

# Capacidade erro-zero de canais quânticos e estados puros

Rex A. C. Medeiros e Francisco M. de Assis

**Resumo**—Neste trabalho é mostrado que a capacidade erro-zero para a transmissão de informação clássica através de canais quânticos é calculada considerando somente estados puros na entrada do canal. Este resultado é usado para calcular a capacidade clássica de erro-zero de alguns canais quânticos. Por fim, são apresentados alguns resultados preliminares no cálculo da capacidade quando o canal quântico é usado  $n$  vezes para a transmissão de um único estado quântico de entrada.

**Palavras-Chave**—Canais quânticos, Capacidade erro-zero, Estados puros.

**Abstract**—We show in this paper that the zero-error capacity of a quantum channel is reached by using only pure input quantum states. This result is used to find the zero-error capacity of some channels. Finally, we present some preliminary results of the zero-error capacity when the quantum channel is used  $n$  times to transmit a single quantum input state.

**Keywords**—Quantum channels, Zero-error capacity, Pure states.

## I. INTRODUÇÃO

Na teoria da informação clássica, a informação é transmitida por intermédio de um canal de comunicação cuja capacidade foi definida por Shannon com sendo o supremo das taxas para as quais a probabilidade de erro tende assintoticamente a zero a medida que o comprimento do código tende ao infinito [1]. Nos sistemas quânticos, a informação é transmitida através de canais quânticos.

Fisicamente, um canal quântico sem memória pode ser entendido como um processo em que um sistema quântico interage com um ambiente (que pode inicialmente estar num estado padrão) desde o transmissor até o receptor. Matematicamente, um canal quântico pode ser definido por um mapeamento linear entre operadores de densidade, completamente positivo e que preserva o traço dos operadores. Diferentemente do mundo clássico, na teoria quântica são definidas diversas capacidades para canais quânticos. Essas capacidades dependem do que se deseja transmitir, informação clássica ou estados quânticos, e dos recursos físicos utilizados na transmissão, como o emaranhamento e o auxílio de canais clássicos [2]:

- A capacidade clássica ordinária  $C$ , definida como a taxa assintótica máxima na qual a informação clássica pode ser transmitida confiavelmente, usando codificação e decodificação quânticas [3], [4].
- A capacidade quântica ordinária  $Q$ , que é a taxa assintótica máxima na qual qubits podem ser transmitidos em circunstâncias similares [2].

- A capacidade quântica com informação lateral clássica  $Q_2$ , que é a taxa máxima na qual qubits são transmitidos com a ajuda de um canal de comunicação clássico perfeito entre o transmissor e o receptor [5].
- A capacidade clássica auxiliada por emaranhamento  $C_E$ , que é o supremo das taxas para transmissão de informação clássica através de um canal quântico quando uma quantidade ilimitada de emaranhamento está disponível entre o transmissor e o receptor [6].

Todas as capacidades definidas acima permitem uma probabilidade de erro maior do que zero mesmo quando o melhor esquema de codificação é usado. Em algumas situações, entretanto, é de interesse transmitir informação com uma taxa de erro igual a zero, no lugar de uma taxa de erro assintoticamente baixa [7]. A assim denominada capacidade erro-zero de canais clássicos discretos sem memória foi definida inicialmente por Shannon [8]. Recentemente, Medeiros e Assis [9], [10] definiram a capacidade erro-zero de canais quânticos para a transmissão de informação clássica. Nesse contexto, a informação clássica é codificada, via um código de bloco quântico, em estados quânticos que são transmitidos por um canal quântico ruidoso e sem memória. Na recepção, os estados quânticos são medidos, como parte do processo de decodificação. A transmissão, nesse caso, é feita com uma taxa de erro igual a zero.

Neste trabalho, os cálculos das capacidades clássicas de erro-zero de alguns canais quânticos são mostrados. Em particular, são analisados o canal de despolarização de dimensão  $d$ , o canal de atenuação de amplitude e o canal de troca de fase. Para tanto, é mostrado que a capacidade erro-zero para a transmissão de informação clássica através de canais quânticos é obtida usando somente estados puros na entrada do canal. Este resultado é bastante interessante, pois se assim não o fosse, para obter a capacidade seria necessário realizar uma busca no espaço de operadores de densidade que definem os estados mistos. Ao fim, são apresentados alguns resultados preliminares relacionando a capacidade erro-zero e o uso de estados de entrada compostos por  $n$  estados individuais. Ou seja, é analisada a capacidade erro-zero quando se usa o canal  $n$  vezes para a transmissão de um estado quântico de entrada.

Este artigo está organizado como segue. A Seção II apresenta uma revisão da teoria de erro-zero em sistemas quânticos, com os conceitos principais necessários ao entendimento do trabalho. A Seção III apresenta uma prova formal de que a capacidade erro-zero é obtida com o uso de estados puros na entrada do canal. Já na Seção IV o resultado anterior é usado para calcular a capacidade erro-zero de alguns canais quânticos. A Subseção IV-D apresenta alguns resultados da análise da capacidade de canais  $n$ -produto. Finalmente, a

Rex A. C. Medeiros e Francisco M. de Assis, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, E-mails: [rex,francos]@dee.ufcg.edu.br. Este trabalho foi financiado pelo CNPq.

Seção V apresenta as conclusões.

## II. CAPACIDADE ERRO-ZERO DE CANAIS QUÂNTICOS

Seja  $\mathcal{X}$  o conjunto de estados de entrada possíveis para o canal quântico  $\mathcal{C}$ . Considera-se que os estados de  $\mathcal{X}$  pertencem a um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensão  $d$ . Seja  $\bar{\rho} \in \mathcal{X}$ . Denote por  $\bar{\sigma} = \mathcal{E}(\bar{\rho})$  o estado quântico recebido quando  $\bar{\rho}$  é transmitido através do canal quântico. Defina também  $\mathcal{S}$  como sendo um subconjunto finito de  $\mathcal{X}$  e  $\bar{\rho}_i \in \mathcal{S}$ . Se Bob realiza medições usando um POVM (*Positive Operator-Valued Measurements*)  $\{E_j\}$ , em que  $\sum_j E_j = I$ , então  $p(j|i)$  denota a probabilidade de Bob medir  $j$  dado que Alice enviou o estado  $\bar{\rho}_i$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} p(j|i) &= \text{tr}[\bar{\sigma}_i E_j] \\ &= \text{tr}[\mathcal{E}(\bar{\rho}_i) E_j]. \end{aligned} \quad (1)$$

A capacidade erro-zero quântica é definida para estados produtos na entrada do canal. O produto tensorial de quaisquer  $n$  estados de entrada irá ser chamado de palavra quântica de entrada,  $\rho_i = \bar{\rho}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \bar{\rho}_{i_n}$ , que pertence a um espaço de Hilbert de dimensão  $d^n$ , denotado por  $\mathcal{H}^n$ . Um mapeamento de  $K$  mensagens clássicas (que possuem índices inteiros  $1, \dots, K$ ) em um subconjunto de palavras quânticas de entrada irá ser chamado de um código de bloco quântico de comprimento  $n$ . Os estados do subconjunto são chamados de palavras código quânticas. Claramente,  $\frac{1}{n} \log K$  irá ser a taxa desse código. Uma seqüência de  $n$  índices de saída obtidos a partir de medições POVM com elementos  $\{E_1, \dots, E_N\}$  irá ser designada de palavra de saída,  $w \in \{1, \dots, N\}^n$ .

Um esquema de decodificação para um código de bloco quântico de comprimento  $n$  é uma função que associa univocamente cada palavra de saída a inteiros de 1 a  $K$  que representam as mensagens clássicas. A probabilidade de erro para este código quântico é maior do que zero se o sistema de decodificação identificar na saída uma mensagem diferente daquela enviada.

### Definição 1 (Capacidade erro-zero de canais quânticos [9])

Seja  $\mathcal{C}$  um canal quântico representado por um operador quântico linear, completamente positivo e que preserva o traço,  $\mathcal{E}(\cdot)$ . A capacidade erro-zero de  $\mathcal{C}$ , denotada por  $C^{(0)}(\mathcal{E})$ , é o supremo de todas as taxas alcançáveis com probabilidade de erro igual a zero. Isto é,

$$C^{(0)}(\mathcal{E}) = \sup_n \frac{1}{n} \log K(n), \quad (2)$$

em que  $K(n)$  é o número de mensagens clássicas que o sistema pode transmitir sem erro, quando um código de bloco quântico de comprimento  $n$  é usado.

#### A. Equivalente clássico

Dado um canal quântico  $\mathcal{C}$ , um conjunto de estados quânticos de entrada  $\mathcal{S}$  para o canal e um POVM  $\mathcal{P}$ , é possível construir uma representação clássica para o canal quântico  $\mathcal{C}$ . Esta representação considera os estados de entrada e o conjunto de medidores na definição de um canal clássico discreto sem memória (DSM).

Considere um conjunto de estados de entrada  $\mathcal{S} = \{\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_M\}$  e um POVM contendo  $N$  elementos  $\mathcal{P} = \{E_1, \dots, E_N\}$ ,  $\sum_i E_i = I$ , para um canal quântico  $\mathcal{C}$ . Um canal clássico DSM é especificado por uma matriz de probabilidades condicionais  $\|p(y|x)\|$ , também chamada de matriz de transição, em que  $x \in X$ ,  $y \in Y$  e para todo  $x$  e  $y$ ,  $p(y|x) \geq 0$  e para todo  $x$ ,  $\sum_y p(y|x) = 1$ .  $X$  e  $Y$  são chamados de alfabetos de entrada e de saída do canal, respectivamente.

O equivalente clássico DSM para o canal quântico e o mapa  $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$  é feito da seguinte forma.

- O alfabeto de entrada  $X$  será composto pelos índices dos estados quânticos de entrada, ou seja,  $X = \{1, \dots, M\}$ .
- O alfabeto de saída  $Y$  será dado pelos índices dos operadores de medição,  $Y = \{1, \dots, N\}$ .
- Os elementos da matriz de transição do canal clássico DSM são dados por

$$\begin{aligned} p(y|x) &= \text{tr}[\bar{\sigma}_x E_y] \\ &= \text{tr}[\mathcal{E}(\bar{\rho}_x) E_y], \end{aligned} \quad (3)$$

em que  $\mathcal{E}(\cdot)$  é a operação quântica que representa o canal quântico.

**Definição 2 (( $\mathcal{S}, \mathcal{P}$ ) Ótimo [9])** Um mapa  $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$  ótimo para um canal quântico  $\mathcal{C}$  é composto de um conjunto  $\mathcal{S} = \{\bar{\rho}_i\}$  e um POVM  $\mathcal{P} = \{E_j\}$  para os quais a capacidade erro-zero é alcançada.

É fácil verificar que para cada mapa  $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$  existe uma representação via um canal clássico discreto sem memória. A capacidade erro-zero de um canal quântico  $\mathcal{C}$  pode ser calculada determinando-se a capacidade erro-zero do canal DSM clássico equivalente obtido quando o mapa  $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$  ótimo é usado. Isto pode ser observado diretamente pelas definições das capacidades erro-zero clássica e quântica.

Para que um canal quântico possua capacidade erro-zero não nula, é necessário que o canal equivalente clássico possua símbolos de entrada não adjacentes. Dois símbolos de entrada,  $a$  e  $b$  são ditos adjacentes se existir um símbolo de saída  $y$  tal que  $p(y|a) > 0$  e  $p(y|b) > 0$ . Na prática, dois símbolos de entrada são adjacentes se eles puderem levar num mesmo símbolo de saída do canal. Shannon mostrou que a capacidade erro-zero de um canal clássico é nula se, e somente se, todos os símbolos de entrada do canal são adjacentes. O resultado a seguir impõe uma condição para que um canal quântico tenha capacidade erro-zero diferente de zero.

**Teorema 1 ([9])** Seja  $\mathcal{S} = \{\bar{\rho}_i\}$ ,  $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$  um conjunto de  $M$  estados quânticos, e seja  $\mathcal{P} = \{E_j\}$  um POVM contendo  $N \geq M$  elementos tais que  $\sum_{j=1}^N E_j = I$ . Considere os subconjuntos

$$A_k = \{j \in \{1, \dots, N\}; \text{tr}[\bar{\sigma}_k E_j] > 0\}; \quad k \in \{1, \dots, M\}, \quad (4)$$

em que  $\bar{\sigma}_k = \mathcal{E}(\bar{\rho}_k)$ . Então, o canal quântico  $\mathcal{C}$  possui uma capacidade maior do que zero se, e somente se, existir um conjunto  $\mathcal{S}$  e um POVM  $\mathcal{P}$  de forma que, para pelo menos

um par  $(a, b) \in \{1, \dots, M\}^2$ ,  $a \neq b$ , os subconjuntos  $A_a$  e  $A_b$  são disjuntos, i.e.,  $A_a \cap A_b = \emptyset$ .

Os respectivos estados quânticos  $\bar{\rho}_a$  e  $\bar{\rho}_b$  são ditos ser não adjacentes em  $\mathcal{C}$  para o POVM  $\mathcal{P}$ .

*Demonstração:* Suponha que  $\bar{\rho}_a, \bar{\rho}_b \in \mathcal{S}$  obedeçam  $A_a \cap A_b = \emptyset$  para um POVM  $\mathcal{P}$ . É possível construir um código de bloco quântico que mapeia duas mensagens clássicas nos estados  $\bar{\rho}_a$  e  $\bar{\rho}_b$ . Este código terá taxa igual a um e portanto  $C^{(0)}(\mathcal{E}) \geq 1 > 0$ .

Equivalentemente, se  $C^{(0)}(\mathcal{E})$  é maior do que zero, então pelo menos dois estados quânticos de um determinado conjunto  $\mathcal{S}$ ,  $\bar{\rho}_a$  e  $\bar{\rho}_b$ , são não adjacentes em relação ao POVM  $\mathcal{P}$ , isto é,  $A_a \cap A_b = \emptyset$ . ■

### III. CAPACIDADE ERRO-ZERO E ESTADOS PUROS

Um resultado bastante interessante no cálculo da capacidade clássica de Holevo-Schumacher-Westmoreland [4], [3], dada pela equação

$$C_{1,\infty}(\mathcal{E}) \equiv \max_{\{p_i, \rho_i\}} \left[ S \left( \mathcal{E} \left( \sum_i p_i \rho_i \right) \right) - \sum_i p_i S(\mathcal{E}(\rho_i)) \right],$$

é o fato de que o máximo é obtido para estados puros na entrada do canal. Ou seja, não é necessário considerar estados do tipo  $\rho_i = \sum_j p_{ij} |i\rangle\langle i|$  na entrada do canal.

Para o cálculo da capacidade erro-zero é observado um resultado semelhante, enunciado e provado a seguir.

**Teorema 2** *A capacidade erro-zero de canais quânticos é obtida pelo uso de um mapa ótimo  $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ , em que o conjunto  $\mathcal{S}$  é formado somente por estados puros, ou seja,  $\mathcal{S} = \{\rho_i = |v_i\rangle\langle v_i|\}$ .*

*Demonstração:* Considere um canal quântico cuja representação matemática é dada por um mapeamento linear, positivo e que preserva o traço,  $\mathcal{E}(\cdot)$ , com elementos de operação  $\{E_k\}$ . Ou seja, para qualquer entrada  $\rho$  a saída do canal é dada por  $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger$ . Considere também que, para o cálculo da capacidade erro-zero desse canal, um mapa ótimo  $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$  é usado, com  $\mathcal{S} = \{\rho_1, \dots, \rho_M\}$  e  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_N\}$ , de tal forma que cada  $\rho_i$  é um estado misto. Para demonstrar o teorema será mostrado que sempre é possível obter a partir de  $\mathcal{S}$  um conjunto melhor,  $\mathcal{S}'$ , que contém somente estados puros.

O fato mais importante a ser considerado aqui é a observação de que, para um estado de entrada  $\rho_i$ , a capacidade erro-zero poderá ser maior desde que  $\text{tr}[\rho_i P_j] = 0$  para um maior número possível de saídas  $j$ . Isto é ilustrado na Figura (1). Se o número de saídas  $j$  tal que  $\text{tr}[\rho_i P_j] > 0$  é diminuído, isso significa que, possivelmente, existirá um número maior de símbolos de entrada não-adjacentes no canal, o que leva a uma capacidade erro-zero maior.

Considere o estado quântico de entrada  $\rho_i \in \mathcal{S}$ ,  $\rho_i = \sum_v \lambda_{iv} |v_i\rangle\langle v_i|$ . Então, a saída do canal quando  $\rho_i$  é transmitido é dada por

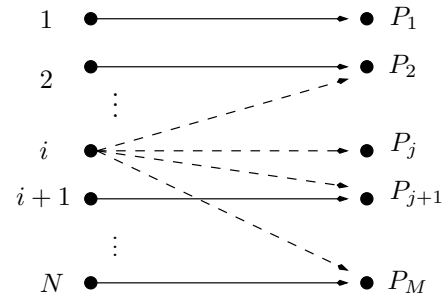


Fig. 1. Canal discreto sem memória obtido pelo uso de um mapa  $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho_i) &= \sum_k E_k \rho_i E_k^\dagger \\ &= \sum_k E_k \left[ \sum_v \lambda_{iv} |v_i\rangle\langle v_i| \right] E_k^\dagger \\ &= \sum_k \sum_v E_k \lambda_{iv} |v_i\rangle\langle v_i| E_k^\dagger. \end{aligned} \quad (5)$$

Dessa forma, a probabilidade de se obter  $j$  na saída do canal dado que o estado  $\rho_i$  foi transmitido é dada por

$$\begin{aligned} p(j|i) &= \text{tr}[\mathcal{E}(\rho_i) P_j] \\ &= \text{tr} \left[ \left( \sum_k \sum_v E_k \lambda_{iv} |v_i\rangle\langle v_i| E_k^\dagger \right) P_j \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Como a função traço é aditiva,  $\text{tr}[A + B] = \text{tr}[A] + \text{tr}[B]$ , então

$$p(j|i) = \sum_v \lambda_{iv} \text{tr} \left[ \left( \sum_k E_k |v_i\rangle\langle v_i| E_k \right) P_j \right]. \quad (7)$$

Note que na Equação acima  $\text{tr}[\cdot]$  é sempre maior ou igual a zero e representa a probabilidade do estado  $\mathcal{E}(|v_i\rangle\langle v_i|) = \sum_k E_k |v_i\rangle\langle v_i| E_k$  ser detectado na saída do canal pelo elemento de POVM  $P_j$ , dado que  $|v_i\rangle\langle v_i|$  é um estado puro na entrada do canal.

Dessa forma, o somatório em  $v$  na Equação (7) representa a probabilidade média de cada estado puro  $|v_i\rangle\langle v_i|$ , que é resultado da decomposição espectral de  $\rho_i$ , ser detectado na saída do canal pelo POVM  $P_j$ . Então, para que  $p(j|i)$  seja tanto menor quanto possível basta que, ao invés de enviar o estado misto  $\rho_i$  pelo canal, envie-se o estado puro  $|v_i\rangle\langle v_i|$  que minimize a probabilidade

$$p(j|i) = \min_{|v_i\rangle} \text{tr} \left[ \left( \sum_k E_k |v_i\rangle\langle v_i| E_k \right) P_j \right]. \quad (8)$$

Finalmente, o mapa ótimo será composto por um conjunto de estados  $\mathcal{S}' = \{\rho_1, \dots, \rho_M\}$ , sendo cada  $\rho_i = |v_i\rangle\langle v_i|$  um estado puro. ■

Tal resultado é bastante importante pois facilita o cálculo da capacidade erro-zero dos canais quânticos, reduzindo o espaço de busca dos estados de entrada para estados puros.

#### IV. CAPACIDADES ERRO-ZERO DE ALGUNS CANAIS QUÂNTICOS

Nesta seção serão calculadas as capacidades erro-zero dos canais quânticos de despolarização, do canal de atenuação de amplitude e do canal de troca de fase. No final, será mostrado um limitante para a capacidade de canais quânticos que são produtos tensoriais de outros canais. Em particular é demonstrado que o uso de estados emaranhados na entrada de canais produtos não aumenta a capacidade erro-zero desses canais.

##### A. Canal de despolarização

O canal de despolarização num espaço de Hilbert de dimensão  $d$  atua sobre um estado de entrada  $\rho$  da seguinte forma: [2, pp. 378]

$$\mathcal{E}(\rho) = p \frac{1}{d} I_d + (1-p)\rho, \quad (9)$$

em que  $I_d$  é a matriz identidade de dimensão  $d$ . O efeito desse canal num estado  $\rho$  é levá-lo intacto com probabilidade  $1-p$  e, com probabilidade  $p$ , despolarizar completamente o estado, transformando-o no estado misto  $\frac{1}{d} I_d$ .

Antes de calcular a capacidade erro-zero desse canal, é necessário mostrar o resultado seguinte:

**Lema 1** Não existe nenhuma medição capaz de distinguir perfeitamente entre um estado puro qualquer  $|u\rangle\langle u|$  e um estado completamente despolarizado,  $\rho_d = \frac{1}{d} I_d$ .

*Demonstração:* Para que dois estados  $\rho_1$  e  $\rho_2$  possam ser perfeitamente distinguíveis, eles devem residir em subespaços de Hilbert ortogonais. Dessa forma, a única estratégia de medição possível para fazer a distinção é escolher projetores nesses subespaços, digamos  $P_1$  e  $P_2$ . O POVM a ser utilizado seria então  $\{P_1, P_2, P_3\}$ , em que  $P_3 = I - P_1 - P_2$ .

Fazendo a decomposição espectral do estado completamente despolarizado, obtém-se

$$\rho_d = \frac{1}{d} I_d = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d |i\rangle\langle i|, \quad (10)$$

em que  $\{|1\rangle, \dots, |d\rangle\}$  é a base computacional do espaço de Hilbert de dimensão  $d$ .

O Lema é demonstrado verificando que não é possível construir um POVM capaz de distinguir entre os dois estados. Pela decomposição de  $\rho_d$ , é evidente que o projetor sobre seu subespaço é dado pelo projetor sobre todo o espaço de Hilbert de dimensão  $d$ , ou seja,

$$P_d = \sum_i |i\rangle\langle i| = I. \quad (11)$$

O projetor sobre o subespaço de  $|u\rangle$  é dado por

$$P_u = |u\rangle\langle u|, \quad (12)$$

de forma que  $P_d + P_u > I$  para todo estado  $|u\rangle$  no espaço de Hilbert de dimensão  $d$ . ■

**Teorema 3** A capacidade erro-zero  $C^{(0)}$  do canal de despolarização de dimensão  $d$  é igual a zero.

*Demonstração:* O efeito do canal de despolarização para um estado puro de entrada  $|u\rangle$  é transformar esse estado no estado misto  $p \frac{1}{d} I_d + (1-p)|u\rangle\langle u|$ . Para qualquer mapa  $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ , e em particular para o mapa ótimo, todos os estados puros de entrada de  $\mathcal{S} = \{|u_1\rangle, \dots, |u_M\rangle\}$  são indistinguíveis na saída do canal. Isto porque para uma determinada transmissão no canal, digamos, do estado  $|u_i\rangle$ , o receptor teria que distinguir se a saída era (com probabilidade  $1-p$ ) o estado puro  $|u_i\rangle$  ou (com probabilidade  $p$ ) o estado despolarizado  $\rho_d$ . Diante disso, todos os estados de entrada do canal são adjacentes e, de acordo com o Teorema 1, a capacidade erro-zero do canal de despolarização de dimensão  $d$  é igual a zero. ■

##### B. Canal de troca de fase

O canal de troca de fase (*phase flip*) [2, pp. 376] num espaço de Hilbert de dimensão 2 é caracterizado pelos elementos de operação

$$E_0 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_1 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

O efeito desse canal num qubit é o de levá-lo intacto com probabilidade  $p$  e trocar a sua fase com probabilidade  $1-p$ . Esse canal possui dois pontos fixos, que são estados  $|\psi\rangle$  da forma  $\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi\rangle\langle\psi|$ . Para ver isso note que se

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle \quad \text{e} \quad |\psi_1\rangle = |1\rangle, \quad (14)$$

então  $\mathcal{E}(|0\rangle\langle 0|) = |0\rangle\langle 0|$  e  $\mathcal{E}(|1\rangle\langle 1|) = |1\rangle\langle 1|$ . Pela Proposição 2 em [9], e observando que a dimensão do espaço de Hilbert é igual a dois, conclui-se que a capacidade erro-zero é igual a

$$C^0(\mathcal{E}) = \frac{1}{1} \log(2) = 1, \quad (15)$$

para um mapa  $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$  ótimo dado por

$$\mathcal{S} = \{|0\rangle, |1\rangle\} \quad \text{e} \quad \mathcal{P} = \{P_0 = |0\rangle\langle 0|; P_1 = |1\rangle\langle 1|\}. \quad (16)$$

##### C. O canal de atenuação de amplitude

O canal de atenuação de amplitude (*amplitude damping*) [2, pp. 380] é bastante interessante porque ele modela diversos fenômenos importantes nos sistemas quânticos: a dissipação devido à perda de energia de um sistema quântico, a dinâmica envolvida na emissão espontânea de um fóton por um átomo, etc. Dado um qubit  $\rho$  na entrada do canal, a saída é dada por

$$\mathcal{E}_{AD}(\rho) = E_0 \rho E_0^\dagger + E_1 \rho E_1^\dagger, \quad (17)$$

em que

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

e  $\gamma = \sin^2 \theta$  pode ser visto como a probabilidade de um fóton ser perdido numa cavidade sujeita à atenuação.

Matematicamente, esse canal leva um qubit no estado  $|0\rangle$  intacto, mas atenua a amplitude de qualquer qubit que possua uma componente  $|1\rangle$ . Por exemplo, suponha que um qubit num



estado  $|\psi\rangle = |1\rangle$  seja submetido a um canal com  $\gamma = 0,64$ . O resultado é um sistema no estado misto

$$\mathcal{E}_{AD}(|1\rangle) = 0,64|0\rangle\langle 0| + 0,36|1\rangle\langle 1|. \quad (19)$$

O Corolário a seguir é consequência direta do Lema 1.

**Corolário 1** Num espaço de Hilbert de dimensão dois, não é possível distinguir perfeitamente entre um estado puro  $|\psi\rangle$  e um estado misto  $\rho$ .

A única entrada para esse canal que leva à saída um estado puro é o ponto fixo  $|0\rangle$ . Assim, quaisquer dois estados quânticos puros diferentes na entrada do canal serão, na saída, ou um estado puro (se  $|0\rangle$  for usado) e um misto ou dois estados mistos. Isto quer dizer que quaisquer estados puros de entrada  $\mathcal{S} = \{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_N\rangle\}$  são adjacentes com relação a qualquer POVM  $\mathcal{P}$ . Logo, a capacidade erro-zero desse canal é igual a zero.

#### D. Produtos tensoriais de canais quânticos

Finalmente serão enunciados aqui alguns resultados com relação à capacidade erro-zero de produtos tensoriais de canais quânticos. As demonstrações irão aparecer na versão completa deste artigo [11].

Inicialmente, é necessário definir o que é um canal produto.

**Definição 3 (Canal  $n$ -produto)** Seja  $\mathcal{C}$  um canal quântico representado pelos operadores  $\{E_i\}$ . Um canal  $n$ -produto de  $\mathcal{C}$ , denotado por  $\mathcal{C}^{\otimes n}$ , é o canal resultante de  $n$  vezes o produto tensorial de  $\mathcal{C}$  por ele mesmo. Os operadores deste canal são do tipo

$$\underbrace{\{E_i\} \otimes \dots \otimes \{E_i\}}_{n \text{ vezes}}. \quad (20)$$

A motivação para a definição acima advém da possibilidade de usar o canal quântico  $n$  vezes para transmitir um estado quântico de entrada. Isto porque, na saída, é possível fazer medições conjuntas dos  $n$  estados quânticos recebidos, as chamadas medições emaranhadas entre vários usos do canal [2, pp. 554]. Foi mostrado recentemente que a informação mútua na saída do canal é superaditiva [12]. Isto significa que, ao se medir conjuntamente, digamos,  $n$  estados de saída do canal, a informação mútua é, no mínimo  $n$  vezes igual a soma das informações mútuas resultantes de leituras individuais.

**Teorema 4** Seja um canal quântico  $\mathcal{C}$  cuja capacidade erro-zero  $C^{(0)}$  é igual a  $C$ . Então, o canal  $n$ -produto de  $\mathcal{C}$  possui capacidade erro-zero **no mínimo** igual a  $nC$ .

**Teorema 5** Seja um canal quântico  $\mathcal{C}$  cuja capacidade erro-zero  $C^{(0)}$  é igual zero. Então, o canal  $n$ -produto de  $\mathcal{C}$  possui capacidade erro-zero **igual** a zero.

Como foi visto anteriormente, a capacidade erro-zero deve ser calculada para o uso de estados puros na entrada do canal. No entanto, o que dizer se estados emaranhados fossem usados na entrada do canal  $n$ -produto? O resultado abaixo responde a essa questão:

**Teorema 6** Considere um canal quântico  $\mathcal{C}$  e um canal  $n$ -produto de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}^{\otimes n}$ . A capacidade erro-zero do canal  $n$ -produto é calculada para estados de entrada puros e **não** emaranhados entre mais de um canal  $\mathcal{C}$ .

O resultado parece ser surpreendente, pois é de se esperar que o uso de emaranhamento, que é um recurso disponível somente no mundo quântico, pudesse contribuir para o aumento da capacidade. A idéia da prova do Teorema é a seguinte. Como o canal  $n$ -produto pode ser separado em sub-canais  $\mathcal{C}$ , então o uso de emaranhamento faz com que cada entrada dos canais individuais fiquem mistas. Para ver isso, basta notar que se  $|AB\rangle$  é um estado puro emaranhado no espaço de Hilbert  $A \otimes B$ , então o estado do sistema  $A$  pode ser calculado usando a operação de traço parcial:

$$\rho_A = \text{tr}_B [|AB\rangle\langle AB|]. \quad (21)$$

É fácil verificar [2, pp. 110] que  $\rho_A$  é um estado misto, ou seja, que  $\text{tr} [\rho_A^2] < 1$ . O resultado segue do Teorema 2.

## V. CONCLUSÕES

Neste artigo foram calculadas as capacidades erro-zero de transmissão de informação clássica de vários canais quânticos, a saber, do canal de despolarização, do canal de troca de fase e do canal de atenuação de amplitude.

Os canais de despolarização e de atenuação de amplitude mostraram ter capacidade erro-zero iguais a zero. O canal de despolarização foi analisado considerando estados de entrada de dimensão  $d$ . Já o canal de atenuação de amplitude foi analisado para o caso onde as entradas são bits quânticos (qubits). Entretanto, o Teorema 6 garante que a capacidade é também igual a zero mesmo quando são usados  $n$  estados quânticos para representar um estado de entrada.

Também foi mostrado que a capacidade erro-zero é calculada para estados quânticos puros na entrada do canal. Isso significa uma redução acentuada do espaço de busca dos estados de entrada, no sentido de encontrar o conjunto  $\mathcal{S}$  ótimo que alcance a capacidade erro-zero.

Por fim, foram apresentados alguns resultados preliminares sobre a capacidade erro-zero quando o canal é usado  $n$  vezes para a transmissão de um estado de entrada. Um resultado interessante é que o uso de estados quânticos emaranhados entre vários sub-canais não influencia na capacidade erro-zero do canal.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIAS

- [1] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1991.
- [2] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [3] B. Schumacher and M. D. Westmoreland. Sending classical information via noisy quantum channels. *Phys. Rev. A*, 56(1):131–138, 1997.
- [4] A. S. Holevo. The capacity of the quantum channel with general signal states. *IEEE Trans. Info. Theory*, 44(1):269–273, 1998.
- [5] C. H. Bennett, P. W. Shor, J. A. Smolin, and A. V. Thapliyal. Entanglement-assisted capacity of a quantum channel and the reverse shannon theorem. *IEEE Trans. Info. Theory*, 48:2637–2651, 1998.

- [6] C. H. Bennett, P. W. Shor, J. A. Smolin, and A. V. Thapliyal. Entanglement-assisted classical capacity of noisy quantum channels. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3081–3084, 1999.
- [7] J. Körner and A. Orlitsky. Zero-error information theory. *IEEE Trans. Info. Theory*, 44(6):2207–2229, 1998.
- [8] C. E. Shannon. The zero error capacity of a noisy channel. *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-2(3):8–19, 1956.
- [9] R. A. C. Medeiros and F. M. de Assis. Quantum zero-error capacity. *Int. J. Quant. Inf.*, 3(1):135–139, 2005.
- [10] R. A. C. Medeiros and F. M. de Assis. Zero-error capacity of a quantum channel. In *Proceedings of the 11th International Conference on Telecommunications*, volume 3124 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 100–105, Heidelberg, 2004. Springer-Verlag Heidelberg.
- [11] R. A. C. Medeiros and F. M. de Assis. Em preparação. 2005.
- [12] M. G. A. Paris and J. Reháček. “*Lectures Notes in Physics, Quantum State Estimation*”. Springer, Berlin, 2004.