

Propriedades do Algoritmo LMS Operando em Precisão Finita

Yasmín R. Montenegro Maluenda, José Carlos M. Bermudez e Vítor H. Nascimento

Resumo—Este artigo apresenta uma nova modelagem do comportamento do algoritmo LMS quando implementado em precisão finita. Os coeficientes do filtro adaptativo são modelados como uma cadeia de Markov, e a matriz de probabilidades de transição da cadeia é determinada para o caso unidimensional. Desta forma são eliminadas as linearizações empregadas nos modelos existentes na literatura. A partir desse resultado, são determinadas as condições sobre o passo de adaptação para que o algoritmo convirja para o ponto ótimo em regime permanente. Comportamentos não observados no caso de precisão infinita podem ser claramente identificados com o modelo proposto. Resultados de simulação Monte Carlo comprovaram a qualidade do modelo proposto.

Palavras-Chave—Filtragem adaptativa, algoritmo LMS, aritmética de precisão finita, análise estocástica, cadeias de Markov.

Abstract—This paper presents a new model for the behavior of the LMS algorithm when implemented in finite precision. The adaptive filter coefficients are modeled as a Markov chain and the matrix of transition probabilities are determined for the one-dimensional case. The linearization used in other models available in the literature are eliminated. Using these results, conditions on the step size for convergence to the optimum steady-state solution are determined. Algorithm behaviors not seen in the infinite precision case can be clearly identified with the proposed model. Monte Carlo simulation results illustrate the quality of the proposed model.

Keywords—Adaptive filtering, LMS algorithm, finite-precision arithmetic, stochastic analysis, Markov chains.

I. INTRODUÇÃO

O algoritmo LMS (Least Mean Square) é um dos mais utilizados na implementação de sistemas adaptativos para operação em tempo real devido à sua simplicidade e robustez [1], [2]. Tais implementações freqüentemente utilizam *hardware* específico operando em aritmética de ponto fixo. Os modelos existentes para o comportamento do algoritmo em precisão infinita tornam-se inadequados no caso de precisão finita. A acumulação de erros de quantização e os efeitos não-lineares inerentes a tais implementações podem levar a comportamentos que se distanciam significativamente do previsto pela teoria desenvolvida para precisão infinita. Assim, torna-se importante a modelagem do comportamento do algoritmo quando implementado em precisão finita.

Dado esse interesse prático, o comportamento do algoritmo LMS quando implementado em precisão finita tem sido analisado por diversos pesquisadores [1]–[9]. Em [3] e [4], são apresentados modelos analíticos para implementações em ponto fixo utilizando estatísticas de segunda ordem dos sinais envolvidos. No entanto, [3] e [4] modelam o efeito da precisão finita por um sistema linear em que o erro de quantização é representado por um ruído branco aditivo. Esses modelos mostram-se inadequados para a determinação do comportamento não-linear característico de um algoritmo adaptativo operando em precisão finita. O modelo linearizado é satisfatório durante os primeiros estados de adaptação, quando o erro é grande. Quando o erro decresce e aproxima-se do regime permanente, o comportamento do algoritmo não pode ser previsto por um modelo

Y.R. Montenegro M., Mestrando em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, SC, Brasil, E-mail: yasmin@eel.ufsc.br

J.C.M. Bermudez, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil, E-mail: bermudez@eel.ufsc.br

V. Nascimento, Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos, Universidade de São Paulo, SP, Brasil, E-mail:vitor@lps.usp.br

linear [8]. Em [6]–[9] são derivados modelos baseados na função característica de um quantizador operando em complemento de dois. Tais modelos incorporam a natureza não-linear da quantização na equação de atualização dos coeficientes do filtro adaptativo, levando a previsões mais acuradas do comportamento do algoritmo LMS, tanto durante o transitório quanto em regime permanente. Tais modelos, no entanto, não consideram os efeitos de quantização dos sinais de entrada ou os efeitos de saturação inerentes ao processamento em precisão finita.

Este artigo analisa algumas propriedades do comportamento do algoritmo LMS em regime permanente, considerando sinais e coeficientes representados em precisão finita, e incluindo os efeitos de saturação. O estudo é feito para o caso de comprimento 1 (um único coeficiente w_n) para evitar a complexidade algébrica inerente ao caso multidimensional. O estudo deste caso, no entanto, permite a obtenção de informações importantes sobre o comportamento do algoritmo, que não poderiam ser obtidas usando os modelos existentes na literatura. O coeficiente adaptativo é modelado como uma cadeia de Markov. A sua função densidade de probabilidade (fdp) é determinada, condicionada ao valor do coeficiente anterior e ao estado do sinal de entrada. A partir da fdp dos coeficientes, determina-se a matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov e, através de suas propriedades, estuda-se a estabilidade e o comportamento do algoritmo em regime permanente.

Na Seção II determina-se a fdp condicional $f_{w_{n+1}}(w_{n+1}|x_n, w_n)$ do coeficiente adaptativo. Na Seção III determina-se uma condição suficiente sobre o passo de adaptação μ para a convergência do algoritmo. Na Seção IV valida-se o modelo proposto, apresentando exemplos de comparação entre os desempenhos previsto pelo modelo teórico e obtido por simulação. A Seção V apresenta as conclusões do trabalho.

II. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considere o diagrama em blocos mostrado na Fig. 1, referente ao problema de identificação de sistemas.

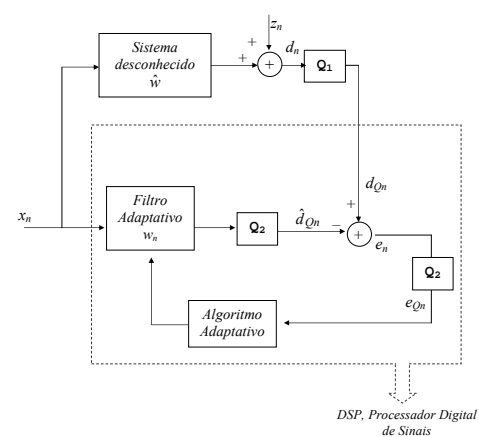


Fig. 1. Identificação de Sistemas implementada em precisão finita

Na Fig. 1, x_n é o sinal de entrada, z_n é um ruído aditivo, considerado branco, gaussiano e de média zero e d_n é o sinal

desejado. \hat{w} é o coeficiente do sistema desconhecido e w_n é o coeficiente do filtro adaptativo. Assume-se que x_n é um sinal aleatório discreto com $-1 \leq x_n \leq 1$, quantizado com b bits, e com todos os níveis equiprováveis. Assume-se também que os coeficientes do filtro adaptativo e as operações internas do sistema (dentro da caixa tracejada) são realizadas com b bits de precisão. Os blocos \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 são quantizadores de b bits com passo uniforme $\Delta = 2^{1-b}$ e com saídas limitadas em $[-1, 1]$. A Fig. 2 mostra a função de transferência do quantizador para $b = 3$. O sinal d_{Q_n} é a versão quantizada de d_n , \hat{d}_{Q_n} é a saída do filtro adaptativo quantizada em b bits¹ e e_{Q_n} é o erro de estimação representado em b bits.

Para simplificação dos cálculos, considera-se um intervalo simétrico para a saída do quantizador, ou seja um total de $N = 2^b + 1$ níveis na saída de \mathbf{Q}_i , $i = 1, 2$. Essa consideração simplifica os cálculos e reduz significativamente a complexidade computacional dos modelos analíticos, sem levar a erros significativos na representação de sistemas práticos (com $b \geq 12$).

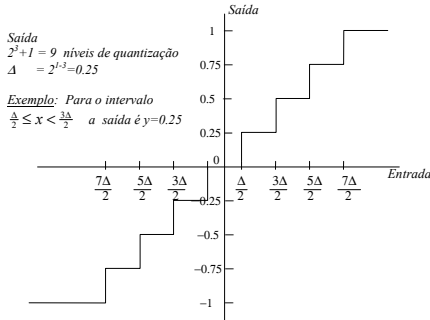


Fig. 2. Relação entrada e saída para um quantizador de 3 bits

Matematicamente, a fdp de x_n é dada por

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=-2^{(b-1)}}^{k=2^{(b-1)}} \delta(x - k\Delta) \quad (1)$$

em que $N = 2^b + 1$. A fdp de z_n é dada por

$$f_{\mathbf{z}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_z}\right)^2} \quad (2)$$

O coeficiente w_n do filtro adaptativo é um sinal escalar discreto e distribuído em $[-1, 1]$.

A. Equações do algoritmo LMS em precisão finita

Considerando a Fig. 1 e a estrutura do algoritmo LMS [1], as equações que definem a atualização dos coeficientes do filtro adaptativo em precisão finita são:

$$\begin{aligned} d_{Q_n} &= Q\{\hat{w}x_n + z_n\} \\ \hat{d}_{Q_n} &= Q\{w_n x_n\} \\ e_n &= d_{Q_n} - \hat{d}_{Q_n} \\ e_{Q_n} &= Q\{d_{Q_n} - \hat{d}_{Q_n}\} \\ y_{Q_n} &= Q\{\mu e_{Q_n} x_n\} \\ w_{n+1} &= Q\{w_n + y_{Q_n}\} \end{aligned} \quad (3)$$

Note que a definição de e_{Q_n} e a inclusão da operação de quantização na definição de w_{n+1} tornam-se necessárias devido à possibilidade

¹Em geral, a saída terá pelo menos $2b$ bits antes de \mathbf{Q}_2 , devido ao maior comprimento de palavra do acumulador em processadores digitais.

de saturação, uma vez que as amplitudes de e_n e de $w_n + y_{Q_n}$ podem extrapolar os limites de saturação do quantizador.

Para estudarmos a evolução dinâmica do coeficiente w_n do filtro adaptativo, determinaremos a fdp de w_{n+1} condicionada em w_n . Para isso, devemos determinar diversas fdp relativas aos diferentes termos em (3). Esse trabalho é apresentado na próxima seção.

III. DETERMINAÇÃO DA ESTATÍSTICA DE w_n

De (3) verificamos que a fdp de w_{n+1} depende da estatística de y_{Q_n} , a qual depende da estatística de e_{Q_n} que, por sua vez, depende da estatísticas de d_{Q_n} e de \hat{d}_{Q_n} . Iniciamos o estudo pela fdp de d_{Q_n} .

A. Determinação da fdp de d_{Q_n}

De (3), $d_{Q_n} = Q\{d_n\}$ com $d_n = \hat{w}x_n + z_n$. Dado \hat{w} , definimos $x_o(n) = \hat{w}x_n$. Assim, $\Pr\{\mathbf{x}_o = x_o\} = \Pr\{\hat{w}x = x_o\} = \Pr\{x = \frac{x_o}{\hat{w}}\}$ e

$$f_{\mathbf{x}_o}(x_o) = \frac{1}{N} \sum_{k=-2^{(b-1)}}^{k=2^{(b-1)}} \delta(x_o - k\hat{w}\Delta) \quad (4)$$

Como d_n é a soma de duas variáveis aleatórias independentes, sua fdp será dada pela convolução das fdp individuais. Assim, como $z_n = d_n - x_o(n)$,

$$f_{\mathbf{d}}(d) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{x}_o}(x_o) f_{\mathbf{z}}(d - x_o) dx_o \quad (5)$$

Substituindo (2) e (4) em (5), e com $x_o = \hat{w}k\Delta$, a função densidade de probabilidade de d_n não quantizado, $f_{\mathbf{d}}(d)$ fica:

$$f_{\mathbf{d}}(d) = \frac{1}{N\sigma_z\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-2^{(b-1)}}^{k=2^{(b-1)}} e^{-\left(\frac{d - \hat{w}k\Delta}{\sqrt{2}\sigma_z}\right)^2} \quad (6)$$

Para determinar a fdp de d_{Q_n} , deve-se determinar a probabilidade de que d_n esteja no i -ésimo intervalo de quantização $[d_{1_i}, d_{2_i}]$. Denominando essa probabilidade D_i , tem-se

$$D_i = \int_{d_{1_i}}^{d_{2_i}} f_{\mathbf{d}}(d) dd \quad (7)$$

Substituindo (6) em (7) tem-se que

$$D_i = \frac{1}{N\sigma_z\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-2^{(b-1)}}^{k=2^{(b-1)}} \int_{d_{1_i}}^{d_{2_i}} e^{-\left(\frac{d - \hat{w}k\Delta}{\sqrt{2}\sigma_z}\right)^2} dd \quad (8)$$

Resolvendo (8) tem-se de [10],

$$D_i = \frac{1}{N} \sum_{k=-2^{(b-1)}}^{k=2^{(b-1)}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{d_{2_i} - k\hat{w}\Delta}{\sigma_z}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{d_{1_i} - k\hat{w}\Delta}{\sigma_z}\right) \right]$$

e a fdp é dada por:

$$f_{\mathbf{d}_Q}(d_Q) = \sum_{i=-2^{(b-1)}}^{i=2^{(b-1)}} D_i \delta(d_Q - i\Delta) \quad (9)$$

com $d_{2_i} = i\Delta + 0,5\Delta$ e $d_{1_i} = i\Delta - 0,5\Delta$ (note que o limite inferior do primeiro intervalo é $-\infty$, e analogamente o limite superior do último intervalo é $+\infty$).

Conhecida a fdp de d_Q , é possível determinar a fdp do erro quantizado.

B. Determinação da fdp condicional de e_{Qn}

Da Fig. 1 e de (3), $e_{Qn} = Q\{d_{Qn} - \hat{d}_{Qn}\}$, com $\hat{d}_{Qn} = Q\{w_n x_n\}$. As variáveis aleatórias d_{Qn} e $Q\{w_n x_n\}$ dependem da variável aleatória x_n e do coeficiente do filtro w_n . Assim, a fdp de interesse é $f_{e_Q}(e_Q|k\Delta, w_n)$.

Note que o resultado de e_n em (3) pode ultrapassar os valores máximo ou mínimo estabelecidos pela reposta do quantizador. Assim, para $|e_n| > 1$ os valores de e_{Qn} ficarão saturados nos valores extremos da reposta do quantizador.

Inicialmente, deve-se determinar a fdp de e_n . Considerando que $d_{Q\max} = \hat{d}_{Q\max} = 1$ e $d_{Q\min} = \hat{d}_{Q\min} = -1$ por serem valores quantizados, tem-se que

$$\begin{aligned} \{e_n\}_{\max} &= d_{Q\max} - \hat{d}_{Q\min} = 2 \\ \{e_n\}_{\min} &= d_{Q\min} - \hat{d}_{Q\max} = -2 \end{aligned}$$

A fdp de e_n será dada por:

$$f_e\{e|k\Delta, w_n\} = \sum_{k_e=-2^b}^{k_e=2^b} E_{k_e} \delta(e - k_e \Delta)$$

em que E_{k_e} representa a probabilidade de ocorrência do k_e -ésimo estado de e_n . A seguir apresentam-se os passos para determinar E_{k_e} .

Seja

$$Q\{w_n x_n\} = Q\{w_n k\Delta\} = \text{round}\{w_n k\Delta\}$$

em que $\text{round}\{x\}$, para $m \leq x < m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$, é:

$$[x] = \begin{cases} m & \text{se } x < m + \frac{1}{2} \\ m + 1 & \text{se } x \geq m + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Então $e_n = d_{Qn} - [w_n k]\Delta$
em que

$$\begin{aligned} \Pr\{e_n = e|k\Delta, w_n\} &= \\ \Pr\{d_{Qn} - [w_n k]\Delta = e|k\Delta, w_n\} &= \\ \Pr\{d_{Qn} = e + [w_n k]\Delta|k\Delta, w_n\} & \end{aligned}$$

Usando $\Pr\{d_{Qn}\}$ determinada a partir de (9), tem-se:

$$E_{k_e} = \frac{1}{N} \left[\text{erf} \left(\frac{d_{2k_e} - \hat{w}x}{\sigma_z} \right) - \text{erf} \left(\frac{d_{1k_e} - \hat{w}x}{\sigma_z} \right) \right]$$

com (novamente, excetuando o limite inferior do primeiro intervalo e o limite superior do último intervalo)

$$\begin{aligned} d_{2k_e} &= d_{Qn} + 0,5\Delta = k_e \Delta + [w_n k]\Delta + 0,5\Delta, \quad e \\ d_{1k_e} &= d_{Qn} - 0,5\Delta = k_e \Delta + [w_n k]\Delta - 0,5\Delta. \end{aligned}$$

Como e_{Qn} é obtido de e_n pela saturação dos valores que excedem os limites do quantizador, as probabilidades de ocorrência destes valores devem somar-se às probabilidades de ocorrência dos valores extremos na distribuição de e_{Qn} . Assim a fdp de e_{Qn} é dada por:

$$\begin{aligned} f_{e_Q}(e_Q|k\Delta, w_n) &= \\ \sum_{k_1=2^{(b-1)}}^{k_1=2^{(b-1)}} \Pr\{e_Q = k_1\Delta|k\Delta, w_n\} \delta(e_Q - k_1\Delta) & \\ \sum_{k_1=-2^{(b-1)}}^{k_1=-2^{(b-1)}} \Pr\{e_Q = k_1\Delta|k\Delta, w_n\} \delta(e_Q - k_1\Delta) & \end{aligned} \quad (10)$$

em que

$$\begin{aligned} \Pr\{e_Q = k_1\Delta|k\Delta, w_n\} &= \\ \begin{cases} \Pr\{e = k_1\Delta|k\Delta, w_n\}, & |e_{Qn}| < 1 \\ \sum_{k_e=2^b}^{k_e=2^b} \Pr\{e = k_e\Delta|k\Delta, w_n\}, & e_{Qn} = 1 \\ \sum_{k_e=-2^b}^{k_e=-2^b} \Pr\{e = k_e\Delta|k\Delta, w_n\}, & e_{Qn} = -1 \end{cases} & \quad (11) \end{aligned}$$

C. Determinação da fdp de y_{Qn}

Considere $y_n = \mu e_{Qn} x_n$, sendo que e_{Qn} e x_n são valores quantizados. Assim,

$$y_n = \mu k_e \Delta k \Delta = \mu(k_e k) \Delta^2 = \mu k_y \Delta_y \quad (12)$$

em que $k_y = k_e k$ e $\Delta_y = \Delta^2$.

Como $\max\{k\} = \max\{k_e\} = 2^{(b-1)}$, o máximo valor de k_y em (12) é $k_{y\max} = 2^{2(b-1)}$. Portanto, $k_{y\min} = -2^{2(b-1)}$. Sendo $y_n = \mu e_{Qn} x_n$, tem-se que

$$e_{Qn} = \frac{y_n}{\mu x_n} = \frac{\mu k_y \Delta^2}{\mu x_n} = \frac{\mu k_y \Delta^2}{\mu k \Delta} = \frac{k_y \Delta}{k}$$

assim, as probabilidades de y_n não quantizado e condicionado em $k\Delta$ e w_n são dadas por:

$$\begin{aligned} \Pr\{y_n = y_n|k\Delta, w_n\} &= \Pr\{\mu e_{Qn} x_n = y_n|k\Delta, w_n\} \\ &= \Pr\left\{e_{Qn} = \frac{k_y \Delta}{k} \middle| k\Delta, w_n\right\} \end{aligned} \quad (13)$$

em que $\Pr\{e_Q|k\Delta, w_n\}$ pode ser determinada de (10) e (11). Assim, a fdp de y_n fica

$$\begin{aligned} f_y(y|k\Delta, w_n) &= \\ \sum_{k_y=-2^{2(b-1)}}^{k_y=2^{2(b-1)}} \Pr\left\{e_Q = \frac{k_y \Delta}{k} \middle| k\Delta, w_n\right\} \delta(y - \mu k_y \Delta_y) & \end{aligned} \quad (14)$$

Como y_n é o resultado de uma multiplicação de números de b bits seu valor não será múltiplo de Δ . y_{Qn} será o valor de y_n quantizado com b bits. Assim, a fdp de y_{Qn} será:

$$\begin{aligned} f_{y_Q}\{y_Q|k\Delta, w_n\} &= \\ \sum_{k_{y_Q}=-2^{2(b-1)}}^{k_{y_Q}=2^{2(b-1)}} \Pr\{y_Q = k_{y_Q} \Delta|k\Delta, w_n\} \delta(y_Q - k_{y_Q} \Delta) & \end{aligned} \quad (15)$$

com

$$\begin{aligned} \Pr\{y_Q = k_{y_Q} \Delta|k\Delta, w_n\} &= \\ \Pr\{y \geq y_1|k\Delta\} U(y - y_1) - \Pr\{y \geq y_2|k\Delta\} U(y - y_2) & \end{aligned} \quad (16)$$

para $y_1 = k_{y_Q} \Delta - 0,5\Delta$, $y_2 = k_{y_Q} \Delta + 0,5\Delta$ e $U(\cdot)$ representando a função degrau unitário.

Conhecida a fdp de y_{Qn} podemos determinar a estatística de w_{n+1} .

D. Determinação da fdp de w_{n+1}

Para simplificar as equações, definimos a variável $w_{n+1} = w_n + y_{Qn}$. Assim,

$$w_{n+1} = w_n + Q\{\mu e_{Qn} x_n\} = w_n + Q\{y_n\} \quad (17)$$

e

$$\begin{aligned} \Pr\{w_{n+1} = k_{w1}\Delta|k\Delta, w_n\} &= \\ \Pr\{w_n + y_Q = k_{w1}\Delta|k\Delta, w_n\} & \\ \Pr\{y_Q = k_{w1}\Delta - w_n|k\Delta, w_n\} & \end{aligned} \quad (18)$$

Essa probabilidade pode ser determinada a partir de (15) e (16). No entanto, para determinarmos a estatística de w_{n+1} precisamos incluir os efeitos de saturação em (18). Logo,

$$f_w \{w_{n+1}|k\Delta, w_n\} = \sum_{k_w=-2^{b-1}}^{k_w=2^{b-1}} \Pr\{w_{n+1} = k_w\Delta|k\Delta, w_n\} \delta(w_{n+1} - k_w\Delta) \quad (19)$$

em que

$$\Pr\{w_{n+1} = k_w\Delta|k\Delta, w_n\} = \begin{cases} \Pr\{\omega_{n+1} = k_w\Delta|k\Delta, w_n\}, & |w_{n+1}| < 1 \\ \sum_{k_{w1}=2^b}^{k_{w1}=k_w} \Pr\{\omega_{n+1} = k_{w1}\Delta|k\Delta, w_n\}, & w_{n+1} = 1 \\ \sum_{k_{w1}=k_w}^{k_{w1}=-2^b} \Pr\{\omega_{n+1} = k_{w1}\Delta|k\Delta, w_n\}, & w_{n+1} = -1 \end{cases} \quad (20)$$

Essa equação permite a determinação dos elementos da matriz de transição de estados da cadeia de Markov, conforme explicado na próxima seção.

IV. LIMITES DO PASSO DE ADAPTAÇÃO

Conhecidas as probabilidades de transição entre os estados dos coeficientes, é possível determinar a matriz de probabilidades de transição P_w da cadeia de Markov. Mais do que isso, podemos determinar condições a serem satisfeitas para que P_w tenha propriedades desejáveis para o comportamento adequado do algoritmo LMS em precisão finita. Por exemplo, o algoritmo deve ser projetado de forma a permitir a convergência do coeficiente para o seu valor ótimo \hat{w} na ausência de ruído de medição, independentemente do valor inicial de w_n . Esse requisito implica em que a matriz P_w deverá ter uma única classe final, com um único estado absorvente em $w_n = \hat{w}$. Assim, P_w deve corresponder a uma cadeia de Markov quase-ergódica [11].

Inicialmente, existe a possibilidade de paralização do algoritmo em um ambiente de precisão finita. Basta para isso que o ajuste gerado pelo algoritmo seja menor do que um passo de quantização. Neste caso $w_{n+1} = w_n$ em (3) e o algoritmo ficará paralizado. Outro aspecto importante é a garantia de que $w_n = \hat{w}$ seja um estado absorvente da cadeia de Markov, para que \hat{w} seja a solução em regime permanente. Esses dois aspectos são estudados nessa seção.

A. Limite inferior do passo de adaptação

Para evitar a paralização do algoritmo, o termo de ajuste do coeficiente em (3) deve satisfazer

$$|Q\{\mu e_{Qn} x_n\}| \geq \Delta$$

ou, equivalentemente,

$$|\mu e_{Qn} x_n| \geq \frac{\Delta}{2} \quad (21)$$

Como $|e_{Qn}| \geq \Delta$ (para ruído baixo) sempre que $w_n \neq \hat{w}$, (21) resulta na condição $|\mu x_n| \geq \frac{1}{2}$. O mínimo valor de μ que satisfaz essa condição ocorre para $|x_n| = 1$. Assim, a condição sobre o passo μ para que o algoritmo não fique paralizado para $w_n \neq \hat{w}$ é

$$\mu \geq \frac{1}{2} \quad (22)$$

B. Limite superior do passo de adaptação

Para que $w_n = \hat{w}$ seja um estado absorvente da cadeia de Markov, y_{Qn} deve ser igual a zero para toda entrada x_n quando $w_n = \hat{w}$. Desta forma teremos $w_{n+1} = w_n$. Essa condição traduz-se na propriedade

$$\sum_{k_x=-2^{(b-1)}}^{k_x=2^{(b-1)}} \Pr\left\{\left(\mu e_{Qn} k_x \Delta\right) < \frac{\Delta}{2}\right\} = 1 \quad (23)$$

em que

$$|e_{Qn}| = |Q\{\hat{w}x_n + z_n\} - Q\{\hat{w}x_n\}| \quad (24)$$

Analisando essas expressões, tem-se que:

1) Com $|x_n| = 1$ a equação (24) fica,

$$|e_{Qn}| = |Q\{\hat{w} + z_n\} - Q\{\hat{w}\}|$$

para $z_n \ll \frac{\Delta}{2}$ tem-se que,

$$|e_{Qn}| = |Q\{\hat{w}\} - Q\{\hat{w}\}| = 0.$$

Assim, $y_{Qn} = 0$ para $|x_n| = 1$.

2) Com $|x_n| \neq 1$, sempre poderá acontecer de $e_{Qn} \neq 0$, pois, por exemplo, se $\hat{w}x_n = k\Delta/2$,

$$|e_{Qn}| = \left| Q\left\{k\frac{\Delta}{2} + z_n\right\} - Q\left\{k\frac{\Delta}{2}\right\} \right|$$

para $z_n \ll \frac{\Delta}{2}$ mas não-nulo, o pior caso para o estado de erro é

$$|e_{Qn}| = \Delta. \quad (25)$$

Substituindo (25) na expressão de y_n tem-se:

$$|y_n| = |\mu\Delta x_n|$$

Para que $y_{Qn} = 0$, devemos ter $|y_n| < \frac{\Delta}{2}$. Assim,

$$|\mu x_n| < \frac{1}{2} \quad (26)$$

O pior caso para $|x_n| \neq 1$ é $|x_n| = 1 - \Delta$ (estado menor seguinte a $|x_n| = 1$). Logo, a condição fica

$$\mu < \frac{1}{2(1 - \Delta)} \quad (27)$$

Como $\Delta = 2^{1-b}$, tem-se

$$\mu < \frac{2^b}{2^{b+1} - 4} \quad (28)$$

Assim, para μ no intervalo

$$\frac{1}{2} \leq \mu < \frac{2^b}{2^{(b+1)} - 4} \quad (29)$$

a matriz P_w será quase-ergódica com um estado absorvente em $w_n = \hat{w}$ para todo x_n .

Note que a condição (29) é uma condição suficiente, devido à possibilidade de saturação. Considerando a saturação, w_{n+1} pode ser igual a w_n para $y_{Qn} \neq 0$. Por exemplo, se $w_n = 1$ e $y_{Qn} \geq \Delta$ em (3), $w_n + y_{Qn}$ será maior do que o nível máximo do quantizador, e w_{n+1} ficará saturado em 1. Neste caso, teremos $w_{n+1} = w_n = 1$ mesmo se μ não satisfizer (29).

Note que para valores práticos de b em que $b \geq 2$, o passo de adaptação pode ser representado com a mesma precisão numérica que os sinais e os coeficientes do filtro, já que $\mu = 0,5$ sempre será um nível de quantização.

²Assumindo que o valor \hat{w} coincida com um estado w_n . Se \hat{w} não satisfizer essa condição, estaremos determinando o limite para μ que garante que w_n convirja para o estado do mais próximo de \hat{w} .

V. VERIFICAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

Esta seção apresenta resultados de simulação para verificação dos resultados teóricos obtidos. Para a realização dos exemplos aqui apresentados, os limites de saturação dos quantizadores foram considerados simétricos na simulação. Isso foi feito devido à dificuldade de apresentação das matrizes de transição de estados das cadeias de Markov para $b > 3$, já que a dimensão da matriz cresce exponencialmente com o número de bits. Com um número de bits tão reduzido, as probabilidades calculadas pela teoria e por simulação difeririam consideravelmente se a simulação fosse feita com quantizadores assimétricos. Essa divergência torna-se desprezível para valores práticos de b .

Exemplo 1: Considere $b = 3$. Neste caso, os níveis de quantização para w_n serão dados por $\{w_n \in [-1 -0.75 -0.5 -0.25 0 0.25 0.5 0.75 1]\}$. De (29), tem-se que $0.5 \leq \mu < 0.67$. Considera-se $\hat{w} = 0.25$, $\sigma_z = 10^{-3}$ e $\mu = 0.5$.

a) Simulação: Para cada valor de w_0 , a linha correspondente em P_w é obtida pela média amostral de 100.000 realizações de um passo do algoritmo. P_w então é dada por:

$$\text{Estados} \begin{bmatrix} -1 & -0.75 & -0.5 & -0.25 & 0.00 & 0.25 & 0.50 & 0.75 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.00 & -0.75 & -0.50 & -0.25 & 0.00 & 0.25 & 0.50 & 0.75 & 1.00 \\ 0.33 & 0.22 & 0.44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0.44 & 0.23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.44 & 0.33 & 0.22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.44 & 0.56 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.78 & 0.22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.22 & 0.78 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.22 & 0.33 & 0.44 \end{bmatrix}$$

b) Modelo: A matriz P_w obtida usando-se o modelo proposto é dada por:

$$\text{Estados} \begin{bmatrix} -1 & -0.75 & -0.5 & -0.25 & 0.00 & 0.25 & 0.50 & 0.75 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.00 & -0.75 & -0.50 & -0.25 & 0.00 & 0.25 & 0.50 & 0.75 & 1.00 \\ 0.33 & 0.22 & 0.44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0.44 & 0.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.44 & 0.33 & 0.22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.44 & 0.56 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.78 & 0.22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.22 & 0.78 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.22 & 0.33 & 0.44 \end{bmatrix}$$

A comparação dessas duas matrizes mostra que o modelo proposto leva uma excelente previsão de P_w .

Note que, conforme previsto pela teoria, P_w tem um único estado absorvente em $w_n = \hat{w} = 0.25$, indicado pelo valor 1 na sexta coluna. Assim, independentemente do estado inicial w_0 , o coeficiente converge sempre para \hat{w} . Essa propriedade é confirmada pela matriz P_w^{1000} , após 1000 passos do algoritmo:

$$\text{Estados} \begin{bmatrix} -1 & -0.75 & -0.5 & -0.25 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essa matriz mostra claramente que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \hat{w}$ para qualquer condição inicial.

A Fig. 3 mostra o comportamento médio dos coeficientes usando o algoritmo LMS para três diferentes valores iniciais w_0

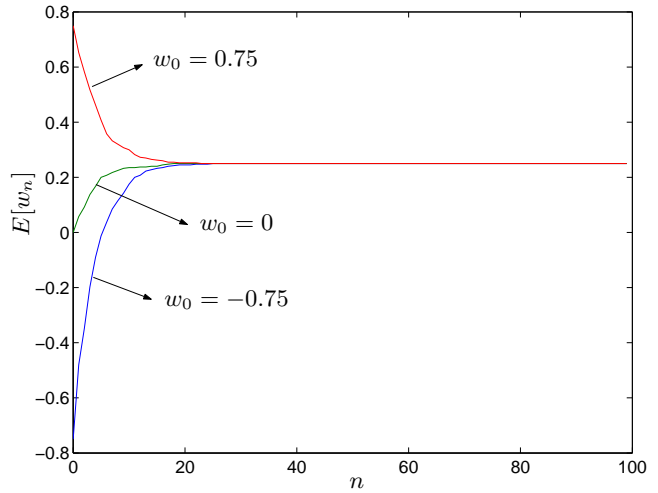


Fig. 3. Comportamento do algoritmo LMS em precisão finita para $\mu = 0.5$, $\hat{w} = 0.25$, $b = 3$ e estados iniciais de $w_0 = -0.75$, $w_0 = 0$ e $w_0 = 0.75$

Exemplo 2: Observe agora o que acontece se $\mu < \frac{1}{2}$ para o exemplo anterior. A matriz P_w abaixo é obtida por simulação para $\mu = 0.499$.

$$\text{Estados} \begin{bmatrix} -1 & -0.75 & -0.5 & -0.25 & 0.00 & 0.25 & 0.50 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.00 & -0.75 & -0.50 & -0.25 & 0.00 & 0.25 & 0.50 & 0.75 & 1.00 \\ 0.44 & 0.33 & 0.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0.33 & 0.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.56 & 0.44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.22 & 0.78 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.44 & 0.56 \end{bmatrix}$$

A matriz P_w obtida a partir do modelo teórico é dada por:

$$\text{Estados} \begin{bmatrix} -1 & -0.75 & -0.5 & -0.25 & 0.00 & 0.25 & 0.50 & 0.75 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.00 & -0.75 & -0.50 & -0.25 & 0.00 & 0.25 & 0.50 & 0.75 & 1.00 \\ 0.44 & 0.33 & 0.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.44 & 0.33 & 0.22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.56 & 0.44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.56 & 0.44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.22 & 0.78 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.22 & 0.44 & 0.56 \end{bmatrix}$$

Note que neste caso ((29) não é satisfeita), existem três classes finais, cada uma composta por um estado absorvente. Em regime permanente, observe P_w^{1000}

$$\text{Estados} \begin{bmatrix} -1 & -0.75 & -0.5 & -0.25 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Essa matriz indica que o estado estacionário pode ser $w = 0$, $w = 0.25$ ou $w = 0.5$, dependendo do estado inicial.

A Fig. 4 mostra o comportamento do algoritmo LMS neste caso, confirmando a previsão teórica de diferentes estados estacionários para diferentes inicializações de w_n .

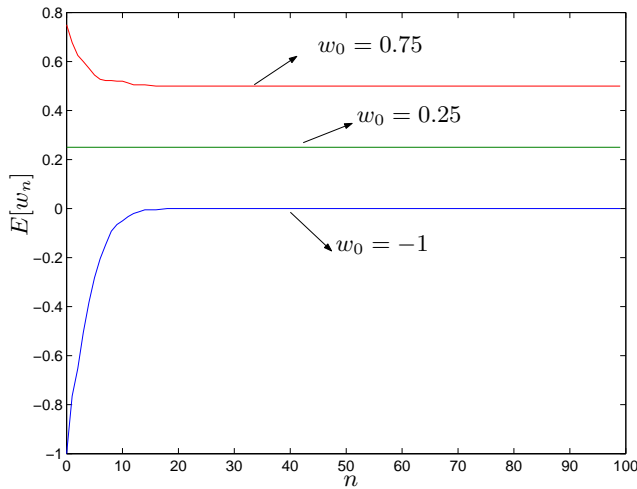


Fig. 4. Comportamento do algoritmo LMS em precisão finita para $\mu = 0.499$, $\hat{w} = 0.25$, $b = 3$ e estados iniciais de $w_0 = -1$, $w_0 = 0.25$ e $w_0 = 0.75$

VI. CONCLUSÕES

Este artigo apresentou uma nova modelagem do comportamento do algoritmo LMS quando implementado em precisão finita. Os coeficientes do filtro adaptativo foram modelados como uma cadeia de Markov, e a matriz de probabilidades de transição da cadeia foi determinada para o caso unidimensional. Desta forma são eliminadas as linearizações empregadas nos modelos existentes na literatura. A partir desse resultado, foram determinadas as condições sobre o passo de adaptação para que o algoritmo convirja para o ponto ótimo em regime permanente. Resultados de simulação Monte Carlo comprovaram a qualidade do modelo proposto.

AGRADECIMENTOS

Agradece-se à Universidade de Antofagasta, Chile, Bolsa de mestrado: projeto MECESUP ANT-102. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq, dentro dos processos de N° 303361/2004-2, 308095/2003-0 e 472762/2003-6, e pela FAPESP, processo N° 2004/15114-2.

REFERÊNCIAS

- [1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Fourth edition, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 2002
- [2] D.G. Manolakis, V.K. Ingle and S.M. Kogon, *Statistical and adaptive signal processing: spectral estimation, signal modeling, adaptive filtering and array processing*, McGraw-Hill, USA, 2000.
- [3] C. Caraiscos e B. Liu, *A roundoff error analysis of LMS adaptive algorithm*, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-32, no. 1, pp. 34-41, Feb. 1984.
- [4] S.T. Alexander, *Transient weight misadjustment properties for the finite precision LMS algorithm*, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-35, no. 9, pp. 1250-1258, Sept. 1984.
- [5] J.M. Cioffi, *Limited precision effects in adaptive filtering*, IEEE Trans. on circuits and systems, vol. CAS-34, no. 7, pp. 821-833, July 1987.
- [6] J.C.M. Bermudez e N.J. Bershad, *A nonlinear analytical model for the quantized LMS algorithm - The arbitrary step size case*, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 44, no. 5, pp. 1175-1183, May 1996.
- [7] J.C.M. Bermudez e N.J. Bershad, *Transient and tracking performance analysis of the quantized LMS algorithm for time-varying system identification*, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 44, no. 8, pp. 1990-1997, August 1996.
- [8] J.C.M. Bermudez e N.J. Bershad, *New insights on the transient and steady-state behavior of the quantized LMS algorithm*, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 44, no. 10, pp. 2623-2625, October 1996.
- [9] J.C.M. Bermudez e N.J. Bershad, *A nonlinear analytical model for the quantized LMS algorithm - The power-of-two step size case*, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 44, no. 11, pp. 2895-2900, November 1996.
- [10] A. Papoulis, *Probability, random variables, and stochastic processes*, McGraw-Hill, USA, 1965.
- [11] J.R. Norris, *Markov Chains*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.