Grupos Fuchsianos Identificados em uma Ordem dos Quatérnios sobre uma Extensão dos Racionais de grau 2^n

Vandenberg Lopes Vieira e Reginaldo Palazzo Júnior

***Resumo*— Neste trabalho generalizamos o processo de identificação dos grupos fuchsianos com uma ordem da álgebra dos quatérnios apresentado em [1]. Isto possibilita construirmos os reticulados hiperbólicos associados às correspondentes modulações digitais bem como realizar a rotulagem dos sinais.**

***Palavras-Chave*— Constelações hiperbólicas, superfície de Riemann, Grupos Fuchsianos, Álgebra dos Quatérnios.**

***Abstract*— In this paper we generalize the identification process of the Fuchsian groups with a quaternion order proposed in [1]. This procedure allows us to construct the hyperbolic lattices associated with the corresponding digital modulations as well as to realize the labelling of the corresponding signals.**

***Keywords*— Hyperbolic constellations, Riemann surfaces, Fuchsian groups, Quaternion algebras.**

I. Introdução

Grupos fuchsianos, [2], são subgrupos discretos de $PSL(2,\mathbb{R})$ (o conjunto das transformações de Möbius). Os elementos de $PSL(2,\mathbb{R})$ são isometrias sobre o semi-plano superior $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, bem como agem por homeomorfismos. Se Γ é um grupo fuchsiano é possível equipar o espaço quociente $\mathcal{H}/\Gamma$ (o espaço das Γ-órbitas) com a estrutura de superfície de Riemann.

O principal objetivo deste trabalho é a construção de grupos fuchsianos Γ derivados de uma álgebra dos quaténios A sobre um corpo de números F tal que $[F:\mathbb{Q}] = 2^n$, onde 2^n denota o grau da extensão do corpo dos racionais, $\mathbb{Q}$, conduzindo ao corpo F. Esses grupos são identificados com uma ordem dos quatérnios $\mathcal{O}^1$,[9]. Os geradores de Γ (transformações hiperbólicas) emparelham os lados de uma região fundamental regular $\mathcal{F}$ de modo que a área hiperbólica de $\mathcal{H}/\Gamma$ é $\mu(\mathcal{H}/\Gamma) = 4\pi(2^n - 1)$, sendo $g = 2^n$ o gênero da superfície compacta $\mathcal{H}/\Gamma$, [3] e [4].

Katok em [2] e Johansson [7] propuseram uma maneira aritmética de se obter grupos fuchsianos (os grupos fuchsianos aritméticos). Já em [1] Donizete mostrou que um grupo fuchsiano aritmético está associado a uma ordem $\mathcal{O}^1$ de uma álgebra dos quaténios A sobre uma extensão quadrática, isto é, $[F:\mathbb{Q}] = 2$, de $\mathbb{Q}$, em que os geradores de Γ são da forma

$$g = \begin{pmatrix} a + b\sqrt{t} & r_1\left(c + d\sqrt{t}\right) \\ r_2\left(c - d\sqrt{t}\right) & a - b\sqrt{t} \end{pmatrix},$$

com $a,b,c,d \in \mathbb{Z}[\theta]$, onde $\mathbb{Z}[\theta]$ é o anel de inteiros de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $m > 0$, $r_1 = -r_2 \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{Z}[\theta]$ e $\sqrt{t} \notin \mathbb{Z}[\theta]$. Portanto, como mencionado, generalizamos este resultado para uma álgebra dos quatérnios sobre F com $[F:\mathbb{Q}] = 2^n$.

Este trabalho está organizado da seguite forma. Na Seção II apresentamos algumas considerações básicas sobre espaço hiperbólico e grupos fuchsianos que são necessárias para o trabalho. Na Seção III é mostrado o modelo de região fundamental considerada para a construção dos grupos fuchsianos. Na Seção IV revisamos o conceito de álgebra dos quatérnios bem como os resultados básicos para o desenvolvimento do texto. Na seção V apresentamos os grupos fuchsianos Γ_{4g}. Finalmente, na Seção V consideramos o caso $g = 2^n$ e concluímos com um exemplo exibindo os geradores de Γ_{4g} para $g = 4$.

II. Considerações Básicas

O semi plano superior $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ munido da métrica riemanniana

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y},$$

é o modelo do espaço hiperbólico a ser considerado. Seja $PLS(2,\mathbb{R})$ o conjunto de todas as transformações de Möbius, as transformações $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dadas por $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$, com matriz associada

$$A_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Deste modo,

$$PLS(2,\mathbb{R}) \simeq \frac{SL(2,\mathbb{R})}{\{\pm I_2\}},$$

onde $SL(2,\mathbb{R})$ é o grupo das matrizes reais com determinante igual a 1

Um grupo fuchsiano Γ é um subgrupo discreto de $PLS(2,\mathbb{R})$, ou seja, Γ consiste de transformações que preservam orientação. Portanto, os elementos de Γ agem sobre $\mathcal{H}$ por homeomorfismos, como também são isometrias de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$, [2].

Para cada grupo fuchsiano Γ, associamos uma região fundamental $\mathcal{F}$, resultado da ação de Γ sobre $\mathcal{H}$. É possível

Departamento de Telemática, FEEC-UNICAMP. e-mails: vandenberg, palazzo@dt.fee.unicamp.br. Este trabalho foi financiado pela FAPESP, CNPq e CAPES

fornecer ao espaço quociente $\mathcal{H}/\Gamma$ (espaço das órbitas) a estrutura de superfície de Riemann, [8]. Neste trabalho vamos considerar grupos fuchsianos co-compactos, isto é, grupos Γ para os quais os espaços $\mathcal{H}/\Gamma$ são compactos. Deste modo teremos a área hiperbólica $\mu(\mathcal{H}/\Gamma) < \infty$ e Γ não possuindo elementos parabólicos, $T \in PLS(2,\mathbb{R})$ tal que $|a+d| = 2$. Por outro lado, se Γ não possui elementos elípticos, $T \in PLS(2,\mathbb{R})$ tal que $|a+d| < 2$, então a projeção $\pi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}/\Gamma$ é uma aplicação de recobrimento. Por estas considerações, o grupo fuchsiano contém apenas elementos hiperbólicos. Portanto, [3],

$$\mu(\mathcal{H}/\Gamma) = 4\pi(g-1),$$

onde g é o gênero da superfície compacta $\mathcal{H}/\Gamma$.

III. Região Fundamental

Nesta seção vamos considerar o conceito de domínio fundamental de um grupo fuchsiano (objeto de estudo). No que segue, $\mathcal{X}$ é um espaço métrico e G é um grupo de homeomorfismos agindo sobre $\mathcal{X}$

Definição III.1. *Uma família $\{B_\alpha : \alpha \in A\}$ de subconjuntos de $\mathcal{X}$ indexados por elementos de um conjunto A é chamado de* localmente finito *se para qualquer compacto $K \subseteq \mathcal{X}$, $B_\alpha \cap K \neq \emptyset$ apenas para uma quantidade finita de $\alpha \in A$.*

Definição III.2. *Se $x \in \mathcal{X}$, o conjunto $G(x) = \{g(x) : g \in G\}$ é chamado de G-órbita de x.*

Definição III.3. *Dizemos que um grupo G* age de maneira propriamente descontínua *em $\mathcal{X}$, se uma G-órbita para um dado $x \in \mathcal{X}$ é localmente finita.*

Como mencionado, os elementos de Γ são homeomorfismos agindo sobre $\mathcal{H}$. Mais ainda,

Teorema III.4. *[2]Γ é um grupo fuchsiano se, e somente se, este age de maneira propriamente descontínua sobre $\mathcal{H}$.*

Podemos agora considerar o conceito de região fundamental.

Definição III.5. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço métrico e Γ um grupo de homeomorfismos agindo sobre $\mathcal{X}$ de maneira propriamente descontínua. Um subconjunto fechado $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$ é chamado uma* região fundamental *de Γ se:*

1) $\bigcup_{T\in\Gamma} T(\mathcal{F}) = \mathcal{X}$;
2) $\mathring{\mathcal{F}} \cap T(\mathring{\mathcal{F}}) = \emptyset$ *para* $T \in \Gamma$.

O conjunto $\mathring{\mathcal{F}}$ indica o interior de $\mathcal{F}$. A família $\{T(\mathcal{F}) : T \in \Gamma\}$ é chamada tesselação de $\mathcal{X}$.

A região fundamental considerada neste trabalho é a região R_0 conhecida como *região de Ford* definida a seguir.

Definição III.6. *Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PLS(2,\mathbb{R})$ uma isometria de $\mathcal{H}$, $c \neq 0$. O conjunto*

$$C_T = \{z \in \mathbb{C} : |cz+d| = 1\},$$

é chamado círculo isométrico *de T.*

Se Γ é um grupo fuchsiano cujos elementos são isometrias que preservam orientação no disco unitário

$$\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

com

$$T(z) = \frac{az+\overline{c}}{cz+\overline{a}}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1, \quad T \in \Gamma.$$

Considere

$$\mathring{C}_T = \{z \in \mathbb{C} : |cz+d| > 1\}, \quad \text{e} \quad R_0 = \overline{\bigcap_{T\in\Gamma} \mathring{C}_T \cap \mathbb{D}^2},$$

então:

Teorema III.7. *[2]R_0 é uma região fundamental de Γ.*

IV. Álgebra dos Quatérnios

Seja $A = (a,b)_F$ uma algebra dos quatérnios sobre F com uma base $\{1, i, j, ij\}$ satisfazendo

$$i^2 = a, \; j^2 = b \text{ e } k = ij = -ji,$$

onde $a, b \in F$. Se $x \in A$, digamos $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, então $\overline{x} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$ é chamado *conjugado* de x. A norma reduzida de x e o traço reduzido de x são definidos, respectivamente, por

$$N(x) = x\overline{x} = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 \text{ e } Tr(x) = x + \overline{x} = 2x_0.$$

Exemplo IV.1. *Considere $\mathbb{H} = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ e $\mathbb{H}^1 = \{x \in A : N(x) = 1\}$. Então, dado $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in A$, obtemos $N(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Portanto, $Tr(x) = 2x_0 \in [-1,1]$, pois $|x_0| \leq 1$. Logo, $Tr(\mathbb{H}^1) = [-2,2]$.*

Seja φ um mergulho da álgebra $A = (a,b)_F$ sobre a álgebra das matrizes $M(2, F(\sqrt{a}))$ dado por

$$\varphi(i) = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}, \quad \varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\varphi(i^2) = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(j^2) = b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e $\varphi(i)\varphi(j) = -\varphi(j)\varphi(i)$, então verifica-se que φ é um isomorfismo de $A = (a,b)_F$ em uma subálgebra de $M(2, F(\sqrt{a}))$. Cada elemento de $A = (a,b)_F$ é identificado com

$$x \to \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{a} & x_2 + x_3\sqrt{a} \\ b(x_2 - x_3\sqrt{a}) & x_0 - x_1\sqrt{a} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Temos dois casos a considerar. Se $a = t^2$, com $t \in F^* = F - \{0\}$, então $A \simeq M(2,F)$. Caso contrário, $A \simeq \mathbb{H}$, onde $\mathbb{H}$ é uma subálgebra de $M(2, F(\sqrt{a}))$ com a propriedade de que todo elemento não divisor de zero possui inverso multiplicativo (uma álgebra de divisão).

Seja $A = (a,b)_F$ uma álgebra dos quatérnios sobre o corpo F e seja $\varphi : F \to K$ um homorfismo de corpos. Definimos

$$A^\varphi = \left(\frac{\varphi(a), \varphi(a)}{\varphi(F)}\right) \quad \text{e} \quad A^\varphi \otimes K = \left(\frac{\varphi(a), \varphi(a)}{K}\right).$$

Se F é um corpo de números algébricos totalmente real de grau n, então os $\mathbb{R}$-isomorfismos são dados por:

$$\rho_1 : \quad A^{\varphi_1} \otimes \mathbb{R} \quad \to \quad M(2,\mathbb{R}) \text{ e } \rho_i : \quad A^{\varphi_i} \otimes \mathbb{R} \quad \to \quad \mathbb{H}, \tag{2}$$

onde φ_i é um mergulho de F em $\mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$. e φ_1 é a identidade.

Vamos denotar o anel de inteiros de F por $\mathfrak{O}_F$. Seja $A = (a,b)_F$ uma álgebra dos quatérnios. Um ordem $\mathcal{O}$ em A é um subanel de A contendo a unidade que é um $\mathfrak{O}_F$-módulo finitamente gerado tal que $A = F\mathcal{O}$

Exemplo IV.2. *Considere* $A = (a,b)_F$*, então*

$$\mathcal{O} = \{x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k : x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathfrak{O}_F\},$$

é uma ordem em A *indicada por* $\mathcal{O} = (a,b)_{\mathfrak{O}_F}$

Considere $\mathcal{O}^1$ uma subordem de A dada por

$$\mathcal{O}^1 = \{x \in \mathcal{O} : N(x) = 1\}.$$

Grupos fuchsianos podem ser obtidos do isomorfismo ρ_1, (2), observando que $\rho_1(\mathcal{O}^1) < SL(2,\mathbb{R})$, isto é um subgrupo de $SL(2,\mathbb{R})$. Portanto,

$$\Gamma(A,\mathcal{O}) = \frac{\rho_1(\mathcal{O}^1)}{\{\pm I_2\}} < \frac{SL(2,\mathbb{R})}{\{\pm I_2\}} \simeq PLS(2,\mathbb{R}).$$

Mais ainda,

Teorema IV.3. *[2]* $\Gamma(A,\mathcal{O})$ *é um grupo fuchsiano.*

Se Γ é um subgrupo de $\Gamma(A,\mathcal{O})$ de índice finito, então dizemos que Γ é um grupo fuchsiano derivado da álgebra A.

O próximo teorema caracteriza os grupos fuchsianos derivados de uma álgebra dos quatérnios A.

Teorema IV.4. *[9] Seja* Γ *uma grupo fuchsiano com* $\mu(\mathcal{H}/\Gamma) < \infty$*. Então* Γ *é derivado de uma álgebra dos quatérnios* A *sobre um corpo de números* F *totalmente real se, e somente se,* Γ *satisfaz as seguinte condições:*

1) *Seja* K_1 *o corpo* $\mathbb{Q}(tr(T) : T \in \Gamma)$*. então* K_1 *é um corpo de números algébricos de grau finito, e* $Tr(\Gamma)$ *está contido no anel de inteiros de* K_1*.*
2) *Seja* φ *um mergulho de* K_1 *em* $\mathbb{C}$ *tal que* $\varphi \neq Id$*. Então* $\varphi(tr(T))$ *é limitado em* $\mathbb{C}$*.*

V. Grupos Fuchsianos Γ_{4g}

Donizete em [1] considerou grupos fuchsianos Γ_{4g} cujos geradores emparelham os lados de um polígono regular F_{4g} de $4g$ lados (região fundamental de Γ_{4g}), onde g é o gênero de $\mathcal{H}/\Gamma$ cuja área hiperbólica é $\mu(\mathcal{H}/\Gamma) = 4\pi(g-1)$.

Se u e u_1 são duas arestas de F_{4g} e $T_1 \in \Gamma_{4g}$ é tal que $T(u_1) = u$, então

$$A_{T_1} = \begin{pmatrix} a & c \\ \overline{c} & \overline{a} \end{pmatrix}, \ |a|^2 - |c|^2 = 1,$$

sendo

$$\arg(a) = \frac{(g-1)\pi}{2g}, \ |a| = \tan\frac{(2g-1)\pi}{4g},$$

e

$$|c| = \left(\left(\tan\frac{(2g-1)\pi}{4g}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } \arg(c) = \frac{-(2g-1)\pi}{4g}.$$

Os outros geradores são obtidos por conjugações da forma

$$T_1 = T_{C^{r_i}} T_1 T_{C^{-r_i}}.$$

Para $g = 2,3$, os grupos fuchsianos obtidos são identificados em uma ordem de uma álgebra dos quatérnios sobre $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ e $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$, respectivamente.

VI. O Caso $g = 2^n$

Nesta seção vamos considerar grupos fuchsianos Γ_{4g} derivados de uma álgebra dos quatérnios sobre um corpo de números K, $[K:\mathbb{Q}] = 2^n$, onde 2^n é o gênero da superfície $\mathcal{H}/\Gamma$. Antes apresentaremos o seguinte resultado.

Proposição VI.1. *Se* $g = 2^n$*, onde* n *é um número natural, então*

$$2\tan\left(\frac{(2g-1)\pi}{4g}\right)\cos\left(\frac{(g-1)\pi}{2g}\right) = 2 + \theta,$$

onde $\theta = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$ *contém* n *radicais.*

Demonstração: Como os ângulos $\frac{(2^{n+1}-1)\pi}{2^{n+1}}$ e $\frac{-(2^n-1)\pi}{2^{n+1}}$ são complementares, segue que

$$\sin\left(\frac{(2^{n+1}-1)\pi}{2^{n+2}}\right) = \sqrt{2 + 2\sin\left(\frac{(2^{n+2}-1)\pi}{2^{n+2}}\right)}.$$

Mas para $n = 1$, $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Portanto, usando indução sobre n obtemos

$$2\sin\left(\frac{(2^{n+1}-1)\pi}{2^{n+2}}\right) = \sqrt{2+\theta}.$$

Consequentemente,

$$2\cos\left(\frac{(2^{n+1}-1)\pi}{2^{n+2}}\right) = \sqrt{2-\theta}.$$

E o resultado segue. ■

Considere as arestas de F_{4g} dispostas na ordem

$$u_1,\ v_1, u_1',\ v_1', \cdots, u_g,\ v_g, u_g',\ v_g',$$

tal que $T(u_i) = u_i'$ e $S(v_i) = v_i'$, $i = 1, \cdots, g$. Então

$$T_i = T_{C^{r_i}} T_1 T_{C^{r-r_i}} \quad \text{e} \quad S_i = T_{C^{r_i}} T_1 T_{C^{r-r_i}},$$

onde T_C é uma transformação elíptica de ordem $4g$ com $T_C(u_1) = v_1$ e r_i é a potência de T_C tal que $T_{C^{r_i}}(u_1) \in \{u_g, v_g, u_g', v_g', i = 1, \cdots, g\}$. Com isso,

$$A_i = C^{4(i-1)} A_1 C^{4(i-1)} \quad \text{e} \quad B_i = C^{4i-3} A_1 C^{-4i+3}, \tag{3}$$

onde A_i e B_i são as matrizes correspondendes às transformações T_i e S_i, respectivamente, com $i = 1, \cdots, g$ e

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4g}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\pi}{4g}} \end{pmatrix}.$$

Observe que $\cos\frac{\pi}{g}$ e $\sin\frac{\pi}{g}$ podem ser calculados a partir das igualdades

$$\sin\left(\frac{(2^{n+1}-1)\pi}{2^{n+2}}\right) \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{(2^{n+1}-1)\pi}{2^{n+2}}\right),$$

da Proposição VI.1, pois

$$\frac{\pi}{g}+\frac{(g-2)\pi}{2g}=\frac{\pi}{2},$$

e, consequentemente, para $\cos\frac{k\pi}{g}$ e $\sin\frac{k\pi}{g}$ com $k\in\mathbb{Z}$. Deste modo, para qualquer $r\in\mathbb{Z}$, a matriz C^r assume a forma

$$C^r=\begin{pmatrix} x & 0\\ 0 & \overline{x}\end{pmatrix},$$

com $x=a+bi$, onde $a,b\in\mathbb{Q}(\theta)$.

Considere agora a isometria $f:\ \mathcal{H}\ \rightarrow\ \mathbb{D}^2$ definida por

$$f(z)=\frac{zi+1}{z+i}.$$

Então $\Gamma=f^{-1}\Gamma_{4g}f$ é um subgrupo de $PSL(2,\mathbb{R})$ $(\Gamma\simeq\Gamma_{4g})$. Seja $G_l=f^{-1}A_lf$ os geradores de Γ. Usando a Proposição VI.1, a relação (3) e o fato que

$$\arg(a)=\frac{(g-1)\pi}{2g},\ \ |a|=\tan\frac{(2g-1)\pi}{4g}$$

$$|c|=\left(\left(\tan\frac{(2g-1)\pi}{4g}\right)^2-1\right)^{\frac{1}{2}},\ \arg(c)=\frac{-(2g-1)\pi}{4g}$$

obtemos

$$G_l=\begin{pmatrix} x_l+y_l\sqrt{\theta} & (z_l+w_l)\sqrt{\theta}\\ -(z_l-w_l)\sqrt{\theta} & x_l+y_l\sqrt{\theta}\end{pmatrix}, \qquad (4)$$

onde x_l, y_l, z_l, $w_l\in\mathbb{Z}[\theta]$ e θ como na Proposição VI.1. Mas o discriminnte da base $\{1,\theta,\cdots,\theta^{n-1}\}$ é

$$\Delta\left[1,\theta,\cdots,\theta^{n-1}\right]=2^k.$$

Basta notar que os n monomorfismos

$$\varphi_i:\ \ K\ \rightarrow\ \mathbb{R}$$

com $K=\mathbb{Q}(\theta)$ são dados por

$$\varphi_i(\theta)=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\cdots\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}}}}.$$

Portanto, [5] e [6],

$$\mathfrak{O}_K=\mathbb{Z}[\theta].$$

Vamos provar agora que Γ é derivado de uma álgebra dos quatérnios sobre $K=\mathbb{Q}(\theta)$, com $[K:\mathbb{Q}]=2^n$. Por construção, $tr(G_i)=tr(A_1)$. Mas pela Proposiçaõ VI.1 obtemos

$$tr(G_i)=tr(A_1)=2+\theta,$$

com

$$\theta=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

ou seja, $tr(G_i)\in\mathfrak{O}_K$, para $i=1,\cdots,2^{n+1}$. Portanto, $tr(G_i)\subset\mathfrak{O}_K$. Disto segue que, a primeira condição do Teorema IV.4 é satisfeita. Por outro lado, seja

$$\varphi_2:\ \ K\ \rightarrow\ \mathbb{R},$$

um homomorfismo dado por $\varphi_2(\theta)=-\theta$. Portanto, $\psi_2:\ L\ \rightarrow\ \mathbb{C}$ definido por $\psi_2\left(\sqrt{\theta}\right)=i\sqrt{\theta}$ é um isomorfismo, onde $L=K\left(\sqrt{\theta}\right)$. Consideremos agora a álgebra dos quatérnios $A[\Gamma]$ sobre $K=\mathbb{Q}(\theta)$ dada por, [8],

$$A[\Gamma]=\{\sum_{i=1}^{\lambda}a_iT_i : a_i\in T_i\in\Gamma\}.$$

Em nosso caso,

$$A[\Gamma]=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b' & a'\end{pmatrix} : a,b\in K\right\},$$

onde a', b' são os conjugados de a e b em K, respectivamente. Se

$$\Psi:\ \ A[\Gamma]\ \rightarrow\ M(2,\mathbb{C}),$$

é um mergulho, onde

$$\Psi(\alpha)=\begin{pmatrix} \psi_2(a) & \psi_2(b)\\ \psi_2(b') & \psi_2(a')\end{pmatrix},$$

então,

$$A^{\psi_2}=\Psi(A[\Gamma])=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ \overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix} : a,b\in\psi_2(L)\right\}.$$

De $A^{\varphi_2}\otimes\mathbb{R}\simeq\mathbb{H}$ e pelo Exemplo IV.1, $\varphi_2(tr(\Gamma))$ é limitado em $\mathbb{C}$. Logo, a segunda condição do Teorema IV.4 também é satisfeita. Concluímos que Γ é derivado de uma álgebra dos quatérnios A sobre $K=\mathbb{Q}(\theta)$, com

$$\theta=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

e $[K:\mathbb{Q}]=2^n$.

Uma das vantagens de se trabalhar com grupos fuchsianos derivados de uma álgebra dos quatérnios A (A uma álgebra de divisão) é que se garante que o espaço das órbitas $\mathcal{H}/\Gamma$ é compacto, [2].

Consideremos agora as seguintes matrizes M_0, M_1, M_2, e M_3 em $M(2,\sqrt{\theta})$, dadas por

$$M_0=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ M_1=\begin{pmatrix} \sqrt{t} & 0\\ 0 & -\sqrt{t}\end{pmatrix}$$

$$M_2=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & -0\end{pmatrix},\ M_3=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{t}\\ -\sqrt{t} & 0\end{pmatrix}.$$

Assim, para cada l os geradores G_l em (4) são identificados com os elementos de Γ_{4g} através do isomorfismo (1) com

$$x=x_l+y_li+z_ij+w_ik,$$

onde $i^2=t$, $j^2=-1$ e $k=ij$. Portanto, o grupo fuchsiano Γ_{4g} é identificado com a ordem $O=(\theta,-1)_{\mathbb{Z}[\theta]}$.

Como uma aplicação dos conceitos estabelecidos anteriormente, iremos apresentar, no exemplo a seguir, os geradores do grupo fuchsiano Γ_{4g} para $g=4$.

Exemplo VI.2. *Considere* $g = 4$.

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{16}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\pi}{16}} \end{pmatrix} \quad e \quad A_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ \overline{c} & \overline{a} \end{pmatrix},$$

com $\arg(a) = \frac{3\pi}{8}$, $|a| = \tan\frac{7\pi}{16}$, $\arg(c) = \left(\left(\tan\frac{7\pi}{16}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}$. *Disso segue que*

$$C = \begin{pmatrix} x+iy & 0 \\ 0 & x-iy \end{pmatrix},$$

com

$$2x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \quad e \quad 2y = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Temos também

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha_1)(1+i(\alpha_2))}{2} & -\frac{\left(\sqrt{2}+i\alpha_3\right)\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \\ -\frac{\left(\sqrt{2}-i\alpha_3\right)\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{(\alpha_1)(1-i\alpha_2)}{2} \end{pmatrix},$$

onde

$$\alpha_1 = 2+\sqrt{2+\sqrt{2}}, \alpha_2 = 1+\sqrt{2}, \alpha_3 = 2+\sqrt{2}+2\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Portanto,

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{x_1-y_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{z_1-w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} \\ \frac{z_1-w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} & \frac{x_1+y_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} \frac{x_1\sqrt{2}-w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} & \frac{z_1+y_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} \\ \frac{-z_1+y_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} & \frac{x_1\sqrt{2}-w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} \frac{x_1+y_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{k_1+w_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{-z_1+w_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{x_1+y_1\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix},$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} \frac{x_1+w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} & \frac{z_1-y_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} \\ \frac{-z_1-y_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} & \frac{x_1-w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} \end{pmatrix},$$

$$G_5 = \begin{pmatrix} \frac{x_1-y_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} & \frac{z_1+w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} \\ \frac{-z_1+w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} & \frac{x_1+y_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} \end{pmatrix},$$

$$G_6 = \begin{pmatrix} \frac{x_1+w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} & \frac{z_1+y_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} \\ \frac{-z_1+y_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} & \frac{x_1+w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} \end{pmatrix},$$

$$G_7 = \begin{pmatrix} \frac{x_1+y_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} & \frac{z_i-w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} \\ \frac{-z_i-w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} & \frac{x_1-y_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} \end{pmatrix},$$

$$G_8 = \begin{pmatrix} \frac{x_1-w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} & \frac{z_1-y_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} \\ \frac{-z_1-y_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} & \frac{x_1+w_1\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})}}{2} \end{pmatrix}.$$

Sendo,

$$x_1 = 2+\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)}, \quad y_1 = 2+\sqrt{2}+2\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)},$$

$$z_1 = \left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)}\right), \quad w_1 = \sqrt{2}.$$

Assim, a ordem associada ao grupo fuchsiano Γ_{16} *é*

$$O = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}, -1\right)_{\mathbb{Z}[\theta]},$$

com $\theta = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Referências

[1] E. D. Carvalho, "Construção e Rotulamento de Constelações de Snais no Plano Geometricante Uniformes em Espaços Euclidianos e Hiperbólicoa,"Tese de doutorado-FEEC-UNICAMP, Dezembro 2001.

[2] S. Katok, "Fuchsian Groups,"The University of Chicago Press, 1992.

[3] A. Beardon, *The Geometry ofDiscrete Groups*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[4] M. Firer. "Grupos Fuchsianos,"Notas de Aula, IMECC-UNICAMP, Agosto 2003.

[5] I.N. Stwart e D.O Tall, "Algebraic Number Theory,"Chapman and Hall, 1996.

[6] P. Ribenboin, "Algebraic Numbers,"New York, Wiley-Interscience, 1072.

[7] S. Johansson, "On Fundamental Domains of Arithmetic Fuchsian Groups,"www.math.chalmers.se/sj/forskning.html.

[8] S. Johansson, "Genera of Arithmetic Fuchsian Groups,"www.math.chalmers.se/sj/forskning.html.

[9] S. Johansson, "Description of Quaternion Algebra,"www.math.chalmers.se/sj/forskning.html.