

# Contribuição para a Correção de Erro em Sinais de Vídeo Através da Propriedade de Regularidade das Wavelets

Sergio R. M. Penedo e Rui Seara

**Resumo**—Este artigo propõe uma modificação no método *correção de erro em quadros de vídeo utilizando a propriedade de regularidade das wavelets* publicado recentemente. Tal técnica de detecção e correção é independente do método de codificação utilizado. Neste trabalho, uma modificação na construção da figura de mérito que caracteriza o decaimento dos coeficientes *wavelet* é introduzida. Essa alteração permite identificar e corrigir com maior eficiência *pixels* contaminados por ruído. A modificação introduzida possibilitou alcançar melhores resultados de restauração (objetivos e subjetivos) comparativamente aos obtidos por um método dos próprios autores como também em outros trabalhos da literatura, considerando algoritmos de correção de erro operando no domínio espaço-temporal.

**Palavras-Chave**—Correção de erro, correlação entre escalas, regularidade, transformada *wavelet*.

**Abstract**—This paper proposes an improvement in the method *concealing errors in video data using the wavelet regularity property* published recently. Such a technique of detecting and concealing errors is irrespective of the coding method used. In this work a modification in the figure of merit that provides the knowledge of decay characteristics from wavelet coefficients is introduced. This modification allows identifying and correcting with a more effectiveness *pixels* classified as corrupted. The introduced modification permits to achieve better results as compared with the one proposed by the authors themselves and other works found in the open literature, considering error concealment algorithms working in space-time domain.

**Keywords**—Error concealment, correlation between scales, regularity, wavelet transform.

## I. INTRODUÇÃO

O uso intensivo de algumas aplicações de vídeo, tais como videofone e teleconferência, tem exigido continuamente o estabelecimento de canais cada vez mais confiáveis para transmissão dessa informação. Tal fato tem reafirmado a importância do tema “melhoramento da qualidade de comunicação de vídeo” como um dos tópicos de grande

interesse de pesquisa na área de processamento de sinais de imagem e vídeo. Entretanto, a disseminação da transmissão de informação visual em larga escala convive com a limitação da capacidade do canal de transmissão utilizado, pois os sinais de vídeo são intensivos em quantidade de dados e requerem, geralmente, processamentos adicionais para se reduzir o volume desses dados (processo de compressão) sem gerar uma perda excessiva de qualidade. Por outro lado, tais processamentos (redução de redundância) tornam os sinais de vídeo mais vulneráveis e de mais difícil correção, na eventualidade de se ter algum efeito de distorção agregado a eles. Nesse ínterim, pesquisas em codificação de vídeo têm sugerido modificações que buscam, segundo as características da natureza do sinal e do meio, reduzir os efeitos de distorção sobre sinais de vídeo, o que, de modo geral, acarreta ainda maior esforço computacional na etapa de codificação.

Algumas proposições para correção de sinais de vídeo têm sido sugeridas [1]-[9], explorando de alguma forma a redundância temporal desses sinais, sem entretanto obter um desempenho aceitável na reconstrução de algumas de suas importantes características (bordas, contornos, texturas, etc.). Isso se explica pelo modo com que a redundância espacial é considerada na caracterização do erro presente em cada cena. Nesse contexto, têm surgido técnicas que se valem de utilizar, de forma conjunta, as redundâncias temporal e espacial [10], sem obter, no entanto, resultados satisfatórios com respeito ao maior esforço computacional despendido.

A maior limitação encontrada por técnicas de exploração de redundância espaço-temporal situa-se no fato de que, ao explorar a redundância temporal para obter uma maior compressão da informação, há uma redução de redundância espacial a cada quadro, o que compromete o desempenho desse segmento. Visto que a transformada *wavelet* permite representar sinais no domínio espacial, através do uso da redundância inerente aos quadros em seus coeficientes de altas frequências, a redundância temporal pode também ser explorada em tal domínio. A similaridade entre os coeficientes de sucessivas escalas da decomposição *wavelet*, caracterizada pela propriedade da regularidade, permite a definição de uma figura de mérito mais adequada e robusta para a identificação e correção de quadros em sinais de vídeo. Com base nessas premissas, este artigo apresenta novos resultados que incrementam a técnica de detecção e correção de ruído em vídeo apresentada em [11]. A abordagem seguida

Sergio R. M. Penedo e Rui Seara, LINSE – Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, E-mails: {penedo, seara}@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

apresenta um certo avanço, em termos de melhoramento, com respeito à proposta anterior [11]. Define-se aqui uma nova figura de mérito para caracterizar o decaimento ideal dos coeficientes *wavelet*, em sucessivas escalas e instantes de tempo, para blocos de *pixels* das cenas e, assim, reconstruir a informação contaminada por distorções. A modificação introduzida no método original mostrou-se eficiente quando comparada a outros algoritmos que operam no domínio espaço-temporal [8], [9] como também a resultados anteriores apresentados pelos próprios autores [11], obtendo-se, assim, um melhor desempenho tanto em termos objetivos quanto em termos subjetivos.

O artigo é organizado como segue. A Seção II discute de forma sucinta os requisitos básicos de detecção e correção de erro em vídeo, situando nosso método em tal contexto. A Seção III apresenta a propriedade de regularidade das *wavelets*, relacionando-a à correlação através das escalas de decomposição de um sinal. A Seção IV reinterpreta o método de correção de erro discutido em [11] e introduz a modificação no método, que é o objeto deste trabalho. A Seção V mostra os resultados obtidos por simulação, comparando-os a outros métodos mostrados na literatura e a resultados anteriores dos próprios autores. Por fim, a Seção VI traz as conclusões do presente artigo.

## II. CORREÇÃO DE ERRO EM SINAIS DE VÍDEO

A largura de banda limitada em canais de comunicação de vídeo pode provocar perda de blocos de dados e conduzir a uma significativa distorção visual, quando a informação for decodificada [5], [8]-[10]. Tal problema tem suscitado a concepção de métodos de correção de erro que buscam reduzir os efeitos de perda de blocos, restaurando parcial ou totalmente (quando possível) a informação degradada. Todavia, a necessidade de compressão do vídeo transmitido, para atender às limitações de largura de banda, enfrenta um obstáculo: as redundâncias temporal e espacial são em grande parte suprimidas, o que restringe a capacidade de restauração da informação visual.

A codificação do sinal de vídeo deve considerar, em algum domínio, as variações dos *pixels* presentes nos quadros, uma vez que variações bruscas no plano de fundo provocadas por ruído podem ser interpretadas como variações bruscas de objetos que tenham sido desconsideradas na etapa de codificação [11]. Embora mais eficiente para a tarefa de codificação, técnicas recentes baseadas na transformação do sinal de vídeo para outro domínio [3], [12], [13] não efetuam de forma adequada a separação dos componentes de ruído e de informação relevante. A má caracterização de componentes de altas frequências motiva, assim, a concepção de métodos de reconstrução de cenas que operem após a codificação.

Na próxima seção, é discutida uma importante propriedade da transformada *wavelet*, a regularidade. A exploração da redundância no domínio espaço-frequência fornece subsídios para a concepção de um método de identificação e correção de vídeo (derivado daquele apresentado em [11]) que propicia

melhores resultados do que os obtidos com técnicas baseadas apenas em redundância temporal.

## III. REGULARIDADE DE HÖLDER

A transformada *wavelet* permite quantificar a suavidade local de um sinal através da taxa de decaimento dos coeficientes *wavelet*, em escalas sucessivas de decomposição. Isso é alcançado através da propriedade de regularidade de Hölder que é o caso geral da propriedade de continuidade de Lipschitz [14]-[16]. Assim, uma função  $f(x)$  é dita  $r$ -Lipschitz em  $a$ ,  $0 \leq r < 1$ , se

$$|f(x) - f(a)| \leq K |x - a|^r, \quad (1)$$

onde  $K$  é uma constante arbitrária e  $r$  corresponde ao expoente de Lipschitz [16]. Portanto,

$$\max |\Psi_{j,k}|_{(j,k) \in A} \leq K 2^{-j(r+1/2)}, \quad (2)$$

onde  $A$  é o subespaço que contém os pares  $(j, k)$ , para os quais  $a$  pertence ao suporte de  $\Psi_{j,k}(x)$ , e  $\Psi_{j,k}$  são os coeficientes da transformada *wavelet* de  $f(x)$  [11]. Uma extensão do conceito de continuidade de Lipschitz ( $r > 1$ ) é obtida forçando que (1) seja satisfeita para  $f(x)$  e suas derivadas de  $n$ -ésima ordem. Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  possui expoente de Hölder  $\tilde{r} = n + r$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq r < 1$ , se há uma constante finita  $K$  tal que

$$|f^{<n>}(y) - f^{<n>}(x)| \leq K |y - x|^{\tilde{r}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

onde  $f^{<n>}$  representa a derivada de  $n$ -ésima ordem de  $f$  [17]. Um sinal apresenta expoente de Hölder  $r$  se há uma constante  $K$  tal que os coeficientes da transformada *wavelet*  $\Psi_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle$  satisfaçam a inequação

$$|\Psi_{j,k}| \leq K 2^{-k(r+1/2)} \quad (4)$$

para todo  $j \in \mathbb{Z}^+$  e  $k \in \mathbb{R}$  [14], [18]-[20]. Esse teorema caracteriza a regularidade de uma função pelo decaimento da magnitude dos coeficientes de sua transformada *wavelet* em sucessivas escalas de decomposição [11].

Pode-se então mostrar que a correlação entre sub-bandas *wavelet*  $s_m$  e  $s_n$  para as escalas  $2^m$  e  $2^n$  é limitada por [21]

$$|\langle s_m, s_n \rangle| \leq K 2^{-(m+n)(r+1/2)}. \quad (5)$$

Tal inequação indica que a similaridade entre as escalas decresce exponencialmente à medida que a regularidade da função analisada cresce, fato corroborado por dados experimentais e pela literatura [16]-[19], [20]. Por estar intimamente ligada à correlação entre escalas da transformada *wavelet*, a propriedade de regularidade pode ser utilizada para definir um critério de decisão em um algoritmo de detecção e correção de erro em vídeo [11], uma vez que os algoritmos recentemente desenvolvidos que se valem a tal preceito [8] e [9], operando nos domínios espaço-temporal, não usam uma grandeza indicativa de similaridade de informação.

#### IV. PROPOSIÇÃO DO ALGORITMO

Em correção de vídeo, são utilizadas basicamente duas aproximações [22]: correção por predição temporal (*temporal predictive concealment* - TPC) e correção por predição espacial (*spatial predictive concealment* - SPC). Enquanto a TPC explora a redundância entre quadros sucessivos no tempo para recuperar blocos danificados em áreas sem movimento, a SPC executa a interpolação de áreas danificadas a partir da vizinhança espacial dos *pixels* corrompidos [23]-[25]. No entanto, tais algoritmos introduzem uma complexidade computacional que não é aceitável em aplicações em tempo real, o que sugere, nesse caso, a utilização de técnicas de correção baseadas em transformada. No entanto, a transformação linear do sinal de vídeo implica redução da redundância temporal e espacial da informação, o que não é desejável quando se busca eliminar distorções [11]. Sob esse ponto de vista, a presente seção propõe um algoritmo genérico de detecção e correção de *pixels*, que utiliza o expoente de Hölder para dar origem a uma nova figura de mérito derivada da apresentada em [11].

##### A. Algoritmo Proposto de Detecção de Erro

A correlação temporal observada no decaimento de coeficientes *wavelet* através das escalas permite que se estabeleça um modelo matemático para a evolução dos coeficientes ao longo da progressão temporal das cenas. Se cada cena apresenta  $P \times Q$  blocos de  $N \times N$  *pixels*, dado por  $F_i(m, n)$ , para  $1 \leq i \leq P \times Q$  (sendo que os blocos esquerdo e direito de  $F_i(m, n)$  são representados, respectivamente, por  $F_{i-1}$  e  $F_{i+1}$ ), os elementos de cada bloco podem ser descritos, em termos de seus coeficientes *wavelet*, por

$$F_i(m, n) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_{i,j,k}(m, n) \psi_j(n) \psi_k(n), \quad (6)$$

onde  $\Psi_{i,j,k}(m, n)$  representa os coeficientes do bloco  $F_i$  na frequência espacial  $(j, k)$ , e  $\psi_j(n)$  e  $\psi_k(n)$  são as funções-base *wavelet* separáveis nas direções vertical e horizontal, respectivamente [11]. Os blocos corrompidos são identificados como aqueles em que a curva de correlação cruzada de seus coeficientes não satisfaz ao padrão observado para as cenas da seqüência original (ver Fig. 1).

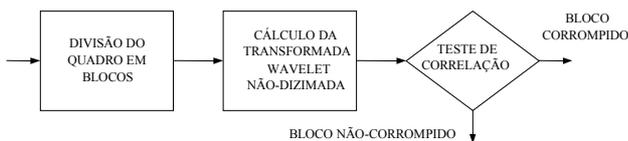


Fig. 1. Diagrama em blocos da estrutura proposta de detecção de erro (similar à de [11]).

##### B. Algoritmo Proposto de Correção de Erro

Para cada bloco de *pixels*  $F_i$  identificado como corrompido, é calculado um novo bloco, a partir da

determinação de um expoente médio de Hölder  $r'$ , segundo a expressão

$$\Psi'_{1,k}(m, n) = K \cdot 2^{(1-k)(r'+2^{-j})}, \quad (7)$$

onde  $\Psi'_{j,k}(m, n)$  denota os novos valores dos coeficientes no  $j$ -ésimo nível de resolução com fator de escala  $k$ , calculados de forma mais refinada em relação à expressão proposta em [11], e  $K$  é obtido por extrapolação dos coeficientes de níveis superiores. A Fig. 2 ilustra o diagrama em blocos do algoritmo de correção.

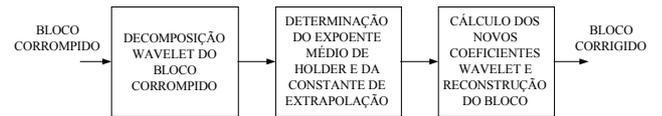


Fig. 2. Diagrama em blocos da estrutura proposta de correção de erro (modificada em seu núcleo em relação à mostrada em [11]).

#### V. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

O algoritmo de detecção realiza a decomposição *wavelet* das cenas em 4 níveis, particionando cada cena em blocos menores de  $2 \times 2$  *pixels*, com uma janela de observação de  $20 \times 20$  *pixels*, utilizando a família de *wavelets* Daubechies biortogonal 9-7 [14]. Através da análise de correlação entre as escalas de decomposição de cada bloco e seus 2 blocos adjacentes, são identificados os coeficientes corrompidos. A seguir, as amplitudes dos coeficientes do bloco corrompido são obtidas por (7). A Fig. 3 mostra os resultados obtidos para a correção da imagem 'Lena' com uma taxa de erro de *bits* (BER) de 10%, considerando o método proposto e outros três métodos de correção [8], [9], [11]. Pode-se observar que o desempenho do algoritmo modificado é quantitativa e subjetivamente superior, sobretudo em áreas de detalhes e bordas. (Tabela I).

TABELA I  
COMPARAÇÃO DOS VALORES DE PSNR PARA OS DIFERENTES MÉTODOS

Imagem	PSNR (dB)
Imagem 'Lena' corrompida	18,7
Imagem reconstruída pelo método referenciado em [8]	32,6
Imagem reconstruída pelo método referenciado em [9]	32,3
Imagem reconstruída pelo método proposto em [11]	33,1
Imagem reconstruída pelo proposto em [11] modificado	33,4

A Fig. 4 ilustra os resultados subjetivos da aplicação dos quatro métodos comparados, considerando um quadro corrompido da seqüência 'Football'. Em continuação, a Fig. 5 mostra as curvas de PSNR para diferentes taxas de erro de *bits*, comparando também os métodos em questão. A Fig. 6 ilustra os valores de PSNR obtidos para uma taxa de erro de *bits* de  $5 \times 10^{-5}$  *bits/bit*. Nas Figs. 7 até 9, está ilustrado o mesmo conjunto de resultados, considerando também, para efeito de comparação, os quatro métodos de correção aplicados em um quadro corrompido da seqüência 'Suzie'.

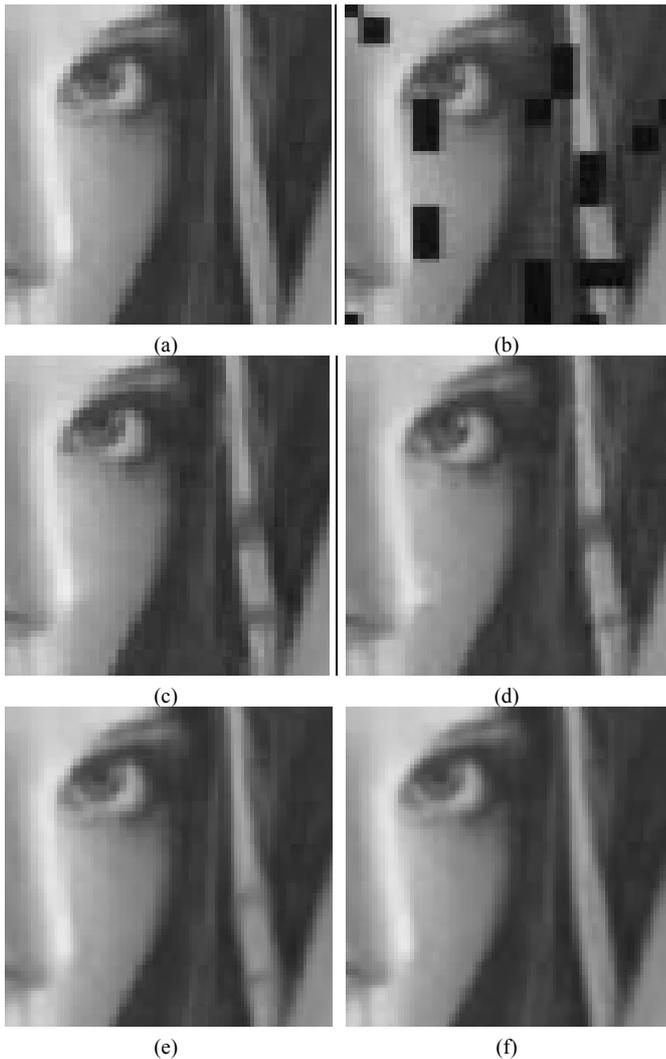
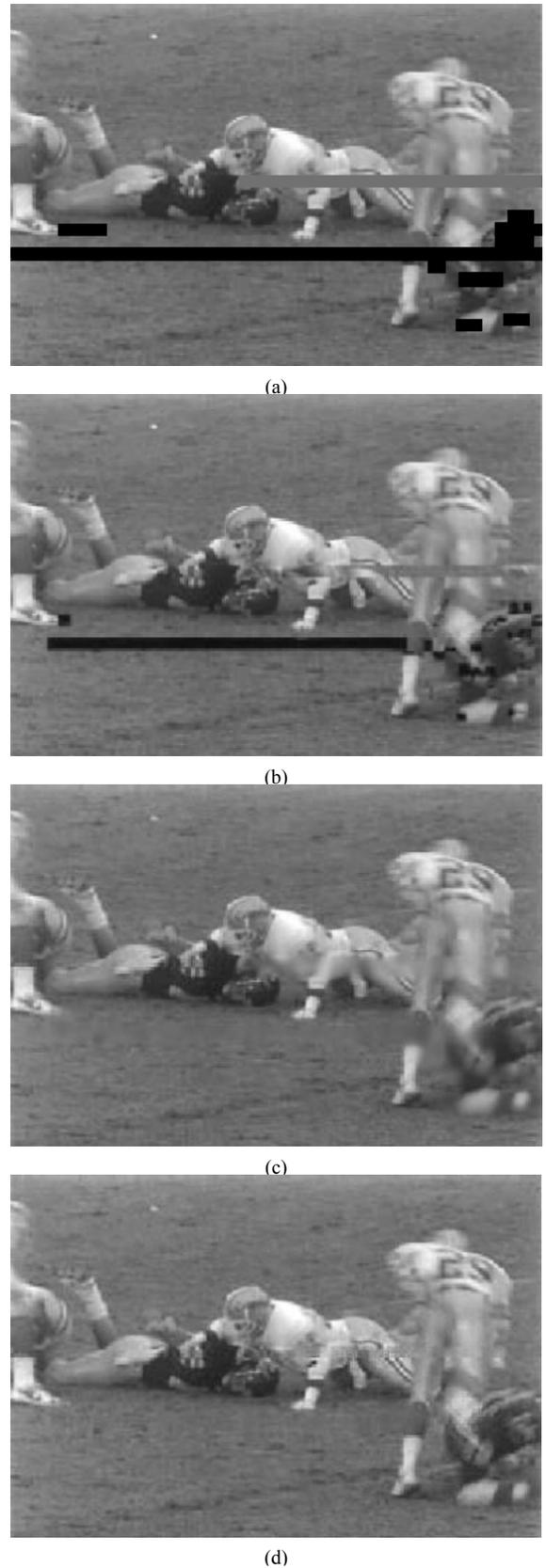
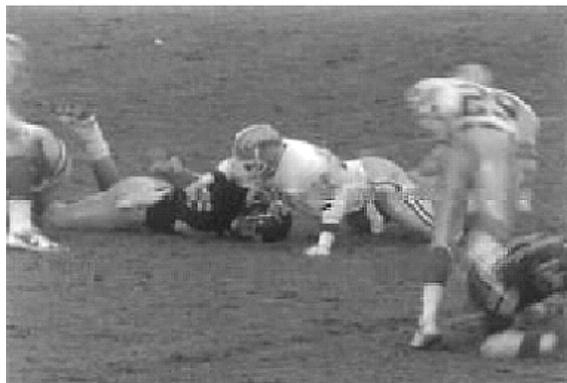


Fig. 3. Detalhes da imagem 'Lena'. (a) Imagem original. (b) Imagem corrompida por ruído aleatório. (c) Imagem corrigida pelo método referenciado em [8]. (d) Imagem corrigida pelo método referenciado em [9]. (e) Imagem corrigida pelo método proposto em [11]. (f) Imagem corrigida pelo método proposto em [11] modificado.

Uma análise mais detalhada dos resultados permite destacar a qualidade alcançada pela modificação introduzida no método proposto em [11]. A principal diferença entre o método apresentado em [11], em relação ao método modificado, advém da definição de (7). No método modificado, é aplicado um cálculo mais refinado ao expoente de Hölder, a partir da consideração de que escalas mais elevadas da decomposição *wavelet* devem responder por ajustes menores nos coeficientes corrompidos, o que não tinha sido considerado em [11]. De fato, tal idéia é concordante com as observações sobre correlação de coeficientes apresentadas em [18] e, assim, mais consistente com a natureza dos componentes de altas frequências de todas as cenas. Com isso, abre-se em correção de vídeo um amplo leque de possibilidades a serem estudadas no tocante à exploração matematicamente fundamentada das características das sub-bandas de altas frequências das cenas. A Fig. 10 ilustra o melhor resultado subjetivo obtido para o

quadro analisado da seqüência 'Suzie', resultado esse que é corroborado pelas Figs. 7 e 8.





(e)

Fig. 4. Quadro da seqüência Football. (a) Quadro corrompido. (b) Quadro corrigido pelo método referenciado em [8]. (c) Quadro corrigido pelo método referenciado em [9]. (d) Quadro corrigido pelo método proposto em [11]. (e) Quadro corrigido pelo método proposto em [11] modificado.

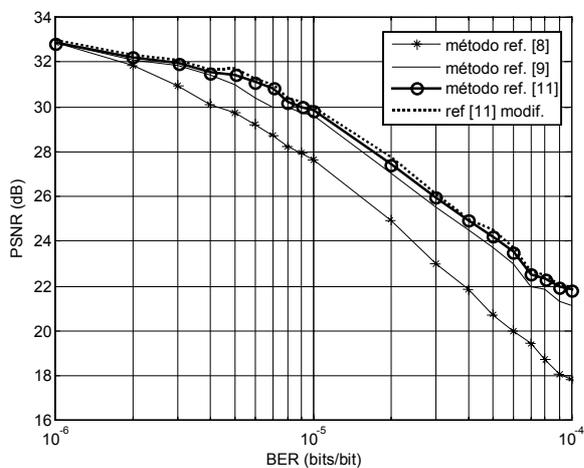


Fig. 5. Curvas de PSNR x BER para o quadro corrompido da seqüência 'Football' considerado na Fig. 4.

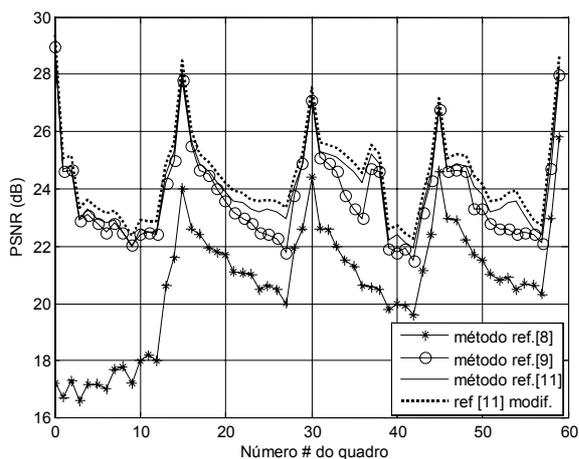


Fig. 6. Curvas de PSNR para diferentes quadros da seqüência 'Football' (BER =  $5 \times 10^{-5}$  bits/bit).



(a)

(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

Fig. 7. Quadro da seqüência 'Suzie'. (a) Quadro Original. (b) Quadro corrompido. (c) Quadro corrigido pelo método referenciado em [8]. (d) Quadro corrigido pelo método referenciado em [9]. (e) Quadro corrigido pelo método proposto em [11]. (f) Quadro corrigido pelo método proposto em [11] modificado.

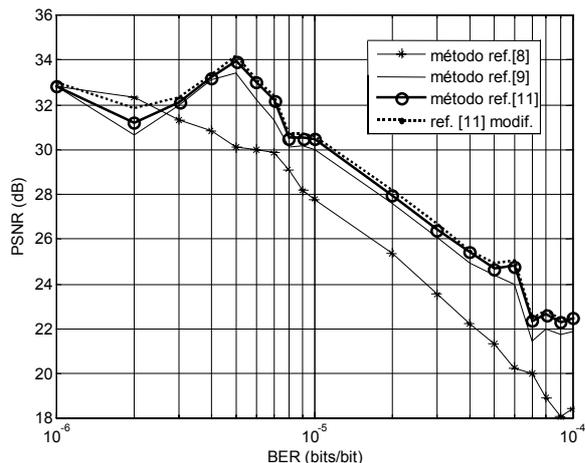


Fig. 8. Curvas de PSNR x BER para o quadro corrompido da seqüência 'Suzie' considerado na Fig. 7.

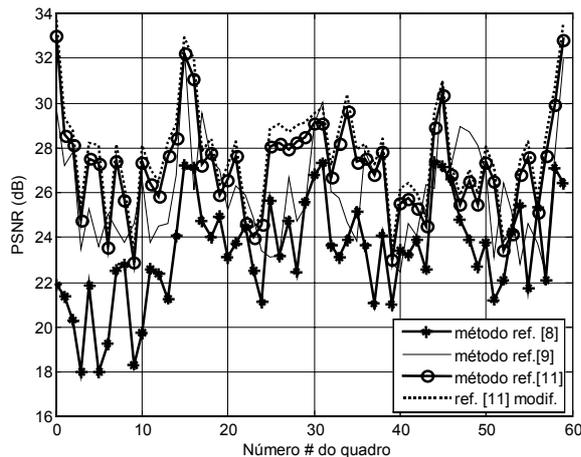


Fig. 9. Curvas de PSNR para diferentes quadros da seqüência 'Suzie' (BER =  $5 \times 10^{-5}$  bits / bit).

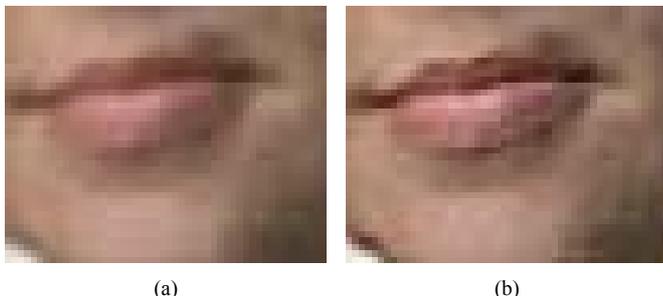


Fig. 10. Detalhe de quadro da seqüência 'Suzie'. (a) Quadro corrigido pelo método proposto em [11]. (b) Quadro corrigido pelo método proposto em [11] modificado. Bordas e detalhes são melhor caracterizados no segundo caso.

## VI. CONCLUSÕES

Neste artigo, é proposta uma modificação (visando o aprimoramento) do método *correção de erro em quadros de vídeo utilizando a propriedade de regularidade das wavelets*, publicado recentemente em [11]. Tal melhoramento consiste na alteração da forma de construir a figura de mérito que caracteriza o decaimento dos coeficientes *wavelet* de cada cena, identificando e corrigindo, com maiores detalhes, *pixels* contaminados por ruído. A modificação introduzida permitiu se alcançar melhores resultados de restauração (objetivos e subjetivos) quando comparados com aqueles obtidos em [11] e também com outros da literatura, considerando algoritmos de correção de erro que operam no domínio espaço-temporal.

## REFERÊNCIAS

- [1] "Video coding for low bitrate communication," International Telecommunications Union, Geneva, Switzerland, ITU-T Recommendation H.263, 1998.
- [2] W. K. Pratt *et al.*, "Hadamard transform image coding," *Proc. IEEE*, vol. 57, no. 1, pp. 58-68, Jan. 1969.
- [3] H. Magal *et al.*, "A robust error resilient video compression algorithm," *IEEE Military Comm. Conf.*, Fort Monmouth, NJ, USA, vol. 1, Oct. 1994, pp. 247-251.
- [4] W. Kwok and H. Sun, "Multi-directional interpolation for spatial error concealment," *IEEE Trans. Consumer Electronics*, vol. 39, no. 3, pp. 455-460, Aug. 1993.
- [5] H. Sun *et al.*, "Error concealment in digital simulcast AD-HDTV decoder," *IEEE Trans. Consumer Electronics*, vol. 38, no. 3, pp. 108-118, Aug. 1992.
- [6] W.-M. Lam and A. R. Reibman, "An error concealment algorithm for images subject to channel errors," *IEEE Trans. Image Proc.*, vol. 4, no. 5, pp. 533-542, May 1995.
- [7] J. W. Park *et al.*, "On the error concealment technique for DCT based image coding," *IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Proc.*, Adelaide, Australia, vol. 3, Apr. 1994, pp. 293-296.
- [8] W. Zhu and Y. Wang, "The use of second order derivative based smoothness measure for error concealment in transform based codecs," *Proc. SPIE Visual Comm. and Image Processing*, Taiwan, May 1995, pp. 1205-1214.
- [9] J. W. Park *et al.*, "DCT coefficients recovery-based error concealment technique and its application to the MPEG-2 bit stream error," *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Tech.*, vol. 7, no. 6, pp. 845-854, Dec. 1997.
- [10] J. Watkinson, *The Art of Digital Video*, 2nd ed., Oxford, England: Focal Press, 1994.
- [11] S. Penedo e R. Seara. "Correção de erro em quadros de vídeo utilizando a propriedade de regularidade das wavelets," *Anais do XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Belém, PA, CD-ROM, Sep. 2004.
- [12] R. J. Clarke and Q. Wang. "Motion compensation techniques in image sequence coding," *IEE Colloquium on Applications of Motion Compensation*, London, UK, Oct. 1990, pp. 4/1-4/3.
- [13] P. Strobach *et al.* "Space-variant regular decomposition quadrees in adaptive interframe coding," *Int. Conf. Acoust., Speech and Signal Processing*, New York, USA, Apr. 1988, pp. 1096-1099.
- [14] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Reg. Conf. Series in Applied Mathematics, vol. 61, 1992.
- [15] G. Strang. "Creating and comparing wavelets," Department of Mathematics, MIT, Cambridge, Massachusetts, 1994.
- [16] S. Mallat. "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 11, pp. 674-693, Jul. 1989.
- [17] M. F. Cohen *et al.* "Wavelets and their Applications in Computer Graphics," *Siggraph 95, Course Notes*, Aug. 1995.
- [18] S. Mallat and S. Zhong, "Characterization of signals from multiscale edges," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 14, no. 7, pp. 710-732, July 1992.
- [19] W. K. Carey *et al.*, "Regularity-preserving image interpolation," *Int. Conf. Image Processing*, Washington, USA, vol. 1, Oct. 1997, pp. 901-908.
- [20] S. R. M. Penedo, "Interpolação de Imagens Através da Análise de Regularidade Baseada em Decomposição Wavelet," *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.
- [21] A. Witkin, "Scale space filtering," *Joint Conf. on Artif. Intell.*, Karlsruhe, Germany, Aug. 1983, pp. 1019-1022.
- [22] Motion Picture Expert Group (JTC1/SC29/WG11) and Experts Group on ATM Video Coding (ITU-T SG15), "Generic coding of moving pictures and associated audio MPEG-2," Draft Int. Stand. 13818, ISO/IEC, Nov. 1994.
- [23] H. Sun and W. Kwok, "Concealment of damaged block transform coded images using POCS," *IEEE Trans. Image Proc.*, vol. 4, pp. 470-477, Apr. 1995.
- [24] Y. Wang and Q. Zhu, "Signal loss recovery in DCT-based image and video codecs," *Proc. SPIE Visual Comm. and Image Processing*, Boston, USA, Nov. 1991, pp. 667-678.
- [25] Y. Wang, Q. Zhu, and L. Shaw, "Maximally smooth image recovery in transform coding," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 41, pp. 1544-1551, Oct. 1993.