

Projeto de Equalizadores de Fase com Reduzido Esforço Computacional

Aurencio S. Farias, Sidnei Noceti Filho e Rui Seara

Resumo—Este trabalho propõe um procedimento de projeto para equalizadores de fase baseado na decomposição do atraso de fase original em uma equação de reta e uma função de ondulação em torno da reta. A metodologia proposta proporciona uma estimativa inicial quase-ótima para a função de equalização requerida, sem o uso de processos de otimização. Na etapa seguinte de refinamento, um algoritmo de busca, partindo da estimativa inicial, converge para a solução ótima global com reduzido esforço computacional. Exemplos de aplicação que corroboram a eficácia do método proposto são apresentados e discutidos.

Palavras-Chave—Atraso de fase, equação de reta, equalizador de fase, função de ondulação.

Abstract—This paper proposes a procedure for phase equalizer design based on the decomposition of the original phase delay into a straight-line equation and a ripple function around the former. This methodology leads to an initial quasi-optimal estimate for the required equalization function, without the use of optimization processes. In the following refining step, a search algorithm starting at the initial estimate converges to the global optimal solution, with a reduced computational effort. Application examples that corroborate the effectiveness of the proposed method are presented and discussed.

Keywords—Phase delay, straight-line equation, phase equalizer, ripple function.

I. INTRODUÇÃO

Nos dias atuais, estamos vivenciando uma verdadeira revolução nas áreas de informática e telecomunicações, com um mercado cada vez mais competitivo e exigente no tocante à qualidade e ao volume de tráfego de informações. Dessa forma, é incontestável a importância das técnicas de integração de circuitos eletrônicos na implementação de novos e eficientes dispositivos. Dentre esses, podem ser citados os filtros seletores de sinais que assumem um papel de suma importância no desenvolvimento das técnicas de processamento de sinais.

No projeto de filtros analógicos, vários tipos de funções de aproximação são consideradas [1], sendo que a resposta em frequência do filtro projetado deve atender sobretudo às

especificações de magnitude preestabelecidas. O emprego de tais funções permite ao projetista estabelecer certos compromissos entre a resposta em magnitude desejada e a mínima ordem possível; no entanto, nem sempre os requisitos de fase do projeto do filtro podem ser alcançados.

Nos sistemas físicos, a fase é uma função não-linear da frequência, que pode introduzir distorções nos sinais processados [2]. Dessa forma, o comportamento da fase pode ser determinante, por exemplo, em processamento de imagens e em sistemas pulsados.

No projeto de filtros em que há necessidade de se considerar ambas características, magnitude e fase, podemos utilizar as seguintes abordagens:

- i) projeto do filtro através de um processo de otimização simultânea das características de magnitude e fase, visando atender um conjunto de especificações preestabelecidas;
- ii) projeto do filtro baseado nos chamados filtros transicionais [3]-[7], os quais mesclam características entre duas aproximações clássicas de mesma ordem;
- iii) projeto do filtro considerando duas estruturas de filtragem em cascata: a primeira, obtida por uma aproximação clássica, atendendo as características de magnitude desejada; e, uma segunda, obtida através de uma função passa-tudo, para equalizar a fase dentro das especificações requeridas de projeto.

Na literatura especializada [8]-[14], quando usada a abordagem (iii), encontram-se algoritmos de projeto de equalizadores de fase que, em sua maioria, demandam um elevado custo computacional para a obtenção de coeficientes ótimos para a função de equalização. Tal fato está intimamente relacionado à técnica usada no processo de equalização, a qual depende da escolha da estimativa inicial, do tipo de algoritmo de busca dos coeficientes a ser utilizado e da extensão do espaço de busca considerado.

Neste trabalho, é proposta uma metodologia de obtenção de coeficientes iniciais quase-ótimos de um filtro equalizador, baseada na decomposição do atraso de fase original em dois componentes: uma equação de reta e uma função de ondulação em torno dessa reta, constituindo-se um aprimoramento da abordagem discutida em [15]. Assim, tais coeficientes produzem um atraso de fase de equalização com característica complementar com respeito à inclinação da equação de reta do atraso de fase do filtro original e com uma equivalência de energia de ondulação entre o equalizador e o filtro original. Diferentemente dos métodos tradicionais, que usam estimativas iniciais aleatórias, a nova abordagem

Aurencio S. Farias, Sidnei Noceti Filho e Rui Seara, LINSE - Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, E-mails: {aurencio, sidnei, seara}@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

garante a convergência para a solução ótima global dos coeficientes do equalizador com muito poucas iterações do algoritmo de busca, sem riscos de mínimos locais.

II. DESCRIÇÃO DO MÉTODO

O atraso de fase $\tau_p(\omega) \triangleq -\theta(\omega)/\omega$ de um sistema com fase linear é uma constante, onde $\theta(\omega)$ caracteriza a função de fase do sistema. Assim, o objetivo de um processo de equalização é encontrar um atraso de fase $\tau_{pE}(\omega)$ de um equalizador que, somado ao atraso de fase $\tau_{pF}(\omega)$ do sistema original, resulte idealmente em um atraso de fase total constante $\tau_{pFE}(\omega)$ dado por

$$\tau_{pFE}(\omega) = \tau_{pF}(\omega) + \tau_{pE}(\omega). \quad (1)$$

A função de transferência (passa-tudo) que representa um equalizador de fase de 2ª ordem, cujos coeficientes são freqüentemente obtidos através de técnicas de otimização, é dada por

$$H_E(s) = \frac{s^2 - (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}, \quad (2)$$

onde Q e ω_0 representam o fator de qualidade e a freqüência do pólo, respectivamente.

O atraso de fase $\tau_p(\omega)$ pode ser decomposto em duas parcelas: (i) uma que representa uma equação de reta, dada por $\tau_\alpha(\omega) = \omega \tan(\alpha) + K$, obtida por regressão linear, onde $\tan(\alpha)$ e K são, respectivamente, os coeficientes angular e linear; (ii) outra que é uma função de ondulação (*ripple*), dada por $\tau_r(\omega) = \tau_p(\omega) - \tau_\alpha(\omega)$, obtida em relação à equação da reta, resultando em

$$\tau_p(\omega) = \omega \tan(\alpha) + K + \tau_r(\omega). \quad (3)$$

Aplicando-se esse princípio aos atrasos de fase $\tau_{pF}(\omega)$ e $\tau_{pE}(\omega)$, obtém-se

$$\tau_{pF}(\omega) = \omega \tan(\alpha_F) + K_F + \tau_{rF}(\omega) \quad (4)$$

e

$$\tau_{pE}(\omega) = \omega \tan(\alpha_E) + K_E + \tau_{rE}(\omega), \quad (5)$$

onde os subscritos “F” e “E” representam as grandezas associadas ao filtro original e ao equalizador, respectivamente. Dessa forma, (1) pode ser reescrita como

$$\tau_{pFE}(\omega) = \omega \tan(\alpha_{FE}) + \tau_{rFE}(\omega) + K_{FE}, \quad (6)$$

onde

$$\tan(\alpha_{FE}) = \tan(\alpha_F) + \tan(\alpha_E), \quad (7)$$

$$\tau_{rFE}(\omega) = \tau_{rF}(\omega) + \tau_{rE}(\omega) \quad (8)$$

e

$$K_{FE} = K_F + K_E. \quad (9)$$

O subscrito “FE” nas expressões anteriores representa a grandeza associada ao filtro equalizado (filtro + equalizador).

Assim, para se obter, em (6), $\tau_{pFE}(\omega)$ constante, é necessário que: (i) $\alpha_E = -\alpha_F$; e (ii) $\tau_{rE}(\omega) = -\tau_{rF}(\omega)$,

resultando em um atraso de fase total idealmente equalizado $\tau_{pFE}(\omega) = K_{FE}$. Baseando-se nesse princípio, a Fig. 1 ilustra uma equalização de fase ideal para um filtro Chebyshev de ordem $n = 2$ com atenuação máxima na banda passante A_{\max} igual a 3 dB.

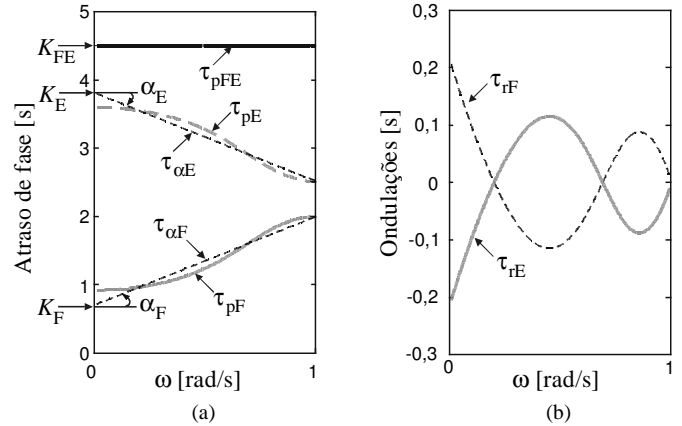


Fig. 1. Equalização de fase ideal para um filtro Chebyshev com $n = 2$ e $A_{\max} = 3$ dB. (a) Atrasos de fase. (b) Ondulações dos atrasos de fase.

Se $\alpha_E = -\alpha_F$ é uma condição necessária, mas não suficiente, para que o atraso de fase total $\tau_{pFE}(\omega)$ seja idealmente constante, então, a estimativa inicial quase-ótima deverá estar contida no lugar geométrico de todos os pontos do espaço de busca que satisfaçam a condição $\alpha_E = -\alpha_F$. Finalmente, para localizar, nesse lugar geométrico, o ponto que representa a estimativa inicial quase-ótima, usamos o somatório do erro quadrático (energia) das ondulações de $\tau_{rE}(\omega)$ na banda de freqüências de interesse ε_{rE} , dado por

$$\varepsilon_{rE} = \sum_{\ell=0}^{L-1} [\tau_{pE}(\omega_i + \Delta\omega \ell) - \tau_{\alpha E}(\omega_i + \Delta\omega \ell)]^2 \Delta\omega, \quad (10)$$

que deve possuir o mesmo valor da correspondente energia ε_{rF} do filtro original, expressa por

$$\varepsilon_{rF} = \sum_{\ell=0}^{L-1} [\tau_{pF}(\omega_i + \Delta\omega \ell) - \tau_{\alpha F}(\omega_i + \Delta\omega \ell)]^2 \Delta\omega, \quad (11)$$

onde $\Delta\omega = (\omega_f - \omega_i)/(L-1)$ é o passo de amostragem, L são amostras igualmente espaçadas na banda de freqüências de interesse ($\omega_i \leq \omega \leq \omega_f$), sendo ω_i e ω_f as freqüências inicial e final, respectivamente, e $\tau_{\alpha E}(\omega)$ e $\tau_{\alpha F}(\omega)$ representam, respectivamente, as retas modelo do equalizador e do filtro a ser equalizado (ver Fig. 1).

Esta estimativa não é ótima, porque apesar de $\alpha_E = -\alpha_F$ e $\varepsilon_{rE} = \varepsilon_{rF}$, a envoltória das ondulações de $\tau_{rE}(\omega)$ não é exatamente simétrica em relação à correspondente envoltória das ondulações de $\tau_{rF}(\omega)$, como na situação ideal mostrada na Fig. 1(b). A melhoria na simetria entre essas envoltórias fica a cargo de um processo de otimização que, com poucas iterações de um algoritmo de busca, converge para a solução ótima global.

Independentemente do sistema a ser equalizado, os cálculos dos coeficientes em (2), que produzem as várias inclinações entre $-90^\circ < \alpha_E < +90^\circ$ acompanhadas de suas respectivas ondulações (ver Figs. 2 e 3), podem ser determinados *a priori*. Logo, a obtenção desses coeficientes quase-ótimos, durante um processo de equalização, demandam um baixo custo computacional.

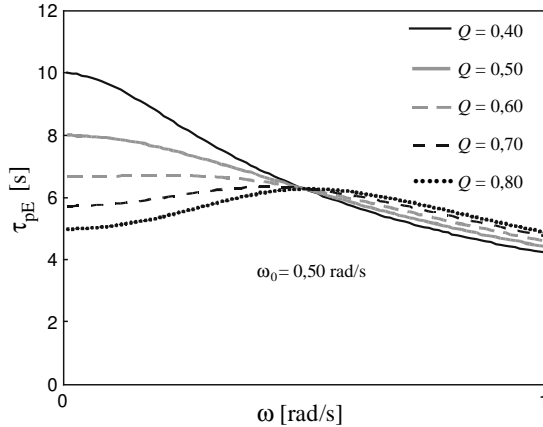


Fig. 2. Atrasos de fase de um filtro passa-tudo para ω_0 constante e Q variável.

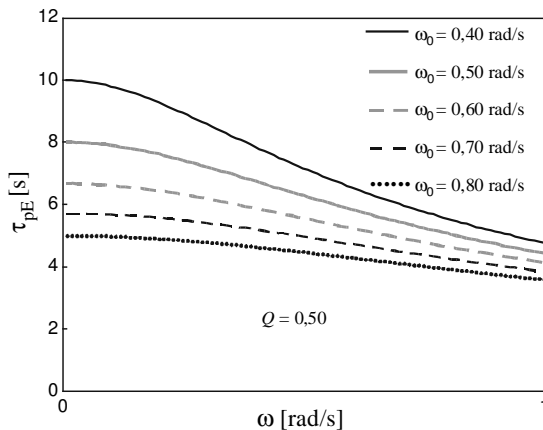


Fig. 3. Atrasos de fase de um filtro passa-tudo para Q constante e ω_0 variável.

O atraso de fase médio na banda de interesse $\tau_m(\omega)$ é dado por

$$\tau_m(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} \tau_p(\omega_i + \Delta\omega \ell). \quad (12)$$

Considerando toda a banda de frequências de interesse, tem-se o somatório do erro quadrático $\varepsilon_{\text{tpFE}}$ do atraso de fase total (filtro + equalizador) $\tau_{\text{pFE}}(\omega)$ em relação a $\tau_m(\omega)$, dado por

$$\varepsilon_{\text{tpFE}} = \sum_{\ell=0}^{L-1} \left[\tau_{\text{pFE}}(\omega_i + \Delta\omega \ell) - \tau_m(\omega_i + \Delta\omega \ell) \right]^2 \Delta\omega, \quad (13)$$

que, no processo de otimização, será usado como a função custo a ser minimizada.

III. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Para avaliar o método proposto, vamos considerar as equalizações de dois filtros passa-baixas normalizados: Chebyshev de ordem $n=7$ (CB7) e Legendre de ordem $n=16$ (LG16), ambos com A_{max} igual a 3dB.

O intervalo $0,01 \leq \omega \leq 1$ em rad/s, com $L=2000$, é adotado como a banda de frequências de interesse. No processo de equalização, os coeficientes ótimos em (2), que minimizam o valor da função custo $\varepsilon_{\text{tpFE}}$ em (13), são obtidos através do algoritmo proposto por Nelder e Mead [16].

A Tabela I mostra as características dos filtros originais que servem de base para a geração das estimativas iniciais, conforme a metodologia proposta ($\alpha_E = -\alpha_F$ e $\varepsilon_{\text{rE}} = \varepsilon_{\text{rF}}$). A Fig. 4 mostra as estimativas iniciais dos coeficientes do equalizador em função de ε_{rE} para as duas situações de $\alpha_E = -\alpha_F$. Além disso, na Tabela I, é mostrada a distorção de fase dos filtros originais, sendo representada pelo somatório do erro quadrático ε_{tpF} do atraso de fase $\tau_{\text{pF}}(\omega)$ do filtro original em relação a $\tau_m(\omega)$, a qual é expressa por

$$\varepsilon_{\text{tpF}} = \sum_{\ell=0}^{L-1} \left[\tau_{\text{pF}}(\omega_i + \Delta\omega \ell) - \tau_m(\omega_i + \Delta\omega \ell) \right]^2 \Delta\omega, \quad (14)$$

onde verificamos que o filtro LG16 tem mais que o dobro da distorção de fase do filtro CB7.

TABELA I
CARACTERÍSTICAS DOS FILTROS ORIGINAIS

Filtro	$\varepsilon_{\text{tpF}} \times 10^{-3}$	$\varepsilon_{\text{rF}} \times 10^{-3}$	α_F
CB7	666	660	+15°
LG16	1421	294	+75°

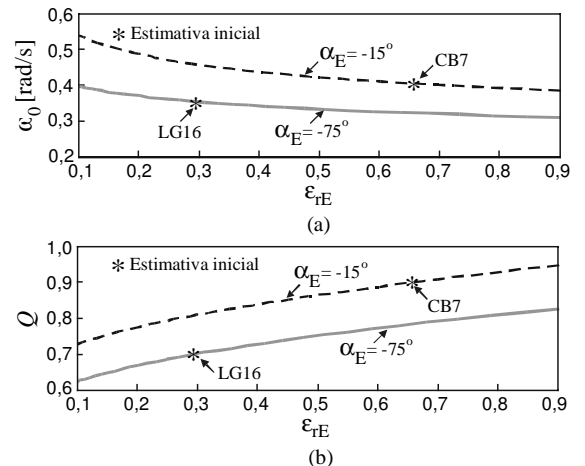


Fig. 4. Estimativas iniciais dos coeficientes do equalizador em função de ε_{rE} . (a) ω_0 em função de ε_{rE} . (b) Q em função de ε_{rE} .

A Tabela II mostra os resultados das equalizações efetuadas em função do número de iterações i do algoritmo de busca, onde para $i=0$ temos os resultados obtidos usando somente a estimativa inicial e para $i=50$, a solução ótima global.

TABELA II
RESULTADOS DAS EQUALIZAÇÕES

Filtro	i	α_E	$\epsilon_{rE} \times 10^{-3}$	$\epsilon_{\tau pFE} \times 10^{-3}$	$(\omega_0; Q)$
CB7	0	-15°	660	288	(0,403; 0,900)
	5	-37°	430	258	(0,418; 0,821)
	50	-33°	458	257	(0,417; 0,834)
LG16	0	-75°	294	209	(0,354; 0,699)
	5	-75°	144	172	(0,385; 0,646)
	50	-74°	139	170	(0,391; 0,646)

Os atrasos de fase e suas ondulações, após 5 iterações do algoritmo de busca (ver Tabela II), são mostrados nas Figs. 5 e 6 para os resultados das equalizações dos filtros CB7 e LG16, respectivamente.

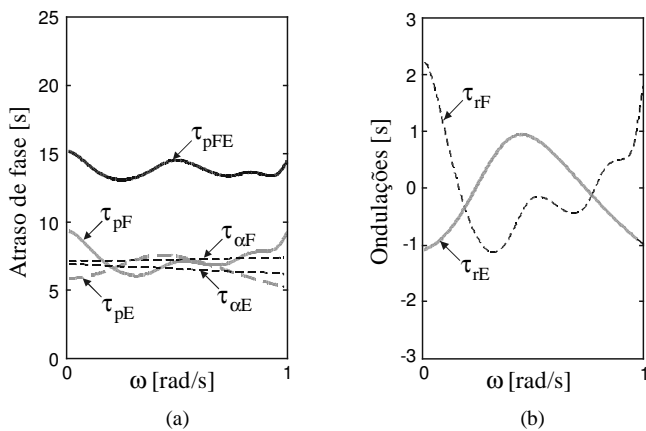


Fig. 5. Equalização de fase para o filtro CB7 após 5 iterações do algoritmo de busca. (a) Atrasos de fase. (b) Ondulações dos atrasos de fase.

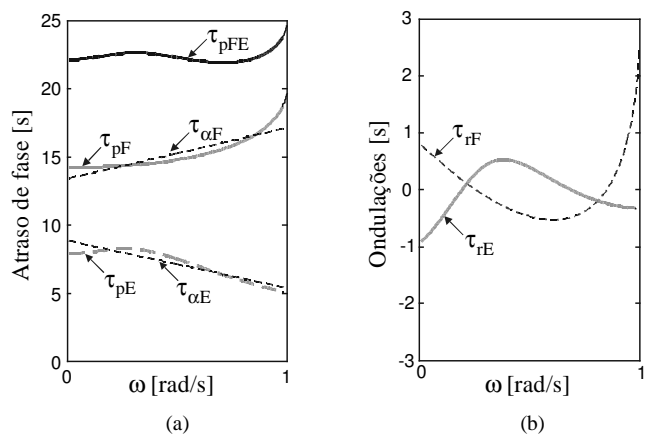


Fig. 6. Equalização de fase para o filtro LG16 após 5 iterações do algoritmo de busca. (a) Atrasos de fase. (b) Ondulações dos atrasos de fase.

Na Tabela II, constata-se que, com apenas 5 iterações no processo de otimização, o valor de $\epsilon_{\tau pFE}$ obtido já é praticamente equivalente ao resultado da solução ótima global ($i = 50$). Tal fato também é confirmado através da Fig. 7 que mostra, após 5 e 50 iterações do algoritmo de busca, o atraso de fase total (filtro + equalizador) para as duas equalizações efetuadas pelo método proposto.

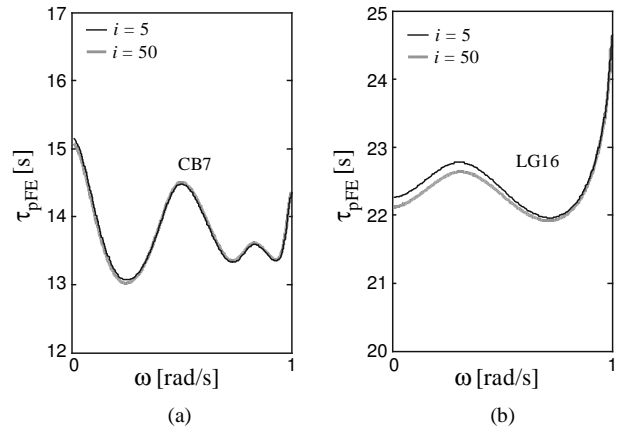


Fig. 7. Atraso de fase total (filtro + equalizador) após 5 e 50 iterações do algoritmo de busca. (a) Filtro CB7. (b) Filtro LG16.

Como uma última comprovação de que as estimativas iniciais escolhidas são quase-ótimas, a Fig. 8 mostra a proximidade entre as estimativas iniciais ($i = 0$) e a solução ótima global ($i = 50$).

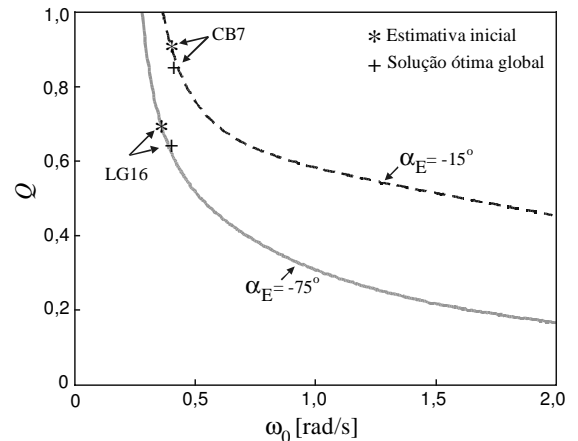


Fig. 8. Proximidade entre as estimativas iniciais dos coeficientes do equalizador e as soluções ótimas globais.

Quanto mais o atraso de fase do filtro original $\tau_{pF}(\omega)$ se aproximar de sua correspondente equação de reta $\tau_{\alpha F}(\omega)$, mais eficiente é a escolha da estimativa inicial pelo método proposto e melhores são os resultados obtidos no processo de equalização. Em outras palavras, quanto menor as ondulações ϵ_{rF} em torno da reta $\tau_{\alpha F}(\omega)$ (ou seja, ϵ_{rF} tendendo a zero), melhores são as chances de se obter uma estimativa inicial mais próxima da solução ótima global, resultando em uma resposta de fase mais linear após a otimização. Tal fato pode ser constatado pelos resultados mostrados nas Figs. 7 e 8 em associação com os valores de ϵ_{rF} da Tabela I. Prova disso é o filtro LG16 que, sendo possuidor do menor valor de ϵ_{rF} entre os dois filtros equalizados, obteve uma equalização de fase mais satisfatória (menor $\epsilon_{\tau pFE}$ após 5 iterações), apesar de originalmente possuir uma fase mais distorcida em relação ao atraso de fase médio τ_m , isto é, ser detentor de um valor de $\epsilon_{\tau pF}$ bem maior do que o do filtro CB7.

Geralmente nos filtros passa-baixas a serem equalizados (principalmente nas aproximações monotônicas), temos um valor reduzido de ϵ_{rF} . Tal fato justifica por que uma função passa-tudo de 2ª ordem em cascata com o filtro original já proporciona bons resultados para a maioria dos casos. É importante salientar que é possível aplicar essa nova metodologia a equalizadores de fase com função de transferência de ordem superior a dois.

IV. INICIALIZAÇÃO COM COEFICIENTES INICIAIS ALEATÓRIOS

Para avaliar a eficácia do método proposto, as equalizações de fase dos filtros CB7 e LG16 serão realizadas agora a partir de uma inicialização com coeficientes aleatórios em (2). Essas equalizações serão agora chamadas simulações aleatórias.

O espaço de busca para a geração dos coeficientes iniciais está compreendido nos limites de $0 < \omega_0 < 4$ (em rad/s) e $0 < Q < 1$. São consideradas 1000 simulações aleatórias para cada equalização dos filtros originais. No máximo, 50 iterações são toleradas ($i \leq 50$) no algoritmo de busca de Nelder e Mead [16] para tentar obter a solução ótima global. O valor de ϵ_{tpFE} para $i = 5$, obtido com o método proposto (ver Tabela II), é tomado como o valor de referência para comparação com as 1000 simulações aleatórias. Simulações aleatórias com $i \leq 50$, que possuem um valor de ϵ_{tpFE} pelo menos menor ou igual ao valor de referência, são consideradas soluções a contento, caso contrário, ditas soluções não a contento.

A Fig. 9 mostra a distribuição percentual das soluções a contento e não a contento para as 1000 simulações aleatórias de cada filtro a ser equalizado.

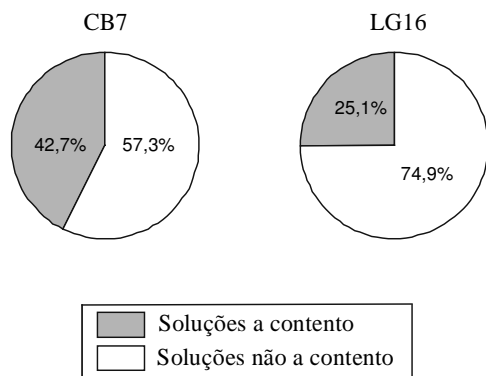


Fig. 9. Distribuição percentual das soluções a contento e não a contento para as 1000 simulações efetuadas com coeficientes iniciais aleatórios.

Constata-se nessa figura que, na equalização do filtro CB7, menos da metade das simulações aleatórias possuem soluções a contento (42,7%), enquanto que para o filtro LG16 esse valor é ainda menor, representando aproximadamente a quarta parte (25,1%).

As Figs. 10 e 11 mostram a proximidade entre as soluções a contento e a solução ótima global (ver Tabela II) na equalização dos filtros CB7 e LG16, respectivamente.

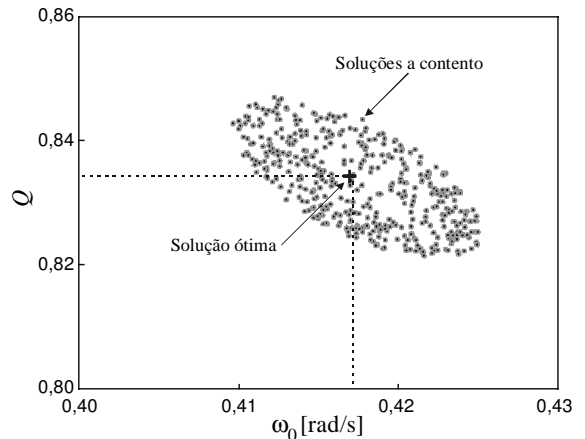


Fig. 10. Proximidade entre as soluções a contento e a solução ótima global na equalização do filtro CB7.

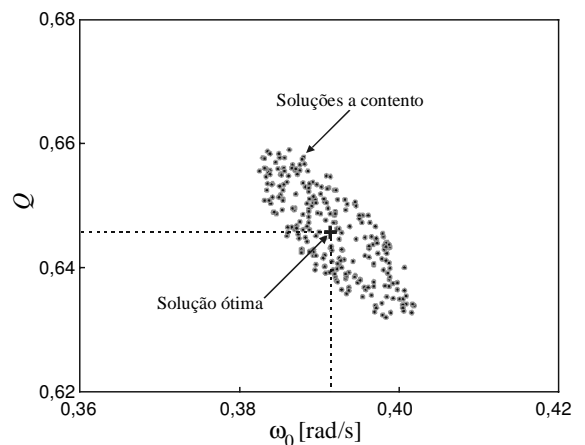


Fig. 11. Proximidade entre as soluções a contento e a solução ótima global na equalização do filtro LG16.

As Figs. 12 e 13 mostram a distribuição percentual das simulações aleatórias a contento para um dado número máximo de iterações permitidas por simulação na equalização dos filtros CB7 e LG16, respectivamente.

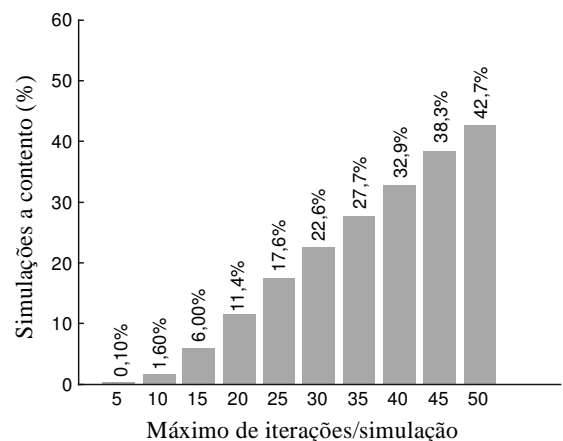


Fig. 12. Distribuição percentual das simulações aleatórias a contento para um dado número máximo de iterações permitidas por simulação para o filtro CB7.

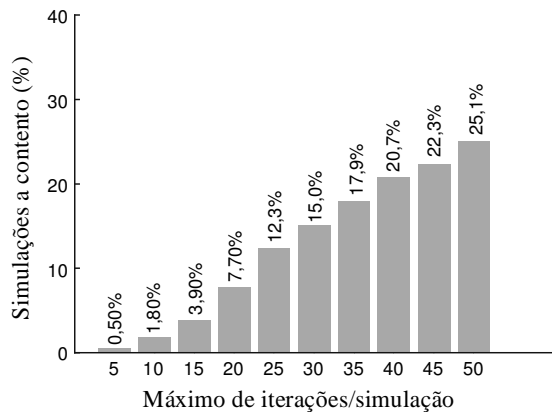


Fig. 13. Distribuição percentual das simulações aleatórias a contento para um dado número máximo de iterações permitidas por simulação para o filtro LG16.

Observa-se nessas figuras que, na equalização do filtro CB7, apenas 0,10% das simulações aleatórias possui uma solução a contento quando o número máximo de iterações permitidas por simulação é igual a 5 (mesma condição utilizada nas equalizações pelo método proposto); enquanto para o filtro LG16 esse valor é 0,50% .

Desta forma, fica bem evidenciada a eficácia da equalização de fase pelo método proposto, haja vista que a nova metodologia utilizou só uma simulação para a equalização de cada filtro e, em apenas 5 iterações, obteve soluções equivalentes às soluções ótimas globais.

V. CONCLUSÕES

Este artigo apresentou uma metodologia para projeto de equalizadores de fase com reduzido esforço computacional. A técnica parte da geração de coeficientes iniciais quase-ótimos para filtros passa-tudo de segunda ordem, obtendo-se, com poucas iterações do algoritmo de busca, a solução ótima global sem riscos de mínimos locais. A metodologia proposta pode ser aplicada para ordens maiores do que a aqui apresentada.

REFERÊNCIAS

- [1] S. Noceti Filho, *Filtros Seletores de Sinais*, Florianópolis, SC, EDUFSC, 2003.
- [2] H. J. Blinichoff and A. I. Zverev, *Filtering in the Time and Frequency Domains*, New York, John Wiley & Sons, 1976.
- [3] A. S. Farias, "Projeto de Filtros Transicionais Baseados em Aproximações Polinomiais Clássicas," Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 1999.
- [4] A. S. Farias, S. Noceti Filho e R. Seara, "Projeto de filtros transicionais Chebyshev-Legendre-Butterworth-Bessel-Gauss-Multiplicidade-n," *XVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Vila Velha, ES, Set. 1999, pp. 357-362.
- [5] A. S. Farias, S. Noceti Filho, and R. Seara, "Transitional filters based on the classical polynomial approximations," *Proc. IEEE Int. Symp. Circ. Syst.*, Geneva, Switzerland, vol. II, May 2000, pp. 693-696.
- [6] A. S. Farias; S. Noceti Filho e R. Seara, "Algoritmo para projeto de filtros transicionais – Considerações sobre realizabilidade," *XIII Congresso Brasileiro de Automática*, Florianópolis, SC, Set. 2000, pp. 1398-1403.

- [7] A. S. Farias, S. Noceti Filho, and Seara, "Transitional filters using linear interpolation with the filter selection based on the total mean weighting performance," *9th IEEE Int. Conf. Electronics, Circuits and Systems*, Dubrovnik, Croatia, vol. 1, Sep. 2002, pp. 201-204.
- [8] D. B. Carvalho, "Equalização de Fase Baseada no Atraso de Fase," Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 1997.
- [9] D. B. Carvalho, "Projeto de Filtros Equalizadores de Fase Utilizando o Erro de Simetria da Resposta ao Impulso via Algoritmo Genético Modificado," Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2002.
- [10] D. B. Carvalho, S. Noceti Filho, and R. Seara, "Design of phase equalizers using phase delay characteristics," *Proc. IEEE Int. Symp. Circ. Syst.*, Monterey, CA, USA, May 1998, pp. II-355-II-358.
- [11] D. B. Carvalho, S. Noceti Filho, and R. Seara, "Impulse response symmetry error for designing phase equalisers," *IEE Electronics Letters*, vol. 35, no. 13, pp. 1052-1054, June 1999.
- [12] L. P. Huelsman, "Optimization - A Powerful tool for analysis and design," *IEEE Trans. Circ. Syst. - Part. I*, vol. 40, no. 7, July 1993.
- [13] G. Wilson and M. Papamichael, "Group delay transfer functions with least squares error," *The Radio and Electronic Engineer*, vol. 53, no. 5, May 1983.
- [14] R. K. Dash, "Image processing using quadrees," *Dr. Dobb's Journal*, Liller Freeman, Inc., pp. 44-49, July 1993 .
- [15] A. S. Farias, S. Noceti Filho e R. Seara, "Equalização de fase baseada na inclinação de uma reta-modelo obtida a partir do atraso de fase do filtro a ser equalizado," *XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, artigo no. 963, Set. 2004, pp. 1-5.
- [16] D. M. Himmelblau, *Applied NonLinear Programming*, New York, McGraw-Hill, 1972.