Simulações com uso de códigos de treliça e decodificação iterativa para o canal aditivo binário

Maria de Lourdes M.G. Alcoforado, Valdemar C. da Rocha Jr. e Garik Markarian

***Resumo*— Este artigo apresenta resultados de simulações computacionais para códigos de treliça sobre o canal aditivo para dois usuários binários, em presença de ruído branco gaussiano aditivo. São comparados os desempenhos de diferentes códigos de treliça com e sem o uso de decodificação iterativa.**

***Palavras-Chave*— Acesso múltiplo, canal aditivo, códigos turbo.**

***Abstract*— This paper presents simulation results for trellis codes over the two-user binary adder channel, in the presence of additive white Gaussian noise. The performance of different trellis codes is compared with and without iterative decoding.**

***Keywords*— Multiple access, additive channel, turbo codes.**

I. INTRODUÇÃO

Este artigo utiliza a decodificação iterativa [1], [2] em sistemas de comunicações que empregam canal de acesso múltiplo, isto é, um meio de transmissão no qual mais de um usuário pode acessá-lo simultaneamente, com a saída do canal sendo uma combinação dos sinais enviados pelos usuários ativos. Em particular, é dada ênfase ao caso em que dois usuários binários podem transmitir simultaneamente em um canal aditivo para um único receptor. Este canal é chamado de canal aditivo com dois usuários binários (2-BAC)[3]-[5].

São apresentadas simulações computacionais de sistemas codificados, em presença de ruído branco gaussiano aditivo, e utilizadas condições de decodibilidade única para códigos de treliça adaptados ao canal 2-BAC [6]-[7].

Na *Seção II* é descrito o conceito de treliça para dois usuários. Na *Seção III* descreve-se um esquema de codificação para obtenção de códigos unicamente decodificáveis para o 2-BAC. Este esquema consiste na concatenação em série de um par de códigos de bloco unicamente decodificáveis no 2-BAC com um par de códigos convolucionais sistemáticos [7], [8]. Na *Seção IV* são apresentados os resultados das simulações, nas quais os codificadores convolucionais utilizados pelos dois usuários podem ser idênticos ou distintos. Na *Seção V* são apresentadas as conclusões.

II. TRELIÇA PARA O 2-BAC

Nesta seção está descrita a construção de Peterson e Costello [9] de uma treliça para o 2-BAC, denominada *treliça para dois usuários*, a partir das treliças individuais de cada usuário.

Maria de Lourdes M.G. Alcoforado, Escola Politécnica de Pernambuco, Departamento de Engenharia Elétrica, 50750-470, Recife, PE, Brasil, Email: mlmga@upe.poli.br. Valdemar C. da Rocha Jr., Grupo de Pesquisa em Comunicações - CODEC, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Caixa Postal 7800, 50711-970, Recife, PE, Brasil, Email: vcr@ufpe.br. Garik Markarian, Institute of Integrated Information Systems, University of Leeds, LS2 9JT, England, Email: G.Markarian@leeds.ac.uk.

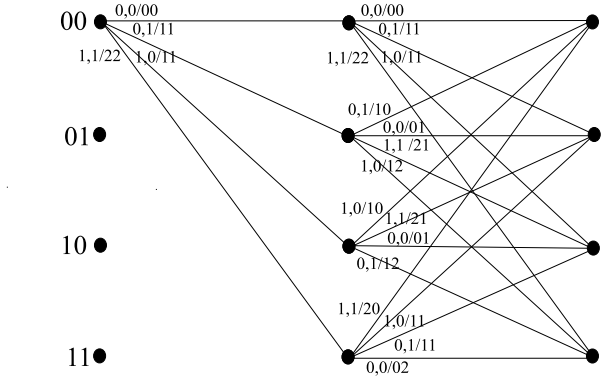

Fig. 1. Treliça para dois usuários binários em que, para cada usuário, é usado um mesmo código convolucional com matriz geradora $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1+D} \end{bmatrix}$. Os rótulos nos ramos $(u_k, d_k/x_1x_2)$ correspondem, respectivamente, ao par de símbolos de informação u_k, d_k dos usuários 1 e 2 e à saída x_1x_2 do 2-BAC sem ruído.

Deve-se supor que as treliças de cada usuário são iniciadas num mesmo instante de tempo e que são considerados pares de ramos (um ramo de cada treliça) que ocorrem em um mesmo intervalo de tempo. Ao estado $S_k = s_i$, na treliça do usuário 1, e ao estado $S'_k = s_r$, na treliça do usuário 2, associa-se na treliça para dois usuários o estado denotado por s_is_r. Cada par de ramos, ocorrendo em um mesmo intervalo de tempo, nas respectivas treliças de cada um dos dois usuários, é associado a um único ramo na treliça para dois usuários. Dito de outra forma, se num dado intervalo de tempo o ramo correspondente ao usuário 1 segue do estado s_i para o estado s_j, e o ramo correspondente ao usuário 2 segue do estado s_r para o estado s_l, então na treliça para dois usuários corresponde um único ramo seguindo do estado s_is_r para o estado s_js_l. Se a treliça de cada usuário tem, respectivamente, L_1 e L_2 estados, a treliça para dois usuários terá L_1L_2 estados. O conceito de treliça para dois usuários é ilustrado por meio de um exemplo.

Exemplo 2.1: Supõe-se uma situação hipotética, apenas para ilustrar a construção da treliça para dois usuários, na qual um mesmo código convolucional é usado por cada usuário do 2-BAC. Seja $\mathcal{C}$ o código convolucional recursivo sistemático com taxa assintótica $1/2$ e matriz geradora polinomial:

$$G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{1+D} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Como o código tem apenas um elemento de memória, a treliça de cada usuário possui dois estados, i.e., $L_1 = L_2 = 2$, e a treliça para dois usuários terá $L_1L_2 = 4$ estados como ilustrado na Figura 1.

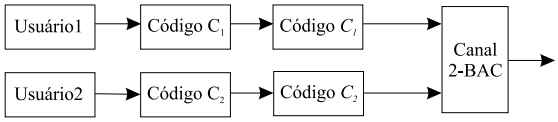

Fig. 2. Modelo de construção de código unicamente decodificável para o 2-BAC.

III. Decodificação Iterativa para o Canal Aditivo com Dois Usuários Binários Usando Códigos de Treliça

Nesta secção é mostrado um método de construção de códigos de treliça, a partir da concatenação em série de um par de códigos unicamente decodificáveis para o 2-BAC com um par de códigos convolucionais [7], [8].

Considere um par de códigos convolucionais $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ recursivos e sistemáticos com taxas assintóticas iguais a k/n, com memórias iguais a m_1 e m_2, respectivamente [10, p.303-308]. Seja $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ um par de códigos de bloco unicamente decodificáveis no 2-BAC.

O código para o usuário 1 é construído a partir de $\mathcal{C}_1$ e de $\mathbf{C}_1$ do seguinte modo. O usuário 1 envia suas mensagens para o codificador de $\mathbf{C}_1$, e as palavras-código resultantes de $\mathbf{C}_1$ são enviadas como mensagens para o codificador de $\mathcal{C}_1$. Desta forma o usuário 1 estará se servindo de um dicionário contendo um subconjunto das palavras-código de $\mathcal{C}_1$, escolhidas de acordo com as "mensagens" alimentadas por $\mathbf{C}_1$ ao codificador de $\mathcal{C}_1$. A codificação para o usuário 2 é semelhante, empregando o código $\mathcal{C}_2$ e o código $\mathbf{C}_2$. Conseqüentemente, o usuário 2 estará se servindo de um dicionário contendo um subconjunto das palavras-código de $\mathcal{C}_2$, escolhidas de acordo com as "mensagens" alimentadas por $\mathbf{C}_2$ ao codificador de $\mathcal{C}_2$.

Essencialmente a operação de codificação desempenhada por cada usuário é uma concatenação em série dos seus respectivos códigos de bloco com o código convolucional, conforme ilustrado na Figura 2.

Como $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são sistemáticos e possuem taxas assintóticas iguais, a soma aritmética bit a bit das palavras-código de $\mathcal{C}_1$ produzidas pelo usuário 1 e das palavras-código de $\mathcal{C}_2$ produzidas pelo usuário 2, é unicamente decodificável. Esta afirmação procede porque o par $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ é unicamente decodificável no 2-BAC e a soma aritmética das palavras-código de $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ aparecem na seção de informação da soma aritmética das palavras-código de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

O uso dos códigos $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ leva à eliminação de alguns ramos e, algumas vezes, leva à eliminação de alguns estados na treliça para dois usuários. Em outras palavras, serão eliminados caminhos nas treliças dos códigos convolucionais empregados, evitando assim problemas de ambigüidade na decodificação.

Se a taxa do par $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ é R, segue desta construção que $R_C = (\frac{k}{n})R$ é a taxa do código construído para o 2-BAC. Portanto, se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ forem escolhidos para serem códigos com taxas assintóticas aproximadamente iguais a 1, R_C terá um valor muito próximo a R. Isto significa que se R alcançar o valor máximo da taxa de trasmissão (capacidade) para o 2-BAC, então R_C também alcançará este valor.

A. O Codificador

Considere o modelo de construção de código unicamente decodificável para o 2-BAC ilustrado na Figura 2. Considere que, a partir de agora, o codificador para $\mathcal{C}_1$, utiliza o esquema de concatenação paralela introduzido em [1] e [2]. Desta forma, o codificador para $\mathcal{C}_1$ é formado pela concatenação paralela de dois códigos convolucionais recursivos componentes, $\mathcal{C}_1^-$ e $\mathcal{C}_1^|$, não necessariamente iguais. As entradas de ambos os codificadores componentes utilizam os mesmos bits de informação u_k, mas em uma ordem diferente, devido à presença do entrelaçador. Similarmente, o codificador para $\mathcal{C}_2$ é formado pela concatenação paralela de dois códigos convolucionais recursivos componentes, $\mathcal{C}_2^-$ e $\mathcal{C}_2^|$, não necessariamente iguais. As entradas de ambos os codificadores componentes utilizam os mesmos bits de informação d_k, mas em uma ordem diferente, devido à presença do entrelaçador, que deve ser idêntico ao entrelaçador utilizado para $\mathcal{C}_1$. A taxa de transmissão de $\mathcal{C}_1$ deve ser igual à taxa de transmissão de $\mathcal{C}_2$.

Considere, sem perda de generalidade, que cada codificador recursivo sistemático tem taxa de transmissão assintótica $1/n$ e M estados, para ambos usuários. Tem-se que as seqüências de símbolos de informação para o usuário 1 e usuário 2 são representadas respectivamente por:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1^N = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots, u_N\},$$
$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1^N = \{d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots, d_N\}.$$

As seqüências código associadas ao usuário 1 e ao usuário 2 são representadas respectivamente por:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1^N = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \ldots, \boldsymbol{v}_N\},$$
$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1^N = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k, \ldots, \boldsymbol{w}_N\}.$$

em que $\boldsymbol{v}_k = (v_k^{(0)}, v_k^{(1)}, \ldots, v_k^{(n-1)}) = (u_k, v_k^{(1)}, \ldots, v_k^{(n-1)})$, é a saída associada a cada símbolo de informação do usuário 1 e similarmente, $\boldsymbol{w}_k = (w_k^{(0)}, w_k^{(1)}, \ldots, w_k^{(n-1)}) = (d_k, w_k^{(1)}, \ldots, w_k^{(n-1)})$, é a saída associada a cada símbolo de informação do usuário 2. $v_k^{(0)}$ e $w_k^{(0)}$ são as saídas sistemáticas dos codificadores para o usuário 1 e para o usuário 2, respectivamente.

Na Figura 3 está ilustrado o codificador para $\mathcal{C}_1$, para códigos convolucionais constituintes com taxa $1/2$. o codificador resultante tem taxa $1/3$.

B. O canal 2-BAC

Os termos $\boldsymbol{v}_1^N$ e $\boldsymbol{w}_1^N$ são as entradas para um canal aditivo ruidoso sem memória, com dois usuários binários. O ruído aqui considerado é o ruído branco gaussiano aditivo. A seqüência de sub-blocos na treliça para dois usuários é dada por

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1^N = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \ldots, \boldsymbol{x}_N\},$$

em que $\boldsymbol{x}_k = (x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n-1)})$. A variável aleatória $x_k^{(j)}, \quad j = 0, \ldots, n-1$, no instante de tempo k, é definida por meio da seguinte igualdade

$$x_k^{(j)} = (2v_k^{(j)} - 1) + (2w_k^{(j)} - 1), \; j = 0, \ldots, n-1. \quad (2)$$

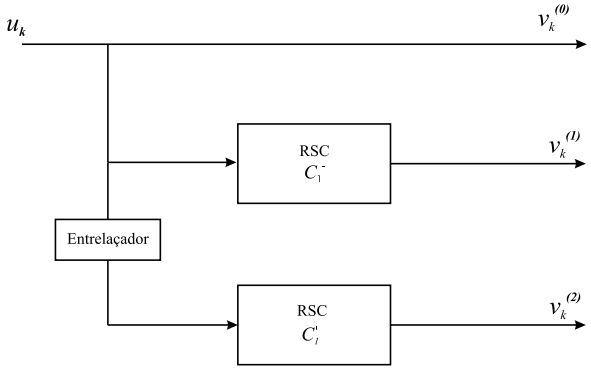

Fig. 3. Esquema de concatenação paralela para o codificador de $\mathcal{C}_1$.

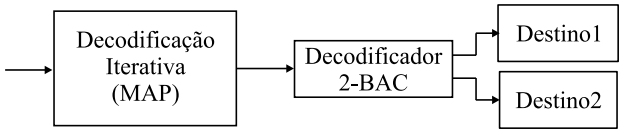

Fig. 4. O decodificador empregado utiliza a decodificação iterativa para detectar a seqüência ternária mais provável e em seguida usa o decodificador 2-BAC para separar a informação relativa aos usuários 1 e 2.

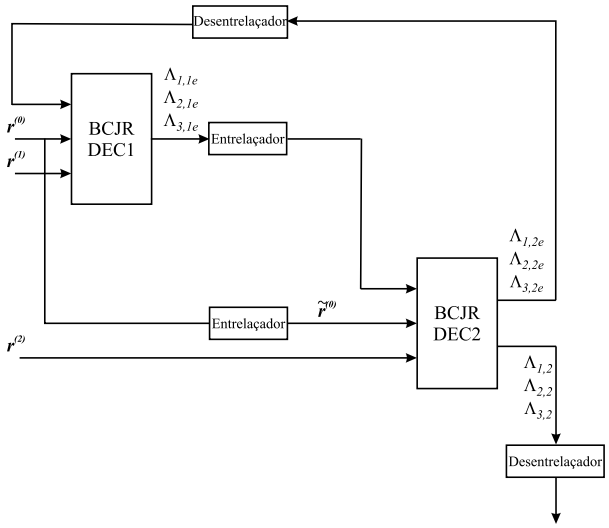

Fig. 5. O decodificador utiliza o princípio da decodificação iterativa e consiste de dois decodificadores componentes concatenados em série. É usado para detectar a seqüência ternária mais provável.

A saída do canal é a seqüência recebida

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1^N = \{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_k, \ldots, \boldsymbol{r}_N\},$$

em que $\boldsymbol{r}_k = (r_k^{(0)}, r_k^{(1)}, \ldots, r_k^{(n-1)})$. A variável aleatória $r_k^{(j)}$, $j = 0, \ldots, n-1$, no instante de tempo k, é definida pela seguinte igualdade

$$r_k^{(j)} = x_k^{(j)} + q_k^{(j)}, \; j = 0, \ldots, n-1, \tag{3}$$

em que $q_k^{(j)}$ são amostras independentes de ruído, todas com a mesma variância σ^2 e média zero.

C. O Decodificador

O decodificador em questão (Figura 4), utiliza a decodificação iterativa [11] para detectar a seqüência ternária mais provável e em seguida usa o decodificador 2-BAC para separar a informação relativa aos usuários 1 e 2, utilizando para isto o par $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ de códigos de bloco unicamente decodificáveis para o 2-BAC.

O algoritmo aqui utilizado é o BCJR [8], [12] que faz uso da treliça para dois usuários definida na Seção II e calcula as razões de log-verossimilhança $\Lambda_1(u_k, d_k)$, $\Lambda_2(u_k, d_k)$ e $\Lambda_3(u_k, d_k)$ associadas ao par dos símbolos de informação (u_k, d_k), relativos aos usuários 1 e 2, repectivamente.

$$\Lambda_1(u_k, d_k) = log \frac{\mathrm{P}\{u_k = 1, d_k = 0|\boldsymbol{r}\}}{\mathrm{P}\{u_k = 0, d_k = 0|\boldsymbol{r}\}}, \tag{4}$$

$$\Lambda_2(u_k, d_k) = \log \frac{\mathrm{P}\{u_k = 1, d_k = 1|\boldsymbol{r}\}}{\mathrm{P}\{u_k = 0, d_k = 0|\boldsymbol{r}\}}, \tag{5}$$

$$\Lambda_3(u_k, d_k) = log \frac{\mathrm{P}\{u_k = 0, d_k = 1|\boldsymbol{r}\}}{\mathrm{P}\{u_k = 0, d_k = 0|\boldsymbol{r}\}}, \tag{6}$$

em que $\mathrm{P}\{u_k = i, d_k = s|\boldsymbol{r}\}$, $i = 0, 1$, $s = 0, 1$, é a probabilidade *a posteriori* do par (u_k, d_k) de símbolos de informação.

Verificando a Figura 4 e em especial o bloco relacionado à decodificação iterativa (MAP), suponha que a partir de agora ele consiste de dois decodificadores componentes concatenados em série, como pode ser visto na Figura 5.

Na entrada do primeiro decodificador BCJR, denotado por DEC1, tem-se as seqüências recebidas $\boldsymbol{r}^{(0)} = \{r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, \ldots, r_N^{(0)}\}$ e $\boldsymbol{r}^{(1)} = \{r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, \ldots, r_N^{(1)}\}$, em que $r_k^{(j)}$ foi definido em (3). DEC1 então produz as saídas suaves $(\Lambda_{1,1}(u_k, d_k), \Lambda_{2,1}(u_k, d_k), \Lambda_{3,1}(u_k, d_k))$, que são entrelaçadas e usadas para produzir estimativas das probabilidades *a priori* dos pares de seqüências de informação para o segundo decodificador BCJR, denotado por DEC2. A notação $\Lambda_{1,1}(u_k, d_k)$, $\Lambda_{2,1}(u_k, d_k)$, $\Lambda_{3,1}(u_k, d_k)$ é usada para denotar as saídas suaves $\Lambda_1(u_k, d_k), \Lambda_2(u_k, d_k)$ e $\Lambda_3(u_k, d_k)$ respectivamente, associadas com DEC1.

Na entrada de DEC2 estão as seqüências recebidas $\tilde{\boldsymbol{r}}^{(0)}$ e $\boldsymbol{r}^{(2)} = \{r_1^{(2)}, r_2^{(2)}, \ldots, r_N^{(2)}\}$. A seqüência $\tilde{\boldsymbol{r}}^{(0)}$ corresponde à seqüência $\boldsymbol{r}^{(0)}$ entrelaçada. DEC2 também produz saídas suaves $(\Lambda_{1,2}(u_k, d_k), \Lambda_{2,2}(u_k, d_k), \Lambda_{3,2}(u_k, d_k))$, cuja notação é usada para indicar que as saídas suaves $\Lambda_1(u_k, d_k), \Lambda_2(u_k, d_k)$ e $\Lambda_3(u_k, d_k)$ estão associadas com DEC2. Estas saídas suaves são usadas para melhorar a estimativa das probabilidades *a priori* dos pares de seqüências (u_k, d_k) de informação na entrada de DEC1.

DEC2 estima as razões de log-verossimilhança $\Lambda_{1,2}(u_k, d_k)$, $\Lambda_{2,2}(u_k, d_k)$ e $\Lambda_{3,2}(u_k, d_k)$.

$\Lambda_{1,2e}(u_k, d_k)$, $\Lambda_{2,2e}(u_k, d_k)$ e $\Lambda_{3,2e}(u_k, d_k)$ são as informações extrínsicas para DEC2, que dependem das informações redundantes supridas pelos codificadores $\mathcal{C}_1^{|}$ e $\mathcal{C}_2^{|}$. As informações extrínsicas de DEC2 são usadas como estimativas das probabilidades *a priori* para DEC1. $\hat{\Lambda}_{1,2e}(u_k, d_k)$, $\hat{\Lambda}_{2,2e}(u_k, d_k)$ e $\hat{\Lambda}_{3,2e}(u_k, d_k)$ correspondem, respectivamente, aos valores $\Lambda_{1,2e}(u_k, d_k)$, $\Lambda_{2,2e}(u_k, d_k)$ e $\Lambda_{3,2e}(0000u_k, d_k)$ desentrelaçados.

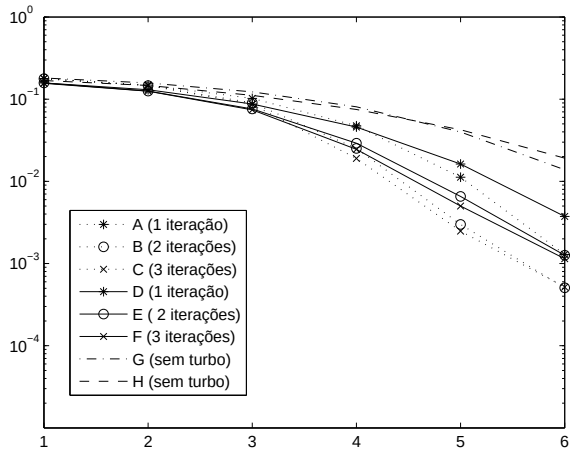

Fig. 6. Curvas relacionadas ao usuário 1. Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: A, B, C e G; Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{D+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: D, E, F e H.

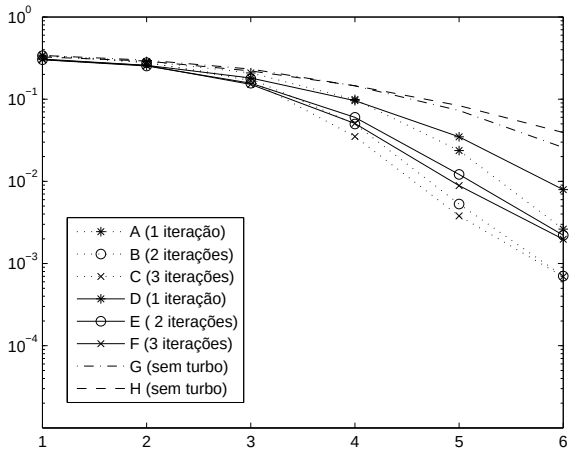

Fig. 7. Curvas relacionadas ao usuário 2. Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: A, B, C e G; Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{D+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: D, E, F e H.

IV. Resultados das simulações

Esta seção tem como objetivo apresentar resultados de simulações computacionais quando o esquema de concatenação ilustrado na Figura 2 é usado e também comparar as curvas relacionando a probabilidade de erro por bit versus relação sinal ruído para dois usuários, para o caso em que é usado apenas o algoritmo BCJR, e para o caso em que é utilizada a decodificação iterativa. Todas as implemetações foram feitas através de simulações com a utilização da ferramenta MATLAB 6.5 [13]. É assumida a presença de ruído branco gaussiano aditivo. Em todas as curvas apresentadas, os códigos de bloco utilizados para os usuários 1 e 2 são, respectivamente, $C_1 = \{01, 10\}$ e $C_2 = \{00, 01, 11\}$. Para a decodificação iterativa é usado o entrelaçador de Berrou-Glaviex[1], [2] com compr1imento 512. Em todos os casos investigados, como os códigos de bloco utilizados são sempre os mesmos, é comparado o efeito de alterar os códigos convolucionais (Figuras 6 a 13), isto é, compara-se o efeito de variar os codificadores convolucionais para $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^|$ e $\mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$, respectivamente. É importante observar que nos casos das Figuras 6 a 11, os codificadores convolucionais dos dois usuários são iguais, isto é, $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$. Em relação as Figuras 12 e13, os codificadores convolucionais dos dois usuários são diferentes, isto é $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^|$ diferentes de $\mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$. Em todos os casos apresentados (Figuras 6 a 13) verifica-se a vantagem do uso da decodificação iterativa em relação ao caso em que é usado apenas o algoritmo BCJR.

V. Conclusões

Foram usados códigos convolucionais com pequeno comprimento de restrição a fim de usufruir de uma menor complexidade computacional. Verifica-se que em praticamente todos os casos apresentados, três iterações são suficientes para conseguir a menor probabilidade de erro deste esquema. O caso em que os codificadores convolucionais do usuário 1 são diferentes dos codificadores convolucionais do usuário 2, também ilustram a vantagem de utilização de decodificação iterativa com uso do esquema da Figura 2.

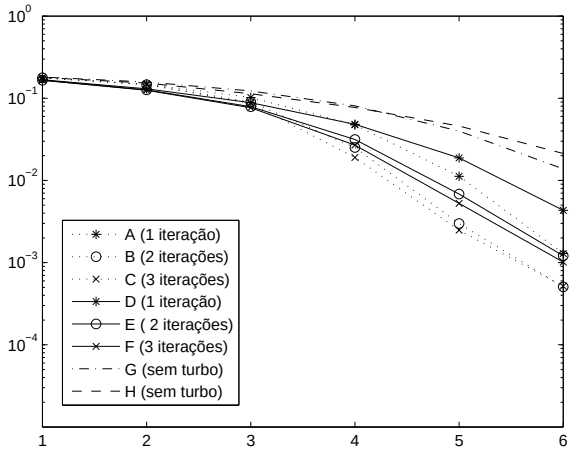

Fig. 8. Curvas relacionadas ao usuário 1. Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: A, B, C e G; Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{D}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: D, E, F e H.

VI. Agradecimentos

Valdemar C. da Rocha Jr. agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo apoio recebido através do Projeto 305226/2003-7.

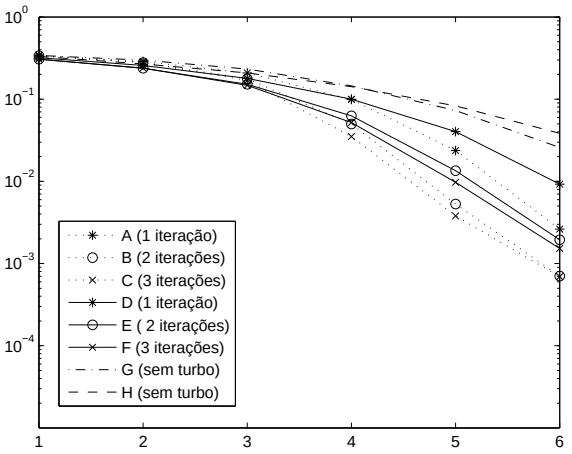

Fig. 9. Curvas relacionadas ao usuário 2. Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: A, B, C e G; Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{D}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: D, E, F e H.

REFERÊNCIAS

[1] C. Berrou, A. Glavieux and P. Thitimajshima, "Near Shannon Limit, Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo Codes ", *IEEE International Conference on Communications (ICC'93)*, vol. 2/3, pp.1064-1071,May 1993.

[2] C. Berrou and Alain Glavieux, "Near Optimum Error Correcting Coding And Decoding: Turbo-Codes", *IEEE Trans. Commun.*,vol. 44, no.10, pp.1261-1271, October 1996.

[3] C. E. Shannon, "Two-way communication channels", *in Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.*, vol. 1, pp.611-644, 1961. Reprinted *in Key Papers in the Development of Information Theory.*, D. Slepian, Ed. New York, IEEE Press, pp.339-372, 1974.

[4] H. A. Cabral *Codificação para Canal de Acesso Múltiplo Síncrono.* Recife, Brasil, 1994. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica)- Departamento de Eletrônica e Sistemas, UFPE.

[5] M. L. M. G. Alcoforado, *Implementação Algorítmica de Códigos Lineares para o Canal Aditivo com Dois Usuários Binários.* Recife, Brasil, 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica)- Departamento de Eletrônica e Sistemas, UFPE.

[6] V. C. da Rocha Jr. and M.L.M.G. Alcoforado, "Trellis code construction for the 2-user binary adder channel", in the Proceedings of 11th *International Conference on Telecommunications*, 1-5 August 2004, Fortaleza, Ceará, Brazil, Editors J. Neuman and P. Dini, Springer Verlag.

[7] V. C. da Rocha Jr. and M.L.M.G. Alcoforado, "Uniquely decodable trellis codes for the two user binary adder channel", *International Symposium on Information Theory and its Applications*, 10-13 October 2004, Parma, Italy.

[8] M. L. M. G. Alcoforado, V. C. da Rocha Jr. and G. Markarian "Turbo Convolutional Codes for the Binary Adder Channel" *VIII International Symposium on Communication Theory and its Application*, July Ambleside, UK.2005.

[9] R. Peterson and D. J. Costello, Jr., "Binary convolutional codes for a multiple-access channel", *IEEE Trans. on Info. Theory*, v. 25, Number 1, p.101-105, January 1979.

[10] S. Lin and D. Costello Jr., *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1983.

[11] J. Hagenauer, "Iterative Decoding of Binary Block and Convolutional Codes", *IEEE Trans. on Inform. Theory*,vol. 42, no.2, pp.429-445, March 1996.

[12] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek and J. Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-20, pp.284-287, March 1974.

[13] HANSELMAN, D.; LITTLEFIELD, B. *Matlab, Guia do Usuário*. São Paulo, Brasil: Makron Books, 1999.

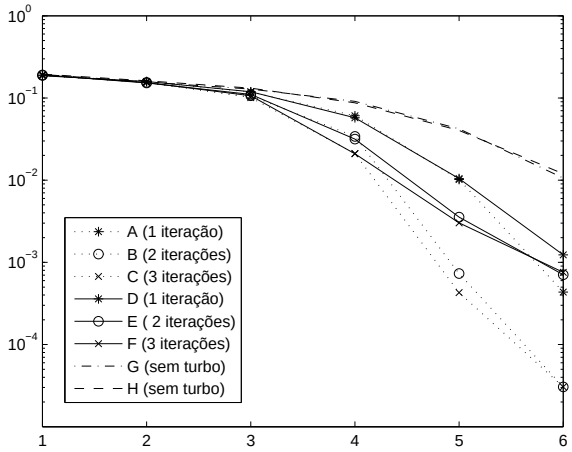

Fig. 10. Curvas relacionadas ao usuário 1. Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D+D^3}{1+D^2+D^3} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: A, B, C e G; Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D+D^2+D^3}{1+D+D^3} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: D, E, F e H.

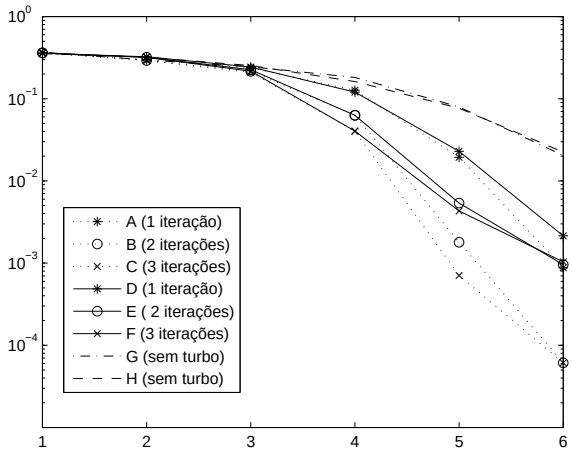

Fig. 11. Curvas relacionadas ao usuário 2. Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D+D^3}{1+D^2+D^3} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: A, B, C e G; Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D+D^2+D^3}{1+D+D^3} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: D, E, F e H.

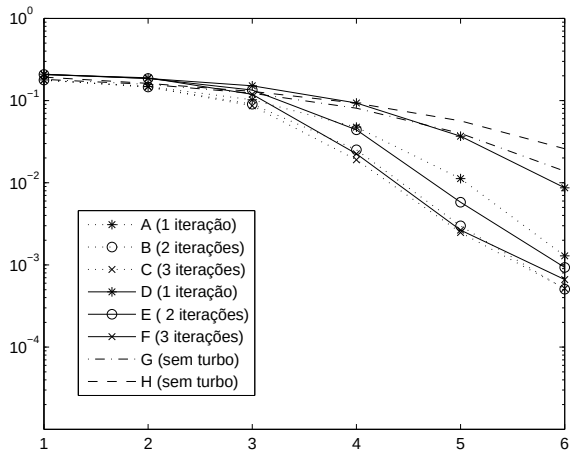

Fig. 12. Curvas relacionadas ao usuário 1. Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: A, B, C e G; Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ e $\mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{D+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: D, E, F e H.

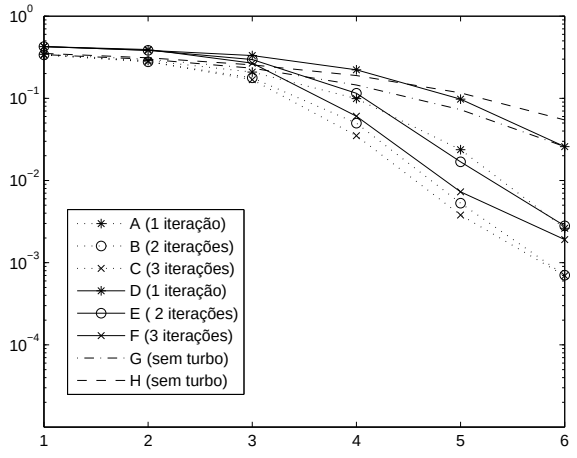

Fig. 13. Curvas relacionadas ao usuário 2. Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^| = \mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: A, B, C e G; Os casos para os quais $\mathcal{C}_1^- = \mathcal{C}_1^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ e $\mathcal{C}_2^- = \mathcal{C}_2^|$ têm matrizes geradoras polinomiais $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{D+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ estão ilustrados em: D, E, F e H.