

# Análise de um guia de onda metálico preenchido por um dielétrico estratificado.

V. H. Soares, T. D. Anaissi, L. C. V. de A. Junior e F. M. Souza.

**Resumo** — Nesse trabalho apresentamos uma formulação teórica que permite descrever transmissão de ondas eletromagnéticas em guias de onda com redes de Bragg. A análise do sinal eletromagnético transmitido e refletido é feita por meio do método de Matriz de Transferência. Nossa formulação é válida para guias retangulares e cilíndricos. Possíveis aplicações em transmissão de dados e redução de ruído em guias de onda serão brevemente discutidas.

**Palavras-Chave**—Microondas, Guias de Onda, Redes de Bragg, Matriz de Transferência.

**Abstract**—In this work we develop a theoretical formalism to describe waveguides with Bragg gratings. The calculated transmitted and reflected electromagnetic signals are obtained via Transfer Matrix approach. Our formulation encompasses both rectangular and cylindrical waveguides. Possible applications of Bragg waveguides in transmission data and noises suppression are briefly discussed.

**Index Terms**—Microwaves, Waveguides, Bragg Gratings, Transfer Matrix.

## I. INTRODUÇÃO

Um guia de onda assim como as linhas de transmissão têm como principal finalidade transmitir energia eletromagnética entre dois pontos espaciais, i.e., gerador e receptor [1]. Porém, os guias de onda apresentam peculiaridades que os tornam fundamentais para certas aplicações. Para citar um exemplo temos a não-propagação do modo Transversal Eletromagnético (TEM), que é suportado pelas linhas de transmissão convencionais [2]. Uma outra distinção importante é a utilização dos guias de onda na faixa de microondas, na qual as linhas de transmissão operam de forma ineficiente. Vale ainda salientar que enquanto as linhas de transmissão operam tanto em corrente contínua como em corrente alternada, os guias de onda apenas operam em frequências acima da chamada *frequência de corte* – sinais com frequências menores são atenuados – tornando-se assim um eficiente filtro passa-faixa. Os guias de onda podem assumir várias configurações, porém as mais utilizadas são quadrangulares, circulares, torcidos e joelho a 90°. Nesse trabalho analisaremos em particular os casos retangulares e circulares.

Vladimir Homobono Soares, Tássio Dantas Anaissi e Luiz Carlos Veiga de Azevedo Junior. Departamento de Engenharia de Telecomunicações, Instituto de Estudos Superiores da Amazônia, Belém, Pará, Brasil, E-mails: [vlad.homobono@gmail.com](mailto:vlad.homobono@gmail.com), [t4ssio@gmail.com](mailto:t4ssio@gmail.com), [lucavaz@oi.com.br](mailto:lucavaz@oi.com.br).

Fabício Macedo de Souza. International Centre for Condensed Matter Physics, Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, Brasil, E-mail: [fmsouza@unb.br](mailto:fmsouza@unb.br).

*Guia preenchido por um dielétrico estratificado.* O interior de um guia de onda é em geral composto por um único dielétrico (índice de refração constante), porém há casos em que o dielétrico tem seu índice de refração modulado periodicamente ao longo eixo do guia, ou têm-se diferentes dielétricos combinados de forma a se gerar uma estrutura periódica (veja Fig. 1). Essa modulação periódica no índice de refração (denominada de Rede de Bragg) introduz efeitos adicionais, como a geração de interferência destrutiva para certas frequências de um sinal eletromagnético, e conseqüentemente a filtragem de comprimentos de onda específicos.

*Lei de Bragg.* Guias de onda com redes de Bragg operam como filtros, isto é, refletem certo comprimento de onda, deixando passar os demais [3],[4]. Podemos mostrar que o comprimento de onda refletido é dado por:

$$\lambda_b = 2n_{ef} \Lambda, \quad (1)$$

onde  $n_{ef}$  é o índice de refração efetivo do meio e  $\Lambda$  é o período da modulação do índice de refração.

## II. MODELAMENTO DE UM GUIA DE ONDA COM REDE DE BRAGG.

A partir das equações de Maxwell no domínio da frequência, podemos calcular a propagação de ondas eletromagnéticas em um guia retangular contendo um dielétrico estratificado. Nesse caso teremos uma série de ondas transmitidas e refletidas em cada camada, dando-se assim origem a interferências construtivas e destrutivas, que serão calculadas consistentemente via matriz transferência. Admitindo o meio livre de cargas ( $\sigma=0$ ) e corrente ( $\vec{j}=0$ ) e sem perdas, temos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (4)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \quad (5)$$

As Eqs. (2)-(5) podem ser expressas de forma compacta como segue

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = 0. \quad (6)$$

Solucionando (6) para as componentes  $x$  e  $y$  obtemos os seguintes campos,

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{\gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{k_z}{\gamma^2} \left( \frac{\partial E_z^+}{\partial x} - \frac{\partial E_z^-}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{\gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{k_z}{\gamma^2} \left( \frac{\partial E_z^+}{\partial y} - \frac{\partial E_z^-}{\partial y} \right) \quad (8)$$

$$E_z = (a_1 \cos k_x x + a_2 \sin k_x x) \times (a_3 \cos k_y y + a_4 \sin k_y y) (a_5 e^{k_z z} + a_6 e^{-k_z z}) \quad (9)$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{\gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{k_z}{\gamma^2} \left( \frac{\partial H_z^+}{\partial x} - \frac{\partial H_z^-}{\partial x} \right) \quad (10)$$

$$H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{\gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{k_z}{\gamma^2} \left( \frac{\partial H_z^+}{\partial y} - \frac{\partial H_z^-}{\partial y} \right) \quad (11)$$

$$H_z = (b_1 \cos k_x x + b_2 \sin k_x x) \times (b_3 \cos k_y y + b_4 \sin k_y y) (b_5 e^{k_z z} + b_6 e^{-k_z z}), \quad (12)$$

onde,  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ ,  $\gamma^2 = k_z^2 + \omega^2 \mu \epsilon = k_z^2 + k^2$  e

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2}.$$

Nas Eqs. (7)-(10) temos os campos elétrico e magnético propagantes ( $E_z^-, H_z^-$ ) e anti-propagantes ( $E_z^+, H_z^+$ ) (originados das reflexões intercadas). As soluções das Eqs. (7)-(10) nos dão as características de transmissão de um guia retangular. No caso de guias cilíndricos a forma mais adequada de expressar os campos é a seguinte,

$$H_r = \frac{1}{\gamma^2} \left[ k_z \left( \frac{\partial H_z^+}{\partial r} - \frac{\partial H_z^-}{\partial r} \right) + \frac{j\omega\epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right] \quad (13)$$

$$H_\phi = \frac{1}{\gamma^2} \left[ \frac{k_z}{r} \left( \frac{\partial H_z^+}{\partial \phi} - \frac{\partial H_z^-}{\partial \phi} \right) - j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \quad (14)$$

$$H_z = [b_1 J_\nu(k_r r)] (b_3 e^{j\nu\phi}) (b_4 e^{k_z z} + b_5 e^{-k_z z}) \quad (15)$$

$$E_r = \frac{1}{\gamma^2} \left[ k_z \left( \frac{\partial E_z^+}{\partial r} - \frac{\partial E_z^-}{\partial r} \right) - \frac{j\omega\mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right] \quad (16)$$

$$E_\phi = \frac{1}{\gamma^2} \left[ \frac{k_z}{r} \left( \frac{\partial E_z^+}{\partial \phi} - \frac{\partial E_z^-}{\partial \phi} \right) + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \quad (17)$$

$$E_z = [a_1 J_\nu(k_r r)] (a_3 e^{j\nu\phi}) (a_5 e^{k_z z} + a_6 e^{-k_z z}), \quad (18)$$

onde se utilizou as coordenadas cilíndricas  $r$  e  $\phi$ . Feito isso basta aplicar as condições de contorno entre as várias

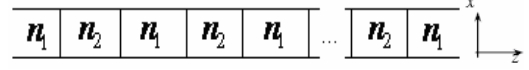


Fig. 1: Guia de onda com modulação periódica de índice de refração.

camadas dielétricas para se encontrar os campos elétrico e magnético nos modos TE e TM, e conseqüentemente os coeficientes de transmissão e de reflexão.

### III. ANÁLISE DO SINAL POR MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

Como o nosso sistema é composto por uma modulação de índice de refração ao longo do guia (mostrado na Fig. 1), podemos aplicar condições de fronteira nas equações apresentadas acima para cada interface entre dois índices de refração sucessivos. Com isso geramos uma sucessão de equações acopladas entre si, que podem ser expressa em forma matricial. Para os modos TM e TE obtemos:

*Transversal Magnético:*

$$\begin{pmatrix} {}^1E_0^+ \\ {}^1E_0^- \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^p \begin{pmatrix} e^{-j k_z(p)} & -e^{-j k_z(p)} \\ e^{-j k_z(p)} & e^{-j k_z(p)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{j^{+1} k_z}{\epsilon_j} e^{j^{+1} k_z(j)} & -\frac{j^{+1} k_z}{j k_z} e^{-j^{+1} k_z(j)} \\ \frac{\epsilon_{j+1}}{\epsilon_j} e^{j^{+1} k_z(j)} & \frac{\epsilon_{j+1}}{\epsilon_j} e^{-j^{+1} k_z(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{j+1}E_0^+ \\ {}^{j+1}E_0^- \end{pmatrix}.$$

*Transversal Elétrico:*

$$\begin{pmatrix} {}^1H_0^+ \\ {}^1H_0^- \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^p \begin{pmatrix} e^{j k_z(p)} & e^{-j k_z(p)} \\ e^{j k_z(p)} & -e^{-j k_z(p)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{j^{+1} k_z}{j k_z} e^{j^{+1} k_z(j)} & \frac{e^{-j^{+1} k_z(j)}}{j k_z} \\ \frac{j^{+1} k_z}{\epsilon_j} e^{j^{+1} k_z(j)} & -\frac{j^{+1} k_z}{\epsilon_j} e^{-j^{+1} k_z(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{j+1}H_0^+ \\ {}^{j+1}H_0^- \end{pmatrix}$$

onde em termos gerais temos,

${}^p A_0^{SINAL}$ ,  $p$  é o numero de interfaces;

$A_0$  é amplitude do campo elétrico ou magnético.

SINAL, (-) Sinais originados de reflexões;

(+) Sinais da propagação.

### IV. CONCLUSÕES

Nesse trabalho apresentamos de forma sucinta uma formulação em termos de matriz transferência que permite descrever transporte de ondas eletromagnéticas em guias de onda (retangular e cilíndrico) na presença de um meio com modulação periódica de índice de refração (rede de Bragg).

### REFERÊNCIAS

- [1] M. N.O. Sadiku, *Elementos de Eletromagnetismo*. Bookman, 2004.
- [2] J. A. Kong, *Theory of Electromagnetic Waves*, John Wiley & Sons, Inc. 1975.
- [3] E. S. C. Silva; *Estudo da Propagação em Guias Dielétricos Compostos Por Meios Complexos*, 1999.
- [4] R. Kashyap. *Fiber Bragg Gratings*. Academic Press, 1999.