

Análise de Desempenho de Sistemas com Codificação Wavelet e Diversidade em Canais com Desvanecimento Plano

Luiz F. Q. Silveira, Francisco M. Assis e Ernesto Leite Pinto.

Resumo—Neste trabalho, o desempenho de sistemas com codificação wavelet e diversidade temporal é analisado em canais com desvanecimento Rayleigh plano, através de uma abordagem analítica. Estes sistemas exploram as propriedades de ortogonalidade das matrizes wavelets para viabilizar um esquema de transmissão em diversidade, que permite aumentar o ganho de desempenho da codificação wavelet a um menor custo de complexidade computacional. Visto que os símbolos codificados por essa técnica não são equi-prováveis, segue que a escolha correta do esquema de modulação é um fator crucial para o desempenho dos sistemas baseados na codificação wavelet. As ferramentas matemáticas derivadas neste trabalho podem ser utilizadas para projetar analiticamente as constelações de sinais desses sistemas, de forma a otimizar seus desempenhos em canais com desvanecimento.

Palavras-Chave—Análise de Desempenho, Codificação Wavelet, Diversidade de Transmissão, Desvanecimento.

I. INTRODUÇÃO

Em [1] foi proposta uma nova técnica de codificação para superar os efeitos do desvanecimento. Esta codificação é baseada nas propriedades de ortogonalidade das linhas de uma matriz de coeficientes wavelets (MCW).

No processo de codificação, a seqüência binária de dados é aplicada à entrada de um banco de registradores de deslocamento, com células ponderadas pelos coeficientes de uma matriz wavelet. Da mesma forma que ocorre na codificação convolucional, a informação de cada bit de entrada é disseminada por vários símbolos codificados. Devido às propriedades de ortogonalidade das MCW's, a seqüência de bits de informação pode ser recuperada na recepção simplesmente por um banco de correladores. Este mecanismo de espalhamento da informação no tempo aumenta potencialmente a robustez do sistema à combinação de desvanecimento plano variante no tempo e efeitos de ruídos localizados [2].

É importante ressaltar que o sistema de Tzannes, proposto em [1], apresenta algumas limitações de ordem prática. Desde que o tempo de coerência do canal, em geral, é muito maior que o intervalo de sinalização, o sistema de Tzannes utiliza MCW's com dimensões muito grandes para espalhar apropriadamente a informação no tempo, de forma a produzir ganho de codificação. Entretanto, o aumento na dimensão da MCW pode resultar em degradação de desempenho devido ao acúmulo de pontos na constelação de sinais utilizada no esquema de modulação [1], além de conduzir a um aumento na complexidade computacional do sistema. Por outro lado,

Luiz F. Q. Silveira e Francisco M. Assis, Grupo de Estudos em Problemas de Otimização e Transmissão da Informação - GEPOTI, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Campina Grande, Brasil, E-mails: lfelipe@dee.ufcg.edu.br, fmarcos@dee.ufcg.edu.br

Ernesto Leite Pinto, Grupo de Comunicações Digitais, Departamento de Engenharia Elétrica, Instituto Militar de Engenharia - IME, E-mail: ernesto@ime.br

essa técnica de codificação gera símbolos não-equi-prováveis, tornando sensível o desempenho desses sistemas aos esquemas de modulação empregados.

Em [3] foi proposto um novo sistema de transmissão para explorar o potencial da codificação wavelet em canais com desvanecimento. Nesse sistema, um esquema de diversidade temporal foi integrado à codificação wavelet, visando aumentar o espalhamento da informação no tempo, que é obtido por esta técnica de codificação. Dessa forma, a diversidade introduzida no sistema possibilitou obter ganhos de desempenho em canais com desvanecimento sem aumentar excessivamente a complexidade computacional do mesmo. Por outro lado, o esquema de diversidade proposto em [3] permitiu minimizar a relação de dependência existente entre a dimensão da matriz de coeficientes wavelets e o tamanho da constelação de sinais utilizada na modulação dos símbolos codificados.

No sistema proposto em [3] os símbolos codificados pela matriz de coeficientes wavelets eram mapeado em sinais de constelações sub-ótimas, projetadas empiricamente, por simulação computacional, para o uso específico com a codificação wavelet. De fato, até o momento não se dispunha de ferramentas matemáticas que pudessem ser utilizadas para projetar analiticamente essas constelações.

Neste artigo, são derivadas as ferramentas matemáticas necessárias para analisar o desempenho de sistemas com codificação wavelet e diversidade temporal em canais com desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência. Desde que o desempenho desses sistemas é sensivelmente alterado pelos esquemas de modulação adotados, as ferramentas matemáticas apresentadas aqui, podem viabilizar o projeto analítico das constelações utilizadas nesses sistemas, de forma a otimizar seus desempenhos em canais com desvanecimento.

II. FUNDAMENTOS DA CODIFICAÇÃO WAVELET

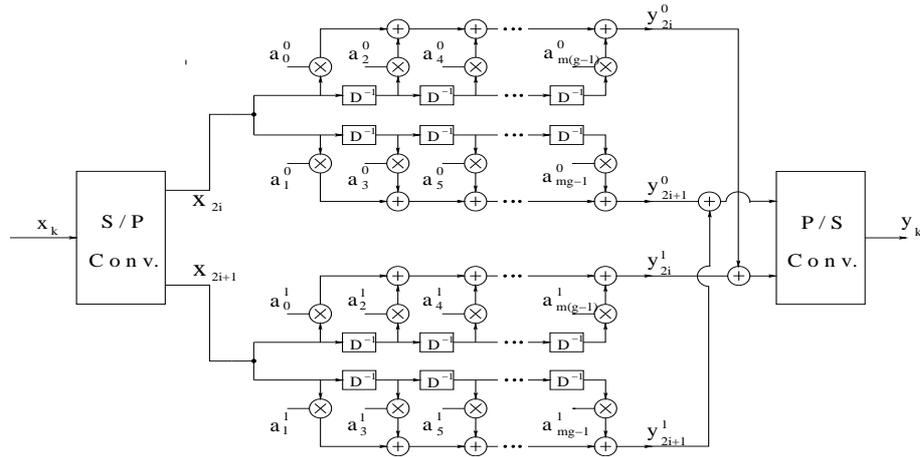
Considere a matriz $\mathbf{A} = (a_k^s)$ com $m \geq 2$ linhas (vetores) e mg colunas denotada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0^0 & \dots & a_{mg-1}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^{m-1} & \dots & a_{mg-1}^{m-1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

com elementos normalizados em ± 1 . Esta matriz é denominada de matriz wavelet real plana se as seguintes propriedades forem satisfeitas [4]:

$$\sum_k a_{k+mr}^s a_{k+mr'}^{s'} = mg \delta_{s,s'} \delta_{r,r'}. \quad (2)$$

$$\sum_k a_k^s = m \sqrt{g} \delta_{0,s}, \quad (3)$$


 Fig. 1. Codificador Wavelet com MCW $2 \times 2g$.

em que $\delta_{r,r'}$ é o delta de Kronecker.

A Equação (2) afirma que as linhas de uma MCW de ordem m são mutuamente ortogonais, mesmo quando deslocadas entre si por um múltiplo de m . Além disso, ela estabelece que cada linha da MCW é ortogonal a si mesma deslocada por um múltiplo m . Essa Equação sintetiza as propriedades das MCW's que são a base da codificação com wavelets.

Para exemplificar o processo de codificação, considere um vetor mensagem $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ consistindo numa seqüência de bits de informação x_n equi-prováveis que pertencem ao conjunto $\{+1, -1\}$. Além disso, considere que no processo de codificação utilizou-se uma matriz MCW real plana com ordem $m = 2$ e gênero g , dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0^0 & \cdots & a_{2g-1}^0 \\ a_0^1 & \cdots & a_{2g-1}^1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Assim como nos codificadores convolucionais, o codificador wavelet converte uma seqüência de dados, não importando o seu comprimento, em uma simples palavra-código. O processo de codificação wavelet proposto em [1] está ilustrado na Figura 1. A seqüência de bits x_n é inicialmente convertida em m seqüências paralelas por um conversor S/P. Cada uma dessas seqüências é aplicada à entrada de um banco de m registradores de deslocamento, formados cada um por g células de memória, ponderadas por coeficientes da MCW utilizada na codificação. De fato, os mg coeficientes do banco de registradores usado para codificar a m -ésima seqüência paralela forma a m -ésima linha da MCW.

O processo de codificação wavelet realiza operações no corpo dos números reais. Em cada n -ésimo intervalo de codificação, o codificador wavelet gera m símbolos y_n^j , chamados *sub-símbolos wavelet*, dados por [3],

$$y_n^j = \sum_{l=0}^{\lfloor n/m \rfloor} x_{ml+j} a_{n-ml}^j \quad 0 \leq j < m. \quad (5)$$

A Tabela I apresenta os sub-símbolos wavelets y_n^j transmitidos durante os primeiros nove intervalos de sinalização para um sistema com MCW $2 \times 2g$.

No sistema proposto em [1], os m sub-símbolos wavelets com o mesmo índice de tempo n são adicionados e transmitidos. Logo, o símbolo transmitido no intervalo de sinalização

 TABELA I
SÍMBOLOS WAVELETS

n	y_n^0	y_n^1
0	$x_0 a_0^0$	$x_1 a_1^1$
1	$x_0 a_0^0$	$x_1 a_1^1$
2	$x_0 a_2^0 + x_2 a_0^0$	$x_1 a_2^1 + x_3 a_0^1$
3	$x_0 a_3^0 + x_2 a_1^0$	$x_1 a_3^1 + x_3 a_1^1$
4	$x_0 a_4^0 + x_2 a_2^0 + x_4 a_0^0$	$x_1 a_4^1 + x_3 a_2^1 + x_5 a_0^1$
5	$x_0 a_5^0 + x_2 a_3^0 + x_4 a_1^0$	$x_1 a_5^1 + x_3 a_3^1 + x_5 a_1^1$
6	$x_0 a_6^0 + x_2 a_4^0 + x_4 a_2^0 + x_6 a_0^0$	$x_1 a_6^1 + x_3 a_4^1 + x_5 a_2^1 + x_7 a_0^1$
7	$x_0 a_7^0 + x_2 a_5^0 + x_4 a_3^0 + x_6 a_1^0$	$x_1 a_7^1 + x_3 a_5^1 + x_5 a_3^1 + x_7 a_1^1$
8	$x_2 a_6^0 + x_4 a_4^0 + x_6 a_2^0 + x_8 a_0^0$	$x_3 a_6^1 + x_5 a_4^1 + x_7 a_2^1 + x_9 a_0^1$

nT_s , denominado *símbolo wavelet*, pode ser expresso por,

$$y_n = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{\lfloor n/m \rfloor} x_{ml+j} a_{n-ml}^j. \quad (6)$$

Quando uma MCW de ordem m e gênero g é utilizada neste sistema, os símbolos wavelets y_n pertencem ao conjunto $\{-mg, \dots, -2k, \dots, 0, \dots, 2k, \dots, mg\}$, com cardinalidade $mg + 1$.

No sistema de Tzannes, o símbolo wavelet y_n é mapeado em uma constelação com $mg + 1$ pontos, e transmitido pela antena no intervalo de sinalização $[nT_s, (n+1)T_s]$. Deve ser observado que a eficiência espectral neste esquema de transmissão é igual a 1 bit/s/Hz.

A seqüência de bits de informação x_n pode ser recuperada a partir da seqüência dos símbolos transmitidos por um banco de correladores. A saída de um correlador casado com a linha a^0 da MCW no instante de tempo i pode ser expressa por

$$z_i = \sum_{k=1}^{mg} y_{i-k} a_{mg-k}^0, \quad i = mg + mr, \quad r \geq 0 \quad (7)$$

Usando a Equação (6), tem-se:

$$z_i = \sum_{k=1}^{mg} \{ (x_{i-mg} a_{k-1}^0) a_{k-1}^0 + (x_{i-(mg-1)} a_{k-1}^1) a_{k-1}^0 + (x_{i-(mg-2)} a_{k-3}^0) a_{k-1}^0 + \dots + (x_{i-1} a_{k-(mg-m+1)}^1) a_{k-1}^0 \} \quad i = mg + mr, \quad r \geq 0 \quad (8)$$

A partir da Equação (2) pode ser verificado que todos os termos da Equação (8) se cancelam, exceto o primeiro. Logo,

$$z_i = x_{i-mg} \sum_{k=1}^{mg} a_{k-1}^0 a_{k-1}^0 = mgx_{i-mg} \quad (9)$$

e o símbolo decodificado na ausência de ruído será -1 se $z_i = -mg$, ou, $+1$ se $z_i = +mg$.

Todo o processo de decodificação necessita de mg correlatores, e implica em um atraso de $mg - 1$ intervalos de bit. A simplicidade computacional dos processos de codificação e de decodificação é uma das principais vantagens da codificação com wavelets.

III. SISTEMA COM CODIFICAÇÃO WAVELET E DIVERSIDADE TEMPORAL

Esta Seção apresenta o modelo do sistema com codificação wavelet e diversidade temporal, proposto inicialmente em [3], que será analisado neste trabalho.

Este sistema integra a codificação wavelet a um esquema de diversidade. A idéia principal aqui é utilizar a MCW com dimensão $m \times mg$ como um banco de m codificadores, como sugerido pela Figura 1. Neste sistema, os m sub-símbolos wavelets y_n^j gerados pelo codificador wavelet no n -ésimo intervalo de codificação são mapeados em sinais PSK, e transmitidos separadamente no intervalo $[nT_s, (n+1)T_s]$ sobre um canal com desvanecimento Rayleigh perfeitamente entrelaçado, ao invés da transmissão do símbolo wavelet y_n , dado em (6), conforme proposto em [1]. De ser ressaltado que em [2] foi proposto um esquema de entrelaçamento em bloco com profundidade proporcional à dimensão da MCW utilizada na codificação que proporciona o mesmo desempenho obtido em um canal perfeitamente entrelaçado.

Cada sub-símbolos wavelet y_i^j pode assumir um valor entre os $g + 1$ valores dados por

$$y_i^j \in \{-g, \dots, -2k, \dots, 0, \dots, 2k, \dots, g\}, \quad (10)$$

com probabilidades diferentes.

É importante notar que neste sistema a dimensão da constelação depende apenas do gênero g da MCW. Portanto, é possível utilizar MCW's maiores na codificação sem degradar o desempenho do sistema devido ao acúmulo de pontos na constelação.

Na recepção, após os fatores de desvanecimento do canal terem sido compensados, os m sinais recebidos em cada intervalo de sinalização nT_s são convertidos para as suas representações vetoriais por um banco de filtros casados. A partir de cada vetor recebido \mathbf{r}_n^j , uma regra de decisão euclidiana é aplicada para se obter uma estimativa ótima para cada sinal transmitido [5]. Essas estimativas são então inversamente mapeadas nos símbolos \tilde{y}_n^j . Para cada intervalo de sinalização, os m sub-símbolos \tilde{y}_n^j ($0 \leq j \leq m-1$) são somados para produzir as estimativas \tilde{y}_n que são decodificadas como apresentado na Seção II.

A estimativa \tilde{y}_n é dada por

$$\tilde{y}_n = \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{y}_n^j = \sum_{j=0}^{m-1} (y_n^j + e_n^j) \quad (11)$$

em que e_n^j é uma variável aleatória discreta, denominada aqui *ruído de demodulação*.

A partir da Equação (7), a saída do correlator casado à linha a^0 da MCW no tempo iT_s pode ser expressa como $z_i = \eta_i + \nu_i$,

em que η_i e ν_i , denominado aqui de *ruído wavelet*, são dados por

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{mg} \left(\sum_{j=0}^{m-1} y_{i-k}^j \right) a_{mg-k}^0, \quad \nu_i = \sum_{k=1}^{mg} \left(\sum_{j=0}^{m-1} e_{i-k}^j \right) a_{mg-k}^0 \quad (12)$$

De acordo com a Equação (9) tem-se que, $\eta_i = +mg$ se $x_{i-mg} = +1$ ou $\eta_i = -mg$ se $x_{i-mg} = -1$.

Portanto, a partir da Equação (9) segue que a probabilidade de erro de bit do sistema com codificação wavelet pode ser dada por:

$$P_e = 0,5 \cdot \Pr(\nu_i > mg \mid x_{i-mg} = -1) + 0,5 \cdot \Pr(\nu_i < -mg \mid x_{i-mg} = +1) + 0,5 \cdot \Pr(\nu_i = mg) \quad (13)$$

A distribuição de probabilidade do ruído wavelet ν_i pode ser definida a partir da distribuição do ruído de demodulação e_n^j condicionada ao bit de informação x_{i-mg} (ver Equação 12). Os detalhes referentes à obtenção desta última distribuição serão abordados a seguir.

A. Distribuição de probabilidade do ruído de demodulação

A variável aleatória do ruído de demodulação e_n^j , como expressa pela Equação (11), é função do símbolo wavelet codificado, do esquema de modulação/recepção utilizado e das perturbações (ruídos) inerentes ao modelo do canal de comunicação adotado.

A fim de tornar mais clara a análise que se segue, suponha que o esquema de codificação wavelet em questão utilize uma matriz MCW real e plana com dimensão 2×8 . Com esta matriz wavelet, os sub-símbolos gerados a cada intervalo de codificação podem assumir os valores do conjunto $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$, como visto nesta seção. A partir da Equação (11) e levando em consideração todos os possíveis erros de demodulação que podem ocorrer no receptor, pode-se construir a Tabela II. Nesse exemplo, a ausência de ruído de demodulação é denotada por $e_n^j = 0$.

TABELA II
RÚIDO DE DEMODULAÇÃO DOS SUB-SÍMBOLOS WAVELETS

Ruído e_n^j	(y_n^j, \tilde{y}_n^j)
2	(0, 2), (2, 4), (-2, 0), (-4, -2)
-2	(0, -2), (2, 0), (4, 2), (-2, -4)
4	(0, 4), (-4, 0), (-2, 2)
-4	(0, -4), (2, -2), (4, 0)
6	(-4, 2), (-2, 4)
-6	(2, -4), (4, -2)
8	(-4, 4)
-8	(4, -4)

Como os pares ordenados (y_n^j, \tilde{y}_n^j) são mutuamente exclusivos, a probabilidade do ruído e_n^j condicionada ao bit de informação x_{i-mg} pode ser expressa por

$$\Pr(e_n^j \mid x_{i-mg}) = \sum_{\mathcal{E}_n^j} \Pr(\tilde{y}_n^j \mid y_n^j) \cdot \Pr(y_n^j \mid x_{i-mg}) \quad (14)$$

em que \mathcal{E}_n é dado por

$$\mathcal{E}_n = \{(y_n^j, \tilde{y}_n^j) : \tilde{y}_n^j - y_n^j = e_n^j\} \quad (15)$$

Para prosseguir com o cálculo de $\Pr(e_n^j \mid x_{i-mg})$ é necessário analisarmos individualmente cada uma das distribuições de probabilidades que aparecem no segundo

termo da Equação (14). A seguir, será abordada inicialmente a distribuição de probabilidade dos sub-símbolos wavelets y_n^j condicionada ao bit de informação x_{i-mg} .

1) *Distribuição de probabilidade dos sub-símbolos wavelets:* A distribuição de probabilidade dos sub-símbolos wavelets y_n^j depende da matriz wavelet utilizada na codificação. A fim de tornar mais clara a análise desta distribuição, considere o exemplo de codificação apresentado na Tabela I.

A partir dessa Tabela e considerando o processo de decodificação apresentado na Seção II, pode ser observado que no intervalo de tempo i o vetor de sub-símbolos wavelets $(y_{i-mg}^0, y_{i-mg}^1, y_{i-mg+1}^0, y_{i-mg+1}^1, \dots, y_i^0, y_i^1)$ decodifica o bit de informação x_{i-mg} (ver Equações (7) e (9)). Tomando esse vetor como referência, denotado aqui de $(\mathbf{y}_{x_{i-mg}}^0, \mathbf{y}_{x_{i-mg}}^1)$, e considerando que o bit x_{i-mg} codificado por ele é conhecido, pode-se encontrar a distribuição condicionada dos símbolos wavelets como segue:

Inicialmente, deve ser observado a partir da Tabela I que os sub-símbolos wavelets $y_n^j, \forall j \in \{0, \dots, m-1\}$ gerados em um mesmo intervalo de codificação são estatisticamente independentes. Também deve ser verificado que apenas os sub-símbolos gerados pelo mesmo registrador que codificou o bit conhecido podem ter informações sobre este bit (ver Figura 1).

A seguir, será analisada a distribuição de probabilidades dos sub-símbolos wavelets estatisticamente dependentes do bit conhecido. Supondo que o bit conhecido x_{i-mg} foi codificado pela linha a^0 da matriz de coeficientes wavelets, então pode-se observar que os símbolos y_n^0 pertencentes ao vetor de sub-símbolos wavelets $\mathbf{y}_{x_{i-mg}}^0$ são expressos por

$$y_n^0 = \sum_{k=1}^{g-1} x_k b_k^0 + l_n,$$

em que $\{x_k\}$ representa a seqüência de $g-1$ bits de informação desconhecidos que são codificados por y_n^0 ; b_k^0 é o coeficiente wavelet que pondera o bit de informação x_k , sendo igual a ± 1 para uma codificação com MCW real e plana; e $l_n \in \{-1, +1\}$ é igual ao produto entre o bit de informação x_{i-mg} e o seu respectivo coeficiente wavelet, sendo portanto determinístico.

Calculando a função geradora de momentos da variável aleatória y_n^0 acima, tem-se [6]:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{y_n^0 | x_{i-mg}}(z) &= \mathbb{E} \left[z^{\sum_{k=1}^{g-1} x_k b_k^0 + l_n} \right] = z^{l_n} \prod_{k=1}^{g-1} \mathbb{E} \left[z^{x_k b_k^0} \right] \\ &= 0.5^{g-1} z^{l_n} (z + z^{-1})^{g-1} \\ &= \sum_{k=0}^{g-1} \binom{g-1}{k} z^{2k-g+l_n+1} 0.5^{g-1} \quad (16) \end{aligned}$$

em que na segunda igualdade utilizou-se o fato de que as v.a.'s $x_k \in \{+1, -1\}$ são estatisticamente independentes. Na terceira igualdade utilizou-se o fato de que as v.a.'s x_k são equiprováveis e identicamente distribuídas.

Portanto, na Equação (16) vê-se que:

$$\Pr(y_n^0 = 2k - g + l_n + 1 | x_{i-mg}) = \binom{g-1}{k} 0.5^{g-1} \quad 0 \leq k \leq g, \quad l_n \in \{+1, -1\} \quad (17)$$

A partir da Equação (17), pode-se observar que cada valor de l_n define um conjunto de valores que o sub-símbolo wavelet

y_n^0 no tempo nT_s pode assumir. Além disso, também pode-se verificar que a distribuição de probabilidades de ocorrência dos valores de y_n^0 nesses dois conjuntos são simétricas em relação a $\Pr(y_n^0 = 0 | x_{i-mg})$.

Sendo assim, de acordo com a Equação (14), as distribuições de probabilidades definidas por $\Pr(e_n^{j, l_n=+1} | x_{i-mg})$ e $\Pr(e_n^{j, l_n=-1} | x_{i-mg})$ também são simétricas. Em que $\Pr(e_n^{j, l_n=\alpha} | x_{i-mg})$, representa a probabilidade de ocorrência do ruído e_n^j condicionada ao bit x_{i-mg} , sabendo-se que o sub-símbolo y_n^j gerado no tempo nT_s pertence ao conjunto de valores definidos por $l_n = \alpha$.

A seguir, será analisada a distribuição de probabilidades dos sub-símbolos wavelets y_n^j estatisticamente independentes do bit de informação conhecido x_{i-mg} .

Considerando novamente a Tabela I, segue que os sub-símbolos wavelets y_n^j que são estatisticamente independentes do bit x_{i-mg} podem ser expressos por

$$y_n^j = \sum_{k=1}^g x_k b_k^j, \quad \forall j \neq 0,$$

em que $x_k, b_k^j \in \{-1, +1\}$ e x_k são estatisticamente independentes e equiprováveis.

Calculando a função geradora de momentos da variável aleatória y_n^j , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{y_n^j}(z) &= \mathbb{E} \left[z^{\sum_{k=1}^g x_k b_k^j} \right] = \mathbb{E} [z^x]^g = \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^{-1} \right)^g \\ &= \sum_{k=0}^g \binom{g}{k} z^{2k-g} \cdot 0.5^g \quad (18) \end{aligned}$$

Portanto, verifica-se a partir da Equação 18 que os sub-símbolos wavelets y_n^j , estatisticamente independentes de x_{i-mg} , têm distribuição dada por

$$\Pr(y_n^j = 2k - g) = \binom{g}{k} 0.5^g, \quad 0 \leq k \leq g \quad (19)$$

A seguir será analisada a probabilidade de ocorrência dos erros de demodulação, denotada aqui por $\Pr(\tilde{y}_n^j | y_n^j)$.

2) *Distribuição de probabilidade dos erros de demodulação:* A distribuição de probabilidade dos erros de demodulação é função do esquema de modulação e do modelo do canal de comunicação adotado. Deve ser ressaltado que o esquema de modulação tem um papel fundamental no desempenho dos sistemas baseados na codificação wavelet [4]. Nesses sistemas, um erro de demodulação entre símbolos wavelets com valores próximos pode resultar em nenhum erro de bit, enquanto que um erro de demodulação entre símbolos muito diferentes em magnitude e sinal pode originar um surto de erros [1].

O sistema analisado neste trabalho utilizou uma constelação PSK sub-ótima projetada empiricamente em [3] com o único propósito de validar a análise derivada aqui. Entretanto, deve ser ressaltado que todo o desenvolvimento analítico apresentado neste trabalho pode ser facilmente adaptado a qualquer esquema de modulação que venha a ser utilizado pelo sistema com codificação wavelet.

Os sub-símbolos wavelets modulados pelos sinais PSK são transmitidos através de um canal com desvanecimento Rayleigh plano. A probabilidade do demodulador se decidir pelo sub-símbolo \tilde{y}_n^j quando o sub-símbolo y_n^j for transmitido em um ambiente de comunicação caracterizado pelo desvanecimento Rayleigh plano é dada pela Equação 20. Nesta Equação α é a variação de amplitude produzida pelo canal; $s_n^j(q)$ e $s_n^j(p)$ são as componentes do sinal PSK que modula

$$\Pr(\tilde{y}_n^j | y_n^j) = \frac{2}{\pi N_0^2} \int_0^\infty \int_{R_{\tilde{y}_n^j}} \int_0^\infty \alpha V \cdot \exp \left[-\frac{V^2 - 2\alpha V \cos(\Theta_s - \Theta_r) + 2\alpha^2}{N_0} \right] \cdot dV d\Theta_r d\alpha \quad (20)$$

o símbolo y_n^j ; $\Theta_s = \tan^{-1}(s_n^j(q)/s_n^j(p))$; $R_{\tilde{y}_n^j}$ é a região de decisão do sinal \tilde{y}_n^j ; $V = \sqrt{r_n^j(p)^2 + r_n^j(q)^2}$ e $\Theta_r = \tan^{-1}(r_n^j(q)/r_n^j(p))$. Neste modelo, considera-se ainda que a energia média de bit é igual a 1, ou seja, $E_b = E[\alpha^2] = 1$.

A integral tripla em (20) foi avaliada numericamente.

B. Distribuição de Probabilidade do Ruído Wavelet

Definida a distribuição condicionada do ruído de demodulação e_n^j , a distribuição de probabilidade do ruído wavelet ν_i condicionada ao bit de informação $x_{i-mg} = -1$ pode ser obtida a partir de sua função geradora como segue

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{(\nu_i | x_{i-mg} = -1)}(z) &= \mathbb{E}[z^{\nu_i} | x_{i-mg} = -1] \\ &= \mathbb{E}\left[z^{\sum_{k=1}^{mg} (\sum_{j=0}^{m-1} e_k^j) a_k^0} | x_{i-mg}\right] \end{aligned} \quad (21)$$

Observando a dependência estatística existente entre as variáveis e_k^j e y_n^j (Equação 14), pode-se concluir que as v.a.'s do ruído wavelet e_k^j em (21) não são estatisticamente independentes, desde que o processo de codificação wavelet introduz uma memória na seqüência de símbolos wavelets codificados.

Entretanto, devido ao efeito do ruído branco presente na definição de e_k^j , constata-se que a dependência existente entre as v.a.'s e_k^j é desprezível. De fato, foram realizados numericamente alguns cálculos de informação mútua $I(X; Y)$ entre variáveis e_k^j consecutivas de sistemas codificados com matrizes wavelets MCW 2×8 e 4×16 , e pôde-se constatar uma dependência muito pequena entre essas variáveis, com a informação mútua calculada empiricamente ficando em torno de $I(e_k; e_{k+1}) = 10^{-4}$.

Dessa forma, admitindo-se a independência estatística entre as variáveis aleatórias e_k^j em (21), tem-se

$$\mathbb{G}_{(\nu_i | x_{i-mg} = -1)}(z) = \prod_{k=1}^{mg} \left\{ \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{m-1} \left(z^{e_k^j a_k^0} | x_{i-mg} \right) \right] \right\} \quad (22)$$

Deve ser observado a partir da Tabela I que os m sub-símbolos wavelets y_k^j , $\forall j \in \{0, \dots, m-1\}$ gerados em um mesmo intervalo de tempo kT_s são estatisticamente independentes. Também pode ser observado na Tabela I que os sub-símbolos gerados pelos registradores que não codificaram o bit x_{i-mg} , não têm informações sobre este bit. Logo, considerando a Equação (14), tem-se:

$$\mathbb{G}_{(\nu_i | x_{i-mg} = -1)}(z) = \prod_{k=1}^{mg} \mathbb{E} \left[z^{e_k^j a_k^0} \right]^{m-1} \cdot \mathbb{E} \left[z^{e_k^j a_k^0} | x_{i-mg} \right] \quad (23)$$

Desde que o primeiro valor esperado na Equação (23) é definido para as v.a.'s e_k^j estatisticamente independentes do bit x_{i-mg} , segue que ele pode ser calculado considerando as Equações (14) e (19), as quais definem a distribuição de

probabilidades dessas variáveis e_k^j específicas. Por outro lado, a partir das Equações (14) e (17) pode-se verificar que as v.a.'s e_k^j que aparecem no segundo valor esperado da Equação (23) são distribuídas segundo duas distribuições diferentes, uma para cada valor de l_k . Desde que $l_k = -1$ quando $x_{i-mg} = -1$ e $a_k^0 = +1$; ou $l_k = +1$ quando $x_{i-mg} = -1$ e $a_k^0 = -1$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{(\nu_i | x_{i-mg})}(z) &= \mathbb{E} \left[z^{e_k^j} \right]^{mg(m-1)} \cdot \prod_{k: a_k^0 = -1} \mathbb{E} \left[z^{-e_k^{j, l_k = +1}} | x_{i-mg} \right] \\ &\quad \cdot \prod_{k: a_k^0 = +1} \mathbb{E} \left[z^{+e_k^{j, l_k = -1}} | x_{i-mg} \right] \end{aligned}$$

Desde que as distribuições de probabilidade denotadas por $\Pr(e_k^{j, l_k = -1} | x_{i-mg})$ e $\Pr(e_k^{j, l_k = +1} | x_{i-mg})$ são simétricas, segue que $\mathbb{E}[z^{e_k^{j, l_k = -1}} | x_{i-mg}] = \mathbb{E}[z^{-e_k^{j, l_k = +1}} | x_{i-mg}]$. Portanto,

$$\mathbb{G}_{(\nu_i | x_{i-mg} = -1)}(z) = \mathbb{E} \left[z^{e_k^j} \right]^{mg(m-1)} \cdot \mathbb{E} \left[z^{e_k^{j, l_k = -1}} | x_{i-mg} \right]^{mg} \quad (24)$$

Considerando (10) e (11), segue que

$$e_k^j \in \{-2g, \dots, -2k, \dots, 0, \dots, 2k, \dots, 2g\} \quad (25)$$

Logo, a partir de (24), a distribuição de probabilidade do ruído wavelet condicionada a $x_{i-mg} = -1$ pode ser obtida pela igualdade

$$\mathbb{E}[z^{\nu_i} | x_{i-mg} = -1] = \mathbb{E} \left[z^{e_k^j} \right]^{mg(m-1)} \cdot \mathbb{E} \left[z^{e_k^{j, l_k = -1}} | x_{i-mg} \right]^{mg} \quad (26)$$

Portanto, considerando as Equações (13) e (26), a probabilidade de erro de bit do sistema com codificação wavelet e diversidade temporal pode então ser expressa por:

$$\begin{aligned} P_e &= \sum_{k=1}^{\frac{mg(2mg-1)}{2}} \Pr(\nu_i = mg + 2k | x_{i-mg} = -1) \\ &\quad + 0.5 \Pr(\nu_i = mg) \end{aligned} \quad (27)$$

IV. APLICAÇÃO

Alguns resultados obtidos pela simulação computacional do sistema codificado com matrizes wavelets e diversidade temporal são apresentados aqui com o objetivo de validar a análise derivada neste trabalho.

A Figura 2 ilustra esses resultados, obtidos para o sistema PSK com diversidade, codificado pelas MCW's 2×8 e 4×16 , em canais com desvanecimento Rayleigh plano. A partir desta figura pode-se observar que as curvas analíticas e de simulação obtidas para estes sistemas são praticamente idênticas, o que valida a análise derivada neste trabalho.

Desde que a distribuição de probabilidade dos símbolos wavelets não é equiprovável, o sistema com codificação

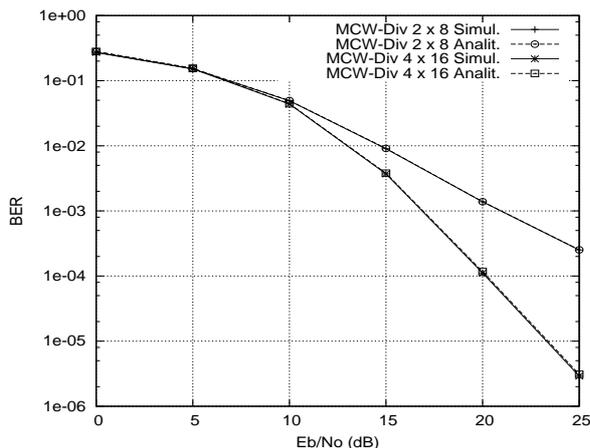


Fig. 2. Sistema proposto, codificado pelas MCW's 2×8 e 4×16 : Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação euclidiana.

wavelet deve utilizar uma regra de demodulação MAP para conseguir estimativas ótimas para os sinais PSK que mapeiam os símbolos wavelets. A Figura 3 apresenta os resultados de simulação e analíticos, obtidos para sistemas com diversidade e demodulação MAP. Esta Figura também ilustra a curva de desempenho da codificação wavelet com MCW 2×8 sem diversidade proposta em [1], que é utilizada aqui como referência para avaliar o ganho de desempenho conseguido com a integração do esquema de diversidade temporal à codificação wavelet.

A partir da Figura 3 pode ser observado que as curvas analíticas se comportam agora como um limitante superior justo para o desempenho dos sistemas com codificação wavelet. Isto ocorre devido a utilização da regra MAP para demodular os sinais no receptor. Esta regra de decisão utiliza informações *a priori* dos símbolos wavelets no cálculo da métrica de decisão, provocando o aumento da dependência estatística entre as v. a.'s e_k (que foram consideradas estatisticamente independentes na análise). Entretanto, com o aumento da SNR do canal, o impacto dessa informação *a priori* sobre a métrica de distância é continuamente minimizado.

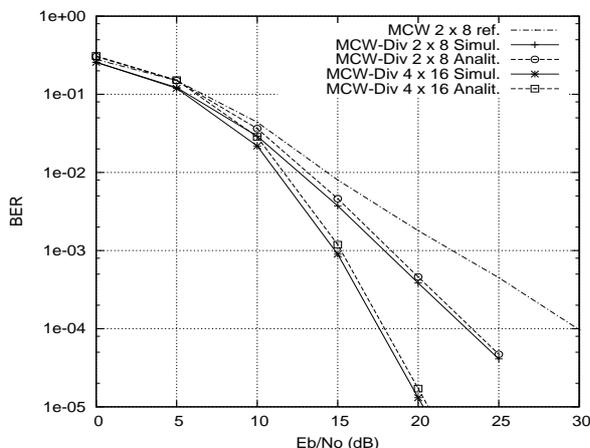


Fig. 3. Sistema proposto, codificado pelas MCW's 2×8 e 4×16 : Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação MAP.

Também pode ser observado a partir da Figura 3, que

para probabilidades de erros de bit em torno de 10^{-4} , o sistema wavelet com MCW 2×8 e diversidade temporal, proposto em [3], apresenta um ganho de E_b/N_0 em torno de 7 dB quando comparado ao sistema de referência sem diversidade, proposto em [1]. Deve ser ressaltado que este ganho de desempenho, conseguido com a integração de um esquema de transmissão em diversidade temporal à codificação wavelet, teve como custo a diminuição da eficiência espectral do sistema, frente aos bons resultados obtidos com o sistema com diversidade, esse custo se justifica. Por outro lado, esquemas de diversidade espacial, baseados na utilização de múltiplas antenas de transmissão e uma única antena de recepção, podem ainda ser investigados com o objetivo de preservar a eficiência espectral obtida pelo sistema de Tzannes [7]. Nesse caso, o desenvolvimento analítico apresentado neste artigo pode ser utilizado como base para a análise desses novos sistemas.

V. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram derivadas ferramentas matemáticas para analisar o desempenho de sistemas com codificação wavelet e diversidade temporal. Os resultados obtidos a partir desta análise indicam que o uso de esquemas de diversidade integrados a esta técnica de codificação possibilita bons ganhos de desempenho em canais com desvanecimento, a um custo computacional relativamente baixo.

Desde que os símbolos wavelets não são equi-prováveis, segue que a escolha correta do esquema de modulação é um fator crucial para o desempenho dos sistemas baseados na codificação wavelet. De fato, este trabalho utilizou constelações sub-ótimas, obtidas empiricamente em [3], apenas com o propósito de validação da análise apresentada. Entretanto, as ferramentas matemáticas derivadas neste trabalho podem ser utilizadas para projetar analiticamente as constelações de sinais dos sistemas com codificação wavelet e diversidade, de forma a otimizar seus desempenhos em canais com desvanecimento.

Por fim, deve ser ressaltado que as ferramentas analíticas derivadas aqui podem ser facilmente generalizadas para analisar o desempenho de outras abordagens baseadas na codificação wavelet.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de expressar os agradecimentos a CAPES pelo apoio financeiro ao trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] TZANNES, M. A.; TZANNES, M. C. "Bit-by-bit channel coding using wavelets". In: *Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference - GLOBECOM'92*. [S.l.: s.n.], 1992. p. 684-688.
- [2] SILVEIRA, L. F. Q.; ASSIS, F. M.; PINTO, E. L. "Performance of a PSK system with wavelet time diversity over flat Rayleigh fading channels". In: *International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC'2003*. [S.l.: s.n.], 2003.
- [3] SILVEIRA, L. F. Q.; ASSIS, F. M.; PINTO, E. L. "A New Wavelet Coded PSK System over Time-varying Flat Fading Channels". In: *Fifth IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications - SPAWC'2004*. [S.l.: s.n.], 2004.
- [4] RESNIKOFF, H. L.; WELLS-JR, R. O. *Wavelet Analysis: The Scalable Structure of Information*. New York, USA: Springer-Verlang, 1998.
- [5] PROAKIS, J. G. *Digital Communications*. New York, USA: McGraw-Hill, 1989.
- [6] VINIOTIS, Y. *Probability and Random Processes*. New York, USA: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1997.
- [7] ALAMOUTI, S. M. "A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications". *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 16, n. 8, p. 1451-1458, October 1998.