, algorithm LMS, algorithm MFE-LMS, independence theory.

I. INTRODUÇÃO

Filtros adaptativos têm sido usados com sucesso em uma grande variedade de aplicações práticas, como comunicações, radar, sismologia, eletrônica biomédica, controle ativo de ruído acústico e vibrações, dentre outras. Em algumas dessas aplicações, a implementação direta da estrutura adaptativa não é viável. Tal obstáculo ocorre porque nem sempre o sinal de erro desejado para atualização do vetor de coeficientes se encontra disponível (acessível) para ser usado diretamente pelo algoritmo. Nesse caso, é obtida apenas uma versão filtrada do sinal de erro. Essa situação é comum em aplicações de controle ativo de ruído acústico e vibrações como também em cancelamento de eco acústico. Nesses casos, devem ser utilizados algoritmos adaptativos de erro

filtrado. No entanto, tais algoritmos apresentam um comportamento pobre tanto em velocidade de convergência quanto em estabilidade. Para contornar tais problemas, uma modificação no algoritmo foi proposta em [1]. O resultado de tal alteração é que o algoritmo modificado agora se comporta como um algoritmo LMS convencional. Isto é, as características de velocidade de convergência e estabilidade foram restabelecidas àquelas de um algoritmo LMS convencional. Tal algoritmo é denominado algoritmo LMS de erro filtrado modificado [1], [2].

Na literatura, podemos encontrar três tipos de algoritmos pertencentes à família de algoritmos adaptativos de erro filtrado, a saber: LMS filtrado (Fx-LMS) [3], [4], que é amplamente utilizado em aplicações de controle ativo de ruído acústico; LMS filtrado modificado [2], que é uma versão modificada do Fx-LMS padrão; e LMS de erro filtrado (FE-LMS) [5], que é usado como uma implementação alternativa ao algoritmo Fx-LMS em diversas aplicações [6]: cancelamento de eco, equalização adaptativa, dentre outras.

Muitas análises estatísticas de diferentes versões do algoritmo LMS têm sido realizadas à luz da teoria da independência (TI) [7], [8]. Entretanto, existem algumas situações em que tal teoria não pode mais ser aplicada, uma delas é o caso do algoritmo Fx-LMS. Por exemplo, em [9], [10], um modelo analítico para o algoritmo Fx-LMS sem invocar a suposição da TI é derivado. Nesse modelo, são consideradas todas as correlações entre os vetores de entrada para tempos diferentes. Dessa forma, e para sinais Gaussianos, o modelo resultante prediz muito bem o comportamento do algoritmo.

Neste trabalho, é apresentado um modelo analítico para o algoritmo LMS de erro filtrado modificado. Da mesma forma que no algoritmo Fx-LMS, devido às características dos sinais envolvidos, a TI não pode mais ser invocada. Assim, os momentos de primeira e segunda ordens do vetor de coeficientes do algoritmo FE-LMS modificado são determinados. Também, por simplicidade matemática, o momento de segunda ordem é aqui desenvolvido utilizando-se a hipótese de adaptação lenta e sinais de entrada Gaussianos. A comparação entre os resultados de simulação Monte Carlo mostra uma boa concordância com as predições obtidas a partir do modelo proposto, tanto para sinal de entrada branco quanto para colorido.

Juan R. V. Lopez, Javier E. Kolodziej, Orlando J. Tobias e Rui Seara, LINSE – Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, E-mails: {juanrodrigov, javier, orlando, seara}@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

O artigo está organizado como segue. A Seção II apresenta a análise estatística do algoritmo MFE-LMS. Inicialmente, é descrito o algoritmo FE-LMS e introduzida a sua versão modificada que é o objeto de estudo deste trabalho. Ainda nesta seção, é apresentada uma modelagem para o comportamento médio dos coeficientes e também para o erro quadrático médio do algoritmo MFE-LMS. A Seção III apresenta e discute os resultados obtidos via simulação Monte Carlo (MC) e através do modelo estatístico proposto. Finalmente, na Seção IV, são apresentadas as conclusões do trabalho.

II. ANÁLISE DO ALGORITMO MFE-LMS

A. Algoritmo FE-LMS

A Fig. 1 ilustra o diagrama em blocos do algoritmo FE-LMS. Os sinais que descrevem o comportamento desse algoritmo são mostrados no diagrama, onde a notação utilizada é a seguinte:

$\mathbf{w}_o = [w_{o,0} \ w_{o,1} \ \dots \ w_{o,N-1}]^T$ é a resposta ao impulso da planta; $\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \dots \ w_{N-1}(n)]^T$ denota o vetor de coeficientes do filtro adaptativo; $\mathbf{s} = [s_0 \ s_1 \ \dots \ s_{M-1}]^T$ é a resposta ao impulso do caminho de erro. $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-N+1)]^T$ e $\mathbf{x}_f(n) = [x_{f(n)} \ x_{f(n-1)} \ \dots \ x_{f(n-N+1)}]^T$ representam o vetor de entrada e o vetor do sinal de referência filtrado, respectivamente; e $d(n)$ é o sinal desejado. Nessa análise, $\mathbf{x}(n)$ é assumido Gaussiano com variância σ_x^2 . As dimensões de \mathbf{w}_o e $\mathbf{w}(n)$ são consideradas iguais para fins de simplicidade no tratamento matemático.

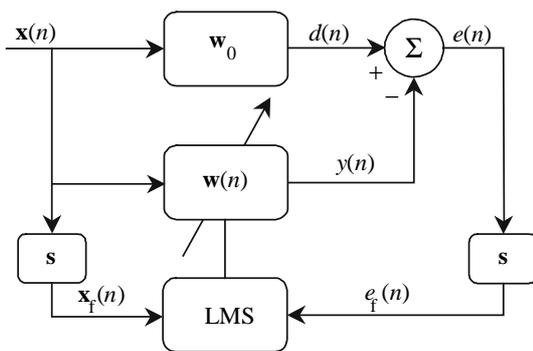


Fig. 1. Diagrama de blocos do algoritmo FE-LMS.

A partir da Fig. 1, obtém-se o sinal de erro, dado por

$$e(n) = d(n) - y(n), \quad (1)$$

onde os sinais $d(n)$ e $y(n)$ são, respectivamente:

$$d(n) = \mathbf{w}_o^T \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}_o, \quad (2)$$

e

$$y(n) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}(n). \quad (3)$$

Agora, substituindo-se (3) em (1), tem-se

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n). \quad (4)$$

Os sinais de referência e de erro filtrados, utilizados para a operação de atualização dos coeficientes, são

$$\mathbf{x}_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{x}(n-i), \quad (5)$$

$$e_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i e(n-i). \quad (6)$$

Substituindo-se (4) em (6), obtém-se uma expressão do erro filtrado instantâneo em função do sinal desejado e da saída do filtro adaptativo. Assim,

$$e_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}^T(n-i) \mathbf{x}(n-i). \quad (7)$$

Finalmente, a equação de atualização dos coeficientes é dada por [11]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu e_f(n) \mathbf{x}_f(n). \quad (8)$$

B. Algoritmo FE-LMS Modificado

O algoritmo FE-LMS modificado (MFE-LMS) advém da compensação do erro instantâneo filtrado [dado por (7)] do algoritmo FE-LMS. Essa compensação é obtida incluindo-se o termo $-\Lambda_f(n)$ em (7). Dessa forma, tem-se uma expressão para o erro compensado $\hat{e}_f(n)$, dada por [1]

$$\hat{e}_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}^T(n-i) \mathbf{x}(n-i) - \Lambda_f(n). \quad (9)$$

O termo $\Lambda_f(n)$ é determinado forçando-se (9) ser igual ao erro do LMS convencional [1]. Assim,

$$\begin{aligned} e(n)|_{\text{LMS}} &= d_f(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}_f(n) \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n-i). \end{aligned} \quad (10)$$

Note que, em (10), o erro depende do valor atual do vetor de coeficientes do filtro adaptativo. Assim, de (9) e (10) obtém-se o fator de transformação $\Lambda_f(n)$, dado por

$$\Lambda_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i [\mathbf{w}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-i)] \mathbf{x}(n-i). \quad (11)$$

O termo $[\mathbf{w}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-i)]$ é obtido utilizando-se (8); assim, a expressão para $\Lambda_f(n)$ é escrita como

$$\Lambda_f(n) = \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i s_i \hat{e}_f(n-j) \mathbf{x}_f^T(n-j) \mathbf{x}(n-i). \quad (12)$$

Substituindo-se (12) em (9), obtemos a seguinte expressão para o erro do algoritmo MFE-LMS:

$$\begin{aligned} \hat{e}_f(n) &= \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}^T(n-i) \mathbf{x}(n-i) \\ &\quad - \mu \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i s_i \hat{e}_f(n-j) \mathbf{x}_f^T(n-j) \mathbf{x}(n-i). \end{aligned} \quad (13)$$

Note que, no algoritmo modificado, (13) é recursiva em relação ao erro $\hat{e}_f(n)$, sendo que tal característica não se encontra presente no caso do FE-LMS original. Entretanto, é tal recursividade que faz o algoritmo modificado ter um comportamento similar ao do LMS convencional.

Substituindo-se então (5) e (13) em (8), obtém-se a equação de atualização do vetor de coeficientes do algoritmo MFE-LMS, que é dada por (14).

C. Comportamento Médio do Vetor de Coeficientes

Nesta seção, é obtido o momento de primeira ordem do vetor de coeficientes. Par tal, substituindo-se (13) em (8), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) + \mu \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{x}_f(n) d(n-i) \\ &\quad - \mu \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{x}_f(n) \mathbf{w}^T(n-i) \mathbf{x}(n-i) \\ &\quad - \mu^2 \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i s_i \mathbf{x}_f(n) \hat{e}_f(n-j) \mathbf{x}_f^T(n-j) \mathbf{x}(n-i). \end{aligned} \quad (14)$$

Agora, substituindo-se (5) em (14) e tomando o valor esperado em ambos os lados da expressão resultante, obtém-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(n+1)] &= E[\mathbf{w}(n)] \\ &\quad + \mu \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} s_p s_i E[\mathbf{x}(n-p) d(n-i)] \\ &\quad - \mu \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} s_p s_i E[\mathbf{x}(n-p) \mathbf{w}^T(n-i) \mathbf{x}(n-i)] \\ &\quad - \mu^2 \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i s_p s_i E[\mathbf{x}(n-p) \hat{e}_f(n-j) \\ &\quad \quad \quad \mathbf{x}_f^T(n-j) \mathbf{x}(n-i)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Tomando-se (2), (5) e (7) para determinar $d(n-i)$, $\mathbf{x}_f^T(n-j)$ e $\hat{e}_f(n-j)$, respectivamente; substituindo-se esses resultados em (15) e realizando-se então as devidas manipulações matemáticas, obtemos

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(n+1)] &= E[\mathbf{w}(n)] \\ &\quad + \mu \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} s_p s_i \mathbf{R}_{i-p} \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-i)] \} \\ &\quad - \mu^2 \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} s_p s_i s_k s_q \{ \mathbf{R}_{j+q-p} \\ &\quad \quad \times \mathbf{R}_{j+k-i} + \mathbf{R}_{i-p} \mathbf{R}_{k-q} + \mathbf{R}_{j+k-p} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+q-i}^T] \} \\ &\quad \quad \times \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-j-k)] \} \\ &\quad + \mu^3 \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=1}^k \sum_{q=0}^{M-1} s_k s_q E[\mathbf{x}(n-p) \\ &\quad \quad \times \hat{e}_f(n-j-l) \mathbf{x}_f^T(n-j-l) \mathbf{x}(n-j-k) \\ &\quad \quad \times \mathbf{x}^T(n-j-q) \mathbf{x}(n-i)]. \end{aligned} \quad (16)$$

onde as matrizes de autocorrelação \mathbf{R}_{i-p} , \mathbf{R}_{j+k-i} , \mathbf{R}_{k-q} , \mathbf{R}_{j+k-p} e \mathbf{R}_{j+q-i} são obtidas a partir da forma geral $\mathbf{R}_{\beta-\alpha} = E[\mathbf{x}(n-\alpha) \mathbf{x}^T(n-\beta)]$.

Os valores esperados em (16) foram determinados assumindo-se as seguintes considerações:

- i) As correlações entre diferentes vetores de entrada são muito mais importantes do que as correlações entre vetores de entrada e vetores de coeficientes dos pesos.
- ii) O modelo derivado é baseado na hipótese de adaptação lenta, sendo assim desconsiderados, em (16), os termos afetados pelo fator μ^β , com $\beta \geq 3$.
- iii) O momento de quarta ordem do sinal de entrada para o termo com μ^2 é determinado utilizando-se o Teorema de Fatoração de Momentos para sinais Gaussianos [12].

Assim, segundo (ii), (16) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(n+1)] &= E[\mathbf{w}(n)] \\ &\quad + \mu \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} s_p s_i \mathbf{R}_{i-p} \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-i)] \} \\ &\quad - \mu^2 \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} s_p s_i s_k s_q \{ \mathbf{R}_{j+q-p} \\ &\quad \quad \times \mathbf{R}_{j+k-i} + \mathbf{R}_{i-p} \mathbf{R}_{k-q} + \mathbf{R}_{j+k-p} \text{tr}[\mathbf{R}_{j+q-i}^T] \} \\ &\quad \quad \times \{ \mathbf{w}_o - E[\mathbf{w}(n-j-k)] \}. \end{aligned} \quad (17)$$

D. Valor de Regime Permanente do Vetor de Coeficientes

Assumindo-se que o filtro converge, o valor de regime permanente do vetor de coeficientes do filtro adaptativo é obtido a partir da seguinte condição:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n+1)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-i)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n-j-k)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] = \mathbf{w}_\infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Utilizando-se (18) em (17), obtém-se o valor de regime permanente, dado por

$$\mathbf{w}_\infty = \mathbf{w}_o. \quad (19)$$

Isto nos permite constatar que o algoritmo MFE-LMS tem o mesmo valor de regime permanente que o algoritmo FE-LMS. É importante salientar que o termo de compensação apenas tem efeito durante a fase transiente do algoritmo. Tal fato é melhor observado em (11), em que, na convergência, a diferença $[\mathbf{w}^T(n) - \mathbf{w}^T(n-i)]$ é zero, anulando assim o efeito de $\Lambda_f(n)$.

E. Erro Quadrático Médio (EQM)

Para se determinar a expressão do erro quadrático médio do algoritmo MFE-LMS, substituímos (11) em (9). Após uma simples manipulação matemática, tem-se a expressão do erro. Assim,

$$\hat{e}_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n-i) = e(n) \Big|_{\text{LMS}}. \quad (20)$$

Note que $\hat{e}_f(n) = e(n) \Big|_{\text{LMS}}$. Definindo-se o vetor de erro nos coeficientes como sendo $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_\infty$, onde \mathbf{w}_∞ é o valor de regime permanente do vetor de coeficientes e usando-se $\mathbf{v}(n)$ em (20), obtém-se

$$\hat{e}_f(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}_\infty^T \mathbf{x}(n-i). \quad (21)$$

Define-se então o erro mínimo de regime permanente como

$$\hat{e}_\infty(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i d(n-i) - \sum_{i=0}^{M-1} s_i \mathbf{w}_\infty^T \mathbf{x}(n-i). \quad (22)$$

Agora, substituindo-se (22) em (21), elevando-se ao quadrado a expressão resultante e calculando-se o valor esperado, obtém-se

$$\begin{aligned} E[\hat{e}_f^2(n)] &= E[e_\infty^2(n)] \\ &\quad - 2 \sum_{i=0}^{M-1} s_i E[\hat{e}_\infty(n) \mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i)] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} s_i s_j E\{[\mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i)]^2\}. \end{aligned} \quad (23)$$

De [12], tem-se que $E[\hat{e}_\infty(n) \mathbf{x}(n-i)] = 0$ (Princípio da Ortogonalidade). Dado que $E\{[\mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}(n-i)]^2\}$ é um escalar e definindo-se $\xi_f(n) = E[\hat{e}_f^2(n)]$ e $\xi_{\min} = E[\hat{e}_\infty^2(n)]$, temos

$$\xi_f(n) = \xi_{\min} + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} s_i s_j \text{tr}\{E[\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n)] \mathbf{R}_{j-i}\}. \quad (24)$$

Para finalizar a derivação de (24), devemos determinar o momento de segunda ordem do vetor $\mathbf{v}(n)$. Entretanto, dado que o modelo é derivado utilizando-se a hipótese de adaptação lenta, o cálculo do momento de segunda ordem pode ser obtido como o produto dos momentos de primeira ordem [13]. Assim, $E[\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n)] \cong E[\mathbf{v}(n)] E[\mathbf{v}^T(n)]$.

F. Modelo Considerando a Teoria da Independência

Para fins de comparação, nesta seção, são apresentadas as expressões que definem os momentos de primeira e segunda ordens utilizando-se a teoria da independência. Nessa condição, temos que $\mathbf{R}_{\beta-\alpha} = E[\mathbf{x}(n-\alpha) \mathbf{x}^T(n-\beta)] = 0$ se $\alpha \neq \beta$. Assim, o comportamento médio do vetor de coeficientes, considerando-se a TI, é

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(n+1)] &= E[\mathbf{w}(n)] + \mu \mathbf{R} \sum_{i=0}^{M-1} s_i^2 \{\mathbf{w}_0 - E[\mathbf{w}(n-i)]\} \\ &\quad - \mu^2 (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3) \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (25)$$

onde

$$\mathbf{A} = \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^i \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{M-1} s_p s_i s_k s_q \{\mathbf{w}_0 - E[\mathbf{w}(n-j-k)]\}$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{cases} \mathbf{R}^2, & \text{para } j+q=p \text{ e } j+k=i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{cases} \mathbf{R}^2, & \text{para } i=p \text{ e } k=q \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{cases} \mathbf{R} \text{tr}[\mathbf{R}], & \text{para } j+k=p \text{ e } j+q=i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Dessa forma, a expressão para o erro médio quadrático, considerando-se a TI, é então

$$\xi_f(n) = \xi_{\min} + \sum_{i=0}^{M-1} s_i^2 \text{tr}\{E[\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n)] \mathbf{R}\}. \quad (26)$$

A partir de (25) e (26), observa-se que o uso da TI desconsidera um conjunto de termos que faz com que o modelo resultante não seja mais adequado para descrever corretamente o algoritmo em questão. Na próxima seção, será evidenciada tal condição de aproximação.

III. RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

Nesta seção, são apresentados dois exemplos a fim de verificar a qualidade do modelo analítico proposto. O primeiro considera o sinal de entrada branco; o segundo, o sinal de entrada colorido.

Exemplo 1

Para este exemplo, a resposta ao impulso da planta é $\mathbf{w}_0 = [1; 0,9; 0,8; 0,7; -0,3; -0,4; -0,5; -0,6]^T$ e a resposta do caminho do erro é $\mathbf{s} = [0,502 \ 0,335 \ 0,167]^T$; o sinal de entrada $x(n)$ é branco e Gaussiano, com $\sigma_x^2 = 1$; o limite de estabilidade (determinado experimentalmente) para o passo de adaptação é $\mu_{\max} = 0,1$. Nesse exemplo, são mostrados os resultados de simulação para o caso de $\mu = 0,6\mu_{\max}$ e uma média de 100 realizações independentes.

A Fig. 2 ilustra o comportamento médio dos pesos determinado experimentalmente por simulação Monte Carlo (MC) e obtido através de (17). Dessa figura, observamos que o modelo proposto prediz satisfatoriamente o comportamento médio dos coeficientes do filtro. A evolução do comportamento médio dos pesos, considerando-se a TI [equação (25)], também é mostrada nessa figura, podendo ser observado um considerável descasamento existente entre o modelo e a simulação, notadamente na fase transiente.

Na Fig. 3, é mostrado o comportamento do erro quadrático médio (EQM) obtido através de simulação MC, do modelo teórico proposto e do modelo que considera a TI. Novamente, nota-se que o modelo proposto prediz satisfatoriamente o comportamento do EQM, enquanto o modelo usando a TI falha na região de transiente.

Exemplo 2

Neste caso, é usado um sinal correlacionado obtido a partir de um modelo auto-regressivo de segunda ordem, dado por

$$x(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + u(n), \quad (27)$$

onde $u(n)$ é um ruído branco com variância unitária e $a_1 = 0,1833$ e $a_2 = -0,85$. A dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada é igual a 82,84. Nesse exemplo, a planta é $w_o = [1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; -0,1; -0,2; -0,3; -0,4; -0,5; -0,6]^T$ e $s = [-9; 0; 251; 504; 251; 0; 9]^T \times 10^{-3}$; o passo máximo é $\mu_{\max} = 0,04$, determinado experimentalmente, sendo utilizado $\mu = 0,6\mu_{\max}$. As simulações MC são obtidas considerando-se 200 realizações independentes.

Figs. 4 e 5 apresentam, respectivamente, os momentos de primeira e segunda ordens para o exemplo em questão. Os resultados aqui obtidos são similares aos das Figs. 2 e 3. As mesmas observações consideradas para o Exemplo 1 podem também ser estendidas para o Exemplo 2 (sinal de entrada correlacionado).

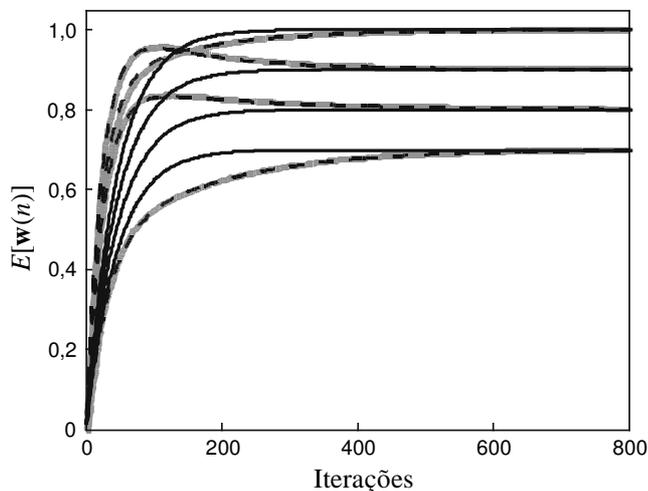


Fig. 2. Exemplo 1. Curvas do comportamento médio dos coeficientes $E[w_2(n)] - E[w_5(n)]$ do filtro adaptativo com sinal de entrada branco: simulação MC (linha contínua cinza); modelo usando a TI (linha contínua preta); modelo proposto (linha tracejada preta).

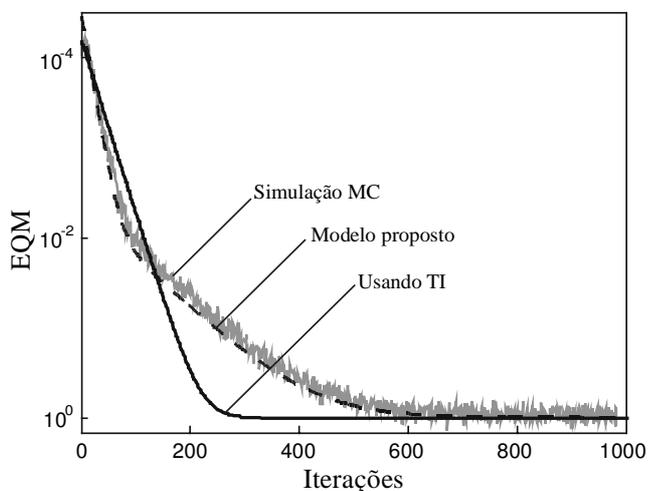


Fig. 3. Exemplo 1. Curvas de EQM para sinal de entrada branco: simulação MC (linha irregular cinza); modelo usando a TI (linha contínua preta); modelo proposto (linha tracejada preta).

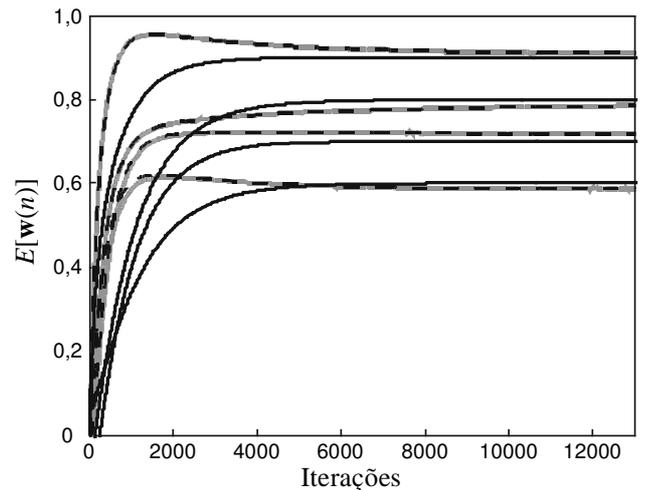


Fig. 4. Exemplo 2. Curvas do comportamento médio dos coeficientes $E[w_2(n)] - E[w_5(n)]$ do filtro adaptativo com sinal de entrada colorido: simulação MC (linha contínua cinza); modelo usando a TI (linha contínua preta); modelo proposto (linha tracejada preta).

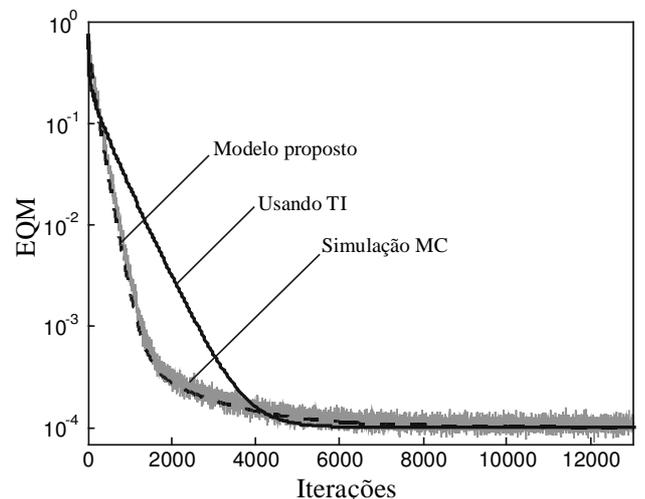


Fig. 5. Exemplo 2. Curvas de EQM para sinal de entrada colorido: simulação MC (linha irregular cinza); modelo usando a TI (linha contínua preta); modelo proposto (linha tracejada preta).

IV. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi apresentado um modelo analítico para os momentos de primeira e segunda ordens do algoritmo FE-LMS modificado. Tal modelo foi obtido sem o uso da clássica teoria da independência e levando em conta a hipótese de adaptação lenta. As simulações numéricas mostraram o bom desempenho do modelo aqui proposto, tanto para sinal de entrada Gaussiano branco quanto para colorido.

REFERÊNCIAS

- [1] R. D. Poltman, "Conversion of the delayed LMS algorithm into the LMS algorithm," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 2, no. 12, Dec. 1995.
- [2] S. C. Douglas, "An efficient implementation of the modified filtered-x LMS algorithm," *IEE Signal Process. Lett.*, vol. 4, pp. 286-288, Oct. 1997.
- [3] S. J. Elliott and P. A. Nelson, "Active noise control," *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 10, pp. 12-35, Oct. 1993.

- [4] J. R. Glover Jr., "Adaptive noise canceling applied to sinusoidal interferences," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. 25, pp. 484-491, Dec. 1977.
- [5] E. A. Wan, "Adjoint-LMS: An efficient alternative to the filtered-x LMS and multiple error LMS algorithms," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Process.*, Atlanta, USA, vol. 3, May 1996, pp. 1842-1845.
- [6] S. Shaffer and C. S. Williams, "The filtered error LMS algorithm," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. 8, pp. 41-44, Apr. 1983.
- [7] B. Widrow and S. D. Starns. *Adaptive Signal Processing*, Prentice Hall, 1998.
- [8] E. Bjarnason, "Analysis of the Filtered-X LMS algorithm," *IEEE Trans. Speech and Audio Process.*, vol. 3, pp. 504-514, Nov. 1995.
- [9] O. J. Tobias, J. C. M. Bermudez, N. J. Bershad, and R. Seara, "Mean weight behavior of the Filtered-X LMS algorithm," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Process.*, Seattle, USA, May 1998, pp. 3545-3548.
- [10] — "Second moment analysis of the Filtered-X LMS algorithm," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Process.*, Phoenix, USA, Mar. 1999, pp. 1873-1876.
- [11] E. Bjarnason, "Algorithms for active noise cancellation without exact knowledge of the error-path filter," *Proc. IEEE Int. Symp. Circ. Syst.*, London, UK, vol. 2, June 1994, pp. 573-576.
- [12] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, 1998.
- [13] N. J. Bershad, P. Celka, and J. M. Vesin, "Stochastic analysis of gradient adaptive identification of nonlinear systems with memory for Gaussian data and noisy input and output measurements," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, pp. 675-689, Mar. 1999.