

Esquemas para filtragem adaptativa baseados em redes wavelet

Celso de Sousa Júnior, Romis Ribeiro de Faissol Attux e João Marcos Travassos Romano

Resumo—A utilização de redes wavelet em equalização supervisionada e não-supervisionada de canais de comunicação é investigada neste trabalho. No primeiro contexto, a rede wavelet assume o clássico papel de um equalizador adaptado segundo o critério de Wiener. No segundo caso, a rede opera segundo as diretrizes de um paradigma emergente de equalização cega baseada em predição não-linear. Em ambas as aplicações, são adaptados tanto os parâmetros da rede quanto a sua própria estrutura, o que permite, em tese, que seja obtida uma solução moldada às necessidades do problema a resolver. Os resultados confirmam a validade da proposta e sua aplicabilidade a problemas de equalização de canal.

Palavras-Chave—Filtragem Adaptativa, Equalização Cega, Wavelets, Filtros Não-lineares.

Abstract—This paper investigates the use of wavelet networks in supervised and unsupervised channel equalization. In the first of these contexts, the wavelet network plays the classic role of an equalizer whose parameters are adapted via the Wiener criterion. In the latter case, the network is designed in accordance with an emergent blind equalization paradigm based on nonlinear prediction. In both applications, the network parameters and its structure are adapted, which allows, in theory, that a solution be obtained which suit the requirements of the problem at hand. The results confirm the validity of the proposal, as well as its applicability to channel equalization problems.

Keywords—Adaptive Filtering, Blind Equalization, Wavelets, Nonlinear Filters.

I. INTRODUÇÃO

O principal objetivo de um sistema de comunicação é garantir o adequado intercâmbio de mensagens entre transmissor e receptor, os quais, por definição, estão ligados por um meio físico. Via de regra, esse meio - ou canal - modifica a informação que porta, o que significa que o sinal recebido é usualmente uma versão corrompida da mensagem original. Caso os efeitos nocivos do canal não sejam apropriadamente tratados, a reconstrução dos dados enviados no receptor pode ser severamente comprometida.

Uma forma de contrabalançar tais efeitos é processar o sinal recebido com a ajuda de um filtro especialmente projetado para esse fim - o equalizador - conforme nos mostra a Figura 1. Idealmente, o projeto de um equalizador leva à seguinte condição:

$$y_n = k s_{n-d}. \quad (1)$$

C. S. Júnior, R. R. F. Attux e J. M. T. Romano Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, E-mails: celsojr@decom.fee.unicamp.br, romisri@decom.fee.unicamp.br e romano@fee.unicamp.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pela FAPESP.

que recebe o nome de *zero-forcing* (ZF). Nesse caso, a informação transmitida é perfeitamente recuperada a menos de um ganho k e de um atraso de equalização d [5].

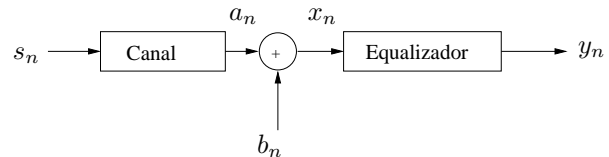


Fig. 1. Modelo para sistema de comunicação. Vide seção II para significado dos símbolos e variáveis.

Embora a condição ZF expresse muito bem em termos matemáticos a meta a ser atingida, ela nada diz sobre os meios necessários para atingi-la. No caso em que o modelo de canal é conhecido e sem ruído aditivo, uma abordagem bastante direta seria escolher um equalizador com características inversas às do canal. Dessa maneira, as atuações sucessivas de canal e equalizador terminariam por preservar a informação enviada.

O problema é que nem sempre é factível assumir que o canal possa ser adequadamente modelado por um sistema determinístico, ou ainda que o receptor seja capaz de ter acesso a tal modelo. Portanto, torna-se imperativo procurar estratégias alternativas de projeto. Uma possibilidade é estabelecer critérios de ajuste dos parâmetros do equalizador a partir da informação contida nos sinais envolvidos.

Se as amostras do sinal transmitido forem acessíveis, ou seja, se estivermos num contexto supervisionado, é possível recorrer ao célebre paradigma de Wiener, de cuja idéia geral a função custo de erro quadrático médio é expressão fiel [5]:

$$J_{Wiener} = E\{e_n^2\} = E\{(s_{n-d} - y_n)^2\}. \quad (2)$$

É importante notar que a escolha do atraso de equalização tem um papel fundamental neste paradigma, pois diferentes escolhas de d engendrarão diferentes funções custo e, conseqüentemente, diferentes soluções para os parâmetros livres do filtro a projetar.

Embora a formulação baseada no erro quadrático médio goze de inegável solidez, ela pode, em muitos casos, ser inviável devido à exigência de que amostras transmitidas sejam conhecidas no receptor. Para evitar essa demanda, foram propostos diversos critérios não-supervisionados (ou cegos) de equalização. Esses critérios têm por base apenas o conhecimento das estatísticas do sinal transmitido, ou seja,

dependem de grandezas que normalmente um projetista pode determinar a priori.

A escolha de um critério de ajuste está indissociavelmente ligada à opção por uma estrutura de filtragem que deverá fazer o papel de equalizador. É a sinergia entre esses dois entes, estrutura e critério, que determina as possibilidades de desempenho do equalizador. Classicamente, estruturas lineares são preferidas devido a sua tratabilidade matemática e sua relativa simplicidade. No entanto, caso o canal tenha um caráter não-linear, ou mesmo em problemas lineares de natureza mais complexa, torna-se desejável empregar uma estrutura mais flexível [5][2].

Devido ao notável avanço do campo de inteligência computacional, o uso de redes neurais em problemas de equalização se consolidou ao longo da última década. Nesse contexto, mereceram especial atenção as redes neurais RBF (Radial Basis Function) e MLP (Multi Layer Perceptron), ambas dotadas de capacidade de aproximação universal. A rede RBF é dotada ainda de uma importante característica: é capaz de emular o dispositivo ótimo do ponto de vista da minimização da taxa de erro de símbolo, o filtro de Bayes [5]. No entanto, em muitos casos práticos, o projeto do equalizador bayesiano pode levar a uma rede com uma dimensão proibitiva, o que reforça a validade do emprego de estruturas alternativas, como a própria rede MLP [2].

Em problemas de equalização, o uso de estruturas não-lineares está, via de regra, associado a critérios supervisionados. Isso se deve ao fato de que os principais critérios de equalização cega dependem de formulações estatísticas que têm sua validade assegurada apenas num domínio puramente linear, o que torna temerária qualquer extensão imediata. Não obstante, resultados recentes mostram que o uso de um critério de erro de predição fornece uma base sólida para a equalização não-linear de canais. Destarte, tal abordagem se afigura deveras atraente por aliar bom desempenho a uma necessidade limitada de informação a priori.

É nesse cenário multifacetado que se insere o presente trabalho. Seu principal objetivo é investigar o uso de uma estrutura dotada de capacidade de aproximação universal - uma rede wavelet - em problemas de equalização não-linear supervisionada e cega [10][9][8]. Além de ter por base o valor intrínseco da estrutura, ainda pouco explorada no contexto de comunicações, a abordagem proposta inclui um mecanismo de adaptação estrutural que permite que a estrutura de equalização seja adaptada online, ou seja, que fatores como o número de neurônios sejam determinadas segundo um processo criterioso e vinculado ao problema em questão [7][1]. O desempenho da estrutura proposta será avaliado sob diferentes modelos de canal e abordagens (tipo Wiener e baseada em predição), o que nos permitirá tecer considerações acerca de sua validade enquanto opção a redes mais tradicionais.

O trabalho obedece à seguinte divisão: na seção II, apresentamos os principais elementos de nossa notação; na seção III, é exposta a rede wavelet, base de nosso esforço, enquanto na seção IV discutimos o mecanismo de adaptação estrutural; na seção V, analisamos os problemas de equalização resultantes; na seção VI, encontram-se os resultados e, na seção VII, as conclusões.

II. SÍMBOLOS E VARIÁVEIS

$sign(\cdot)$: função sinal;
 \langle, \rangle : produto interno;
 $|\cdot|$: valor absoluto;
 $(\cdot)^H$: Hermitiano de um vetor ou matriz;
 $(\cdot)^*$: complexo conjugado;
 $(\cdot)^T$: transposto de matriz;
 $E\{\cdot\}$: operador esperança;
 a : variável escalar;
 \mathbf{a} : vetor ou matriz;
 s_n : sinal transmitido no instante, neste trabalho este sinal é constituído de amostras i.i.d de símbolos bipolares $(+1/-1)$;
 a_n : sinal recebido sem ruído;
 b_n : ruído aditivo no canal de comunicação;
 x_n : sinal de entrada do equalizador;
 y_n : sinal de saída do equalizador;
 d : número de amostras atrasadas no sinal s_n , i.e. s_{n-d} ;
 e_n : $s_{n-d} - y_n$: erro de estimação;
 \mathbf{w}_n : vetor de pesos do filtro transversal no instante n ;
 $\phi_{a,b}(t)$: função wavelet dilatada por a e transladada por b ;
 $L^2(\mathbb{R})$: $\int |f(t)|^2 dt < +\infty$: funções de energia finita;
 N : número de entradas na rede;
 M : número de oitavas ou coeficientes de dilação;
 K : número de coeficientes de translação;
 μ : passo de adaptação para algoritmos LMS normalizado;
 $\mu_i, i = 1, 2$: ganhos relacionados ao critério de adaptação estrutural.

III. REDES WAVELET

A representação natural da transformada wavelet considera uma versão transladada e dilatada de uma função contínua ϕ , conhecida também como wavelet mãe:

$$\phi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{t-b}{a}\right), a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Contudo, a representação no domínio de funções contínuas é pouco apropriada a problemas envolvendo sistemas digitais. Sendo assim, é preferível adotar uma parametrização na qual as grandezas de tempo e escala (b e a) são discretizadas [6]

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right), j, k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Uma dada função $f \in L^2(\mathbb{R})$ pode ser caracterizada ou reconstruída por uma superposição de elementos de funções wavelet como [4]

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \tilde{\phi}_{j,k}. \quad (5)$$

Uma amostragem mais precisa dos parâmetros da wavelet pode ser obtida considerando

$$\phi_{m,k}(t) = 2^{-m/2M} \phi\left(\frac{t-2^{m/M} k}{2^{m/M}}\right), m = 0, \dots, M-1. \quad (6)$$

onde $M \in \mathbb{Z}$ é o número de "vozes" por oitava [6]. Para reduzir o número de operações por função wavelet, limitaremos o parâmetro k a apenas alguns valores.

No entanto, para garantir que a composição de wavelets seja capaz de reconstruir a função f , o conjunto $\Phi = \{\phi_{m,k}, m, k \in \mathbb{Z}\}$ deve constituir um *frame* para $L^2(\mathbb{R})$ [4], ou seja, devem existir $A > 0$ e $B < \infty$ tais que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m,k} |\langle f, \phi_{m,k} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$. Maiores detalhes sobre as condições suficientes para formação de um *frame* podem ser encontrados em [4].

Sendo assim, será considerada a seguinte parametrização para a rede wavelet neste trabalho

$$y_n = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=-K, k \neq 0}^K w_{m,k} \phi_{m,k}(x_n), \quad (7)$$

onde $w_{m,k}$ representa os pesos da camada de saída para este nó da rede. A Figura 2 ilustra alguns nós da rede wavelet:

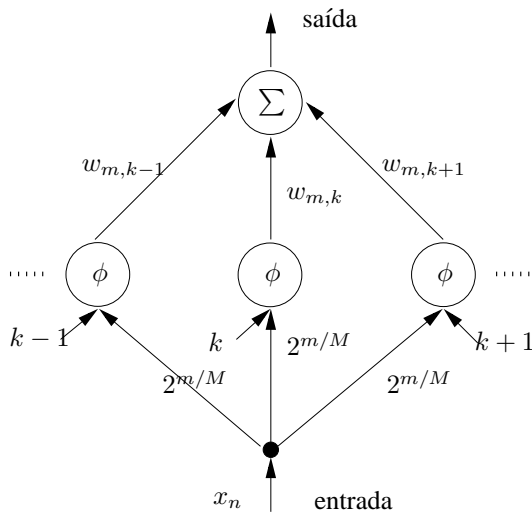


Fig. 2. Representação de um nó da rede wavelet considerando apenas uma única entrada.

Quando a rede wavelet é alimentada por mais de uma entrada, torna-se necessário repetir a arquitetura da Figura 2 para cada uma das entradas.

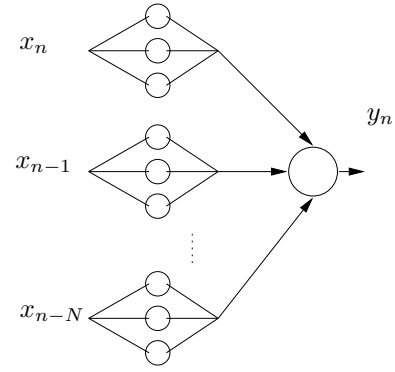


Fig. 3. Representação da rede wavelet para múltiplas entradas.

Entretanto, do ponto de vista da parametrização, basta adicionar mais um somatório à expressão da saída da rede (equação (7)). Nas redes wavelet, vale também a representação por matrizes. Assim, a saída da rede wavelet pode ser reescrita como

$$y_n = \sum_{i=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=-K, k \neq 0}^K w_{i,m,k} \phi_{m,k}(x_{i,n}) = \underbrace{\mathbf{W}_n}_{1 \times M \cdot N \cdot 2K} \underbrace{\Phi_n}_{M \cdot N \cdot 2K \times 1}. \quad (8)$$

onde N é o número de entradas para rede wavelet.

A parametrização descrita na equação (4) assemelha-se a um equalizador linear e também à representação de redes do tipo RBF (Radial Basis Function). Existem alguns pontos em comum entre a rede wavelet e a RBF [8]:

- 1 Wavelets podem ser consideradas como versões deslocadas e dilatadas de uma dada função de ativação (que obedeça as condições de admissibilidade);
- 2 Valem as propriedades de aproximação universal e aproximação L^2 tanto para redes RBF quanto para redes wavelets;
- 3 Algoritmos para treinamento de redes neurais (por exemplo, o algoritmo LMS) podem ser reutilizados para redes wavelets.

Neste trabalho, utilizaremos o algoritmo LMS normalizado para adaptar os pesos da camada de saída da rede wavelet. A expressão iterativa dessa técnica é [5]:

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{W}_n + \mu \frac{\mathbf{z}_n e_n^*}{\|\mathbf{z}_n\|^2}, \quad (9)$$

onde μ é o passo de adaptação, \mathbf{z}_n o vetor de entradas para o algoritmo e e_n o sinal de erro. O vetor \mathbf{z}_n e o escalar e_n serão devidamente explicitados nas próximas seções.

IV. ADAPTAÇÃO ESTRUTURAL

Neste trabalho, adotaremos a estratégia de adaptação estrutural proposta em [7], ou seja, os nós da camada escondida

serão divididos em três grupos conforme a evolução dos coeficientes da camada de saída:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^+ : & \forall j \text{ se } \|\mathbf{W}_j\|_n - \|\mathbf{W}_j\|_{n-1} > \mu_1 \\ \mathbb{L}^o : & \forall j \text{ se } -\mu_2 \leq \|\mathbf{W}_j\|_n - \|\mathbf{W}_j\|_{n-1} \leq \mu_1 \\ \mathbb{L}^- : & \forall j \text{ se } \|\mathbf{W}_j\|_n - \|\mathbf{W}_j\|_{n-1} < -\mu_2 \end{aligned} \quad (10)$$

onde \mathbf{W}_j é o j -ésimo coeficiente da camada de saída.

As leis de adaptação da rede são:

- Selecione um nó do conjunto \mathbb{L}^- para ser removido a cada iteração no instante de tempo n ;
- Adicione um nó na rede se houver pelo menos um ponto em \mathbb{L}^+ ;

O conjunto \mathbb{L}^o não afeta a adaptação estrutural e não é permitido excluir ou adicionar mais de um nó por iteração. Quando um nó é introduzido na rede, seu peso e seus coeficientes para dilatação e translação são inicializados aleatoriamente.

V. EQUALIZAÇÃO COM REDE WAVELET

Tendo já apresentado o problema de equalização, a estrutura adotada e a metodologia de treinamento, estamos prontos a definir com mais precisão o escopo da aplicação proposta. Como adiantamos na introdução, faremos uso da rede wavelet em dois contextos: um mais clássico, de equalização supervisionada, e um contexto menos usual, de equalização cega baseada em predição não-linear.

No problema de equalização supervisionada, a rede wavelet terá por objetivo recuperar com a maior fidelidade possível uma versão atrasada s_{n-d} do sinal transmitido. O treinamento da rede terá por base uma medida de erro entre o sinal desejado e a saída y_n , como mostra a Figura 4.

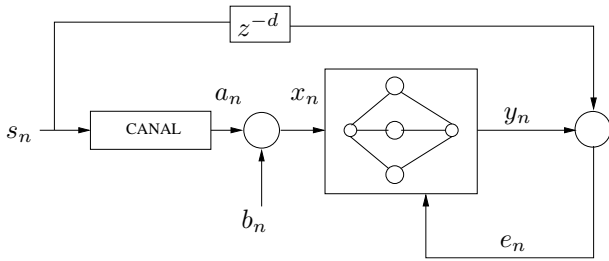


Fig. 4. Rede wavelet para equalização supervisionada.

No caso não-supervisionado, projetaremos a rede wavelet para que ela faça o papel de um preditor num esquema em que o equalizador é o filtro de erro de predição resultante. Para que entendamos essa proposta, fundamentada nos arcabouço teórico desenvolvido em [2] e [3], assumamos que a parte determinística do canal pode ser modelada por um filtro FIR:

$$F(z) = \sum_{i=0}^{N_h-1} h_i z^i, \quad (11)$$

onde N_h é o número de coeficientes do canal h .

Dessa forma, o sinal de entrada do equalizador (que é o filtro de erro de predição) pode ser representado como

$$\mathbf{x}_n = h_0 s_n + h_1 s_{n-1} + \dots + h_{N_h-1} s_{n-N_h+1} + b_n, \quad (12)$$

onde b_n é o processo estocástico que representa o ruído aditivo. Dando o nome de $Predictor(\cdot)$ ao operador que representa o mapeamento efetuado pelo preditor, chegamos à seguinte forma para o erro de predição

$$\begin{aligned} e_n^{pred} &= x_n - Predictor(\mathbf{x}_{n-1}) \\ &= h_0 s_n + h_1 s_{n-1} + \dots + h_{N_h-1} s_{n-N_h+1} + b_n - \\ &\quad \underbrace{Predictor(\mathbf{x}_{n-1})}_{\hat{x}_n} \\ &= h_0 s_n + h_1 s_{n-1} + \dots + h_{N_h-1} s_{n-N_h+1} + b_n \\ &\quad - \underbrace{Predictor(h_0 s_{n-1} + \dots + h_{N_h-1} s_{n-N_h+2} + b_{n-1})}_{\hat{x}_n} \end{aligned} \quad (13)$$

No caso ideal, o preditor da equação (13) cancelará os termos redundantes como $(h_1 s_{n-1} + \dots + h_{N_h-1} s_{n-N_h+1})$ e também parte de b_n . Sendo assim, o erro de predição se resumirá a

$$e_n^{pred} = h_0 s_n + b'_n, \quad (14)$$

onde b'_n representa o ruído residual. Portanto, foi recuperado o sinal transmitido, com atraso zero, a menos de um ganho, que pode ser compensado por um mecanismo do tipo AGC (Automatic Gain Control), conforme proposto por [2]. A saída do AGC é submetida a ação de um decisor $dec(\cdot)$, o qual, neste trabalho, é a função sinal.

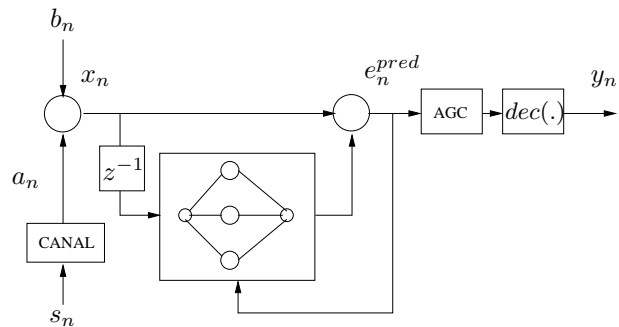


Fig. 5. Rede wavelet para equalização cega.

Nos primeiros trabalhos que fizeram uso dessa proposta, foram utilizadas redes do tipo MLP e um filtro fuzzy [3][2]. O presente trabalho, portanto, contém a primeira aplicação de uma estrutura baseada em wavelets a esse problema particular.

Tendo terminado de expor os dois problemas em torno dos quais gravitarão nossos esforços, estamos aptos a apresentar nossos ensaios e resultados, que serão a base da análise da proposta de filtragem discutida nas seções anteriores.

VI. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Para o caso supervisionado, as configurações de canal, ruído, da rede wavelet e dos algoritmos de treinamento estão na primeira linha da Tabela I. Escolhemos um canal de fase mínima e o atraso de equalização que produz o mais complexo problema de equalização, o qual, aliás, não é passível de solução linear.

Os resultados para o caso supervisionado são apresentados nas Figuras 6-8. A Figura 6 mostra o sinal de saída do equalizador, ou seja, y_n . O sinal de erro instantâneo e_n é exibido na Figura 7, onde chamamos a atenção para a redução acentuada do erro após os primeiros instantes da simulação.

A Figura 9 retrata o sinal e_n^{pred} para o caso não-supervisionado. O objetivo do preditor é tornar e_n^{pred} o mais próximo possível de s_n (pois $h_0 = 1$, vide a segunda linha da Tabela I). Tal meta é alcançada, conforme atesta o comportamento de "abertura do olho" durante a simulação reportada na Figura 9 e os erros de decisão retratados na Figura 10. Portanto, concluímos que a rede wavelet cumpriu a tarefa de maneira adequada a nossas expectativas.

As Figuras 8 e 11 mostram o número de neurônios (ou nós) da camada escondida da rede para cada uma das situações, o que nos permite ter uma boa noção do papel do mecanismo de adaptação estrutural. Observamos que, na fase inicial do processo adaptativo, há uma gradual inserção de neurônios até que, por fim, atinge-se uma configuração satisfatória.

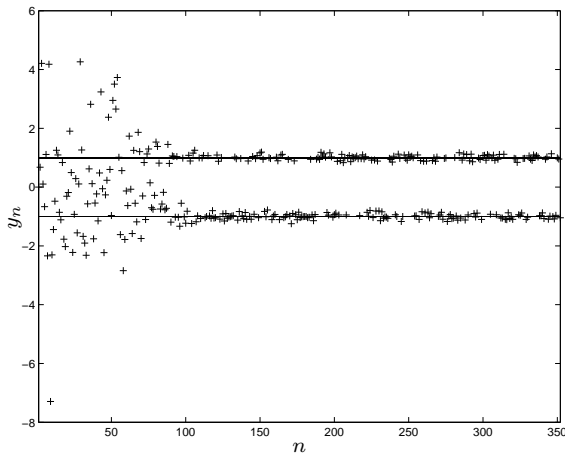


Fig. 6. Rede wavelet com adaptação estrutural para o caso supervisionado.

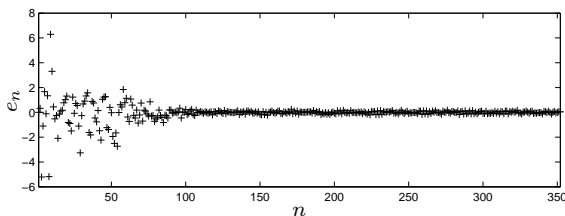


Fig. 7. Erro instantâneo da simulação da Figura 6.

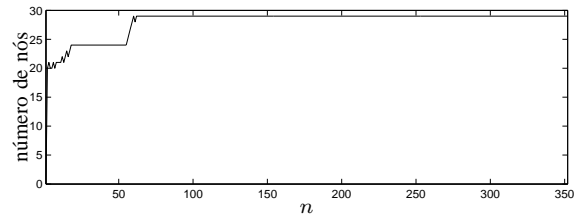


Fig. 8. Evolução do número de nós da simulação da Figura 6.

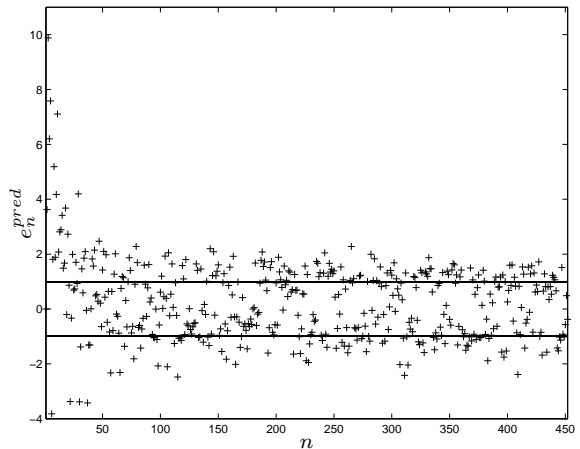


Fig. 9. Rede wavelet com adaptação estrutural para o sistema não-supervisionado.

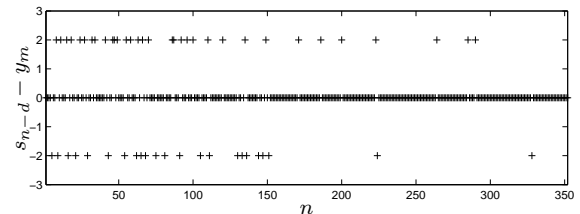


Fig. 10. Diferença entre s_{n-d} e y_n para simulação da Figura 9 (caso não-supervisionado).

VII. CONCLUSÕES

Neste trabalho, analisamos o uso de redes wavelet em problemas de equalização supervisionada e cega de canal. O equalizador não-linear é submetido a um processo de treinamento composto por duas etapas concomitantes: ajuste de parâmetros e adaptação estrutural.

Os resultados mostram que a proposta teve um bom desempenho tanto num contexto supervisionado (em que o treinamento teve por base o critério de Wiener) quanto num contexto não-supervisionado (baseado no critério de erro de predição), o que nos permite tirar conclusões auspiciosas

TABELA I
PARÂMETROS DAS REDES WAVELET UTILIZADAS NAS SIMULAÇÕES

Figuras	M	N	b_n	K	Canal	μ	μ_1	μ_2	Ganho AGC	d	$\phi(t)$
6,7 e 8	4	5	20 dB	2	$h(z) = 1 + 0,6z^{-1}$	0,7	0,15	0,15	0,009	2	$(1 - t^2) \exp(-t^2/2)$
9,10 e 11	3	3	21 dB	3	$h(z) = 1 + 0,8z^{-1} + 0,4z^{-2}$	0,3	0,2	0,2	0,009	0	$(1 - t^2) \exp(-t^2/2)$

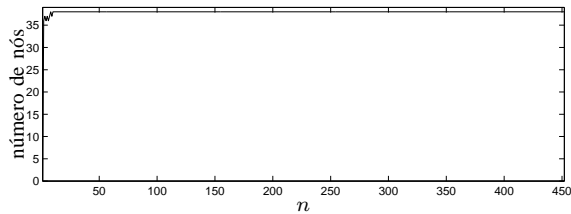


Fig. 11. Evolução do número de nós da simulação da Figura 9.

acerca de sua aplicabilidade a uma ampla gama de problemas de equalização. Dentre as características positivas da rede wavelet, desejamos destacar as seguintes:

- 1) Capacidade de aproximação universal, o que possibilita a aplicação em uma gama ampla de canais, incluindo os não-lineares e variantes no tempo;
- 2) A rede wavelet pode ter diferentes funções (incluindo Gaussianas), o que pode ser encarado como uma generalização dos outros tipos de rede, por exemplo RBF e MLP.
- 3) A rede wavelet com adaptação estrutural permite tratar situações onde a dinâmica do sistema muda bruscamente durante a equalização. Isto inspira a investigação desta ferramenta para sinais com estatísticas não estacionárias.

A utilização da estrutura wavelet em conjunto com uma heurística de ajuste de arquitetura da rede consiste a principal contribuição deste manuscrito. Contudo, os pontos para investigação e análise não foram extintos, restando, por exemplo, elaborar uma metodologia para determinar os parâmetros iniciais da rede (M , N e K) e os ganhos do critério de adaptação estrutural (μ_1 e μ_2).

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPESP pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- [1] M. Cannon e J.-J. E. Slotine. Space-frequency localized basis function networks for nonlinear system estimation and control. *Neurocomputing*, 9(3):293–342, Dez. 1995.
- [2] C. C. Cavalcante, J. R. M. Filho, B. Dorizzi, e J. C. M. Mota. A neural predictor for blind equalization of digital communication systems: Is it plausible? In *Neural Networks for Signal Processing X, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE Signal Processing Society Workshop*, volume 2, pag 736–745, Sydney, 2000.
- [3] R. Ferrari, C. M. Panazio, R. R. F. Attux, C. C. Cavalcante, F. J. V. Von Zuben, L. N. Castro e J. M. T. Romano. Unsupervised Channel Equalization Using Fuzzy-Prediction Filters In *Proceedings of IEEE Workshop on Neural Networks for Signal Processing (NNSP2003)*, Toulouse, 2003.
- [4] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [5] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 3a edição, 1996.
- [6] O. Rioul e P. Duhamel. Fast algorithms for discrete and continuous wavelet transforms. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):569–586, 1998.

- [7] C. Sousa Jr, E. M. Hemerly, e R. K. H. Galvão. Adaptive control of mobile robot using wavelet networks. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 32(4):493–504, Aug. 2002.
- [8] J. Zhang, G. G. Walter, Y. Miao, e W N. W. Lee. Wavelet neural networks for function learning. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(6):1485–1497, 1995.
- [9] Q. Zhang. Using wavelet network in nonparametric estimation. *IEEE Trans. Neural Networks*, 8(2):227–236, Mar. 1997.
- [10] Q. Zhang and A. Benveniste. Wavelet network. *IEEE Trans. Neural Networks*, 3(6):889–898, Nov. 1992.