

Equalização de Canal Usando um Algoritmo LMS Largamente Linear Multi Split

Francisco J. A. de Aquino, Carlos A. F. da Rocha e Leonardo S. Resende

Resumo – Neste artigo, apresentamos uma implementação multi-split de um equalizador largamente linear com baixa complexidade computacional. O esquema considerado apresenta uma taxa de convergência que pode ser melhor que aquela obtida por um algoritmo LMS largamente linear normalizado. Os resultados de simulação comprovam o desempenho do algoritmo LMS largamente linear multi-split (LMS-LL-MS) para a equalização de um canal complexo quando a constelação empregada é real, como, por exemplo, uma constelação 4-PAM.

Palavras-Chave – Algoritmo LMS, filtragem adaptativa, processamento largamente linear, transformada multi-split.

Abstract— In this paper we present an implementation multi-split of a widely linear equalizer with low computational complexity. The considered scheme presents a convergence rate that can be better than one with normalized algorithm WL-LMS. Simulation results assess the performance of the multi-split WL-LMS algorithm for complex channel equalization when the symbol constellation is real as, for example, a 4-PAM constellation.

Keywords— LMS algorithm, adaptive filtering, widely linear processing, multi-split transform.

I. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, vários pesquisadores têm proposto o uso do processamento largamente linear como uma forma de aumentar o desempenho de equalizadores [1 - 5], quando o sinal recebido é impróprio [6]. Um exemplo de sinal impróprio ocorre quando um sinal real (sinal pertencente a uma constelação PAM, por exemplo) é transmitido por um canal complexo. Outros exemplos importantes são o caso de uma transmissão OQAM (*offset quadrature amplitude modulation*), GSM (*Global System for Mobile Communication*), e sistemas que transmitem em CPM (*Continuous-Phase Modulation*) binário com índice de modulação $h = 1/2$, como mostrado em [3].

Neste artigo usamos a filtragem multi-split (MS) com parâmetros complexos, como apresentado em [7], aplicado ao algoritmo LMS largamente linear (LMS-LL). O algoritmo LMS-LL-MS (LMS-LL multi-split) pode apresentar uma taxa de convergência maior que o LMS-LL

normalizado [8] a um custo computacional pequeno. Vale a pena ressaltar que a aplicação da transformada multi-split ao processamento largamente linear ainda não foi considerada na literatura.

Este artigo é organizado como segue. A Seção II apresenta o algoritmo LMS multi-split. A Seção III apresenta de forma resumida os conceitos fundamentais do processamento largamente linear. A Seção IV apresenta o algoritmo LMS-LL aplicado ao problema de equalização de canais de comunicação. Na Seção V apresentamos o algoritmo LMS-LL-MS e os resultados de simulação. Finalmente, na Seção VI, concluímos este artigo.

II. ALGORITMO LMS MULTI-SPLIT

O algoritmo LMS é um importante membro da família de algoritmos de gradiente estocástico. Uma característica importante do algoritmo LMS é a sua simplicidade. Além disso, ele não requer medidas de funções de correlação, nem envolve a inversão de matrizes. Infelizmente, seu desempenho em termos de capacidade de rastreamento e taxa de convergência depende do espalhamento dos autovalores da matriz de correlação do sinal de entrada [9] e da escolha do passo de adaptação.

Teoricamente, usando uma transformação ortogonal como, por exemplo, a transformação de Karhunen-Loève (KLT), é possível obter uma diagonalização da matriz de autocorrelação do sinal e reduzir a relação dos autovalores e assim melhorar a taxa de convergência do algoritmo LMS. Porém, a transformação KLT apresenta uma complexidade computacional alta. Por outro lado, a operação de multi-split pode melhorar o desempenho do algoritmo de LMS com um baixo custo computacional [7].

A Fig. 1 mostra o esquema clássico de filtragem adaptativa usando um filtro transversal. Neste esquema, n é o tempo discreto e um único sinal de erro é usado para adaptar todos os coeficientes do equalizador na mesma iteração. Usando a técnica multi-split, cada coeficiente do filtro é ajustado de forma independente. A operação multi-split, quando o número de coeficientes do equalizador é $N = 2^M$, $M \geq 1$, pode ser representada de uma forma compacta como mostrado na Fig. 2.

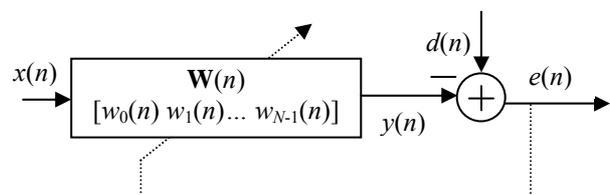
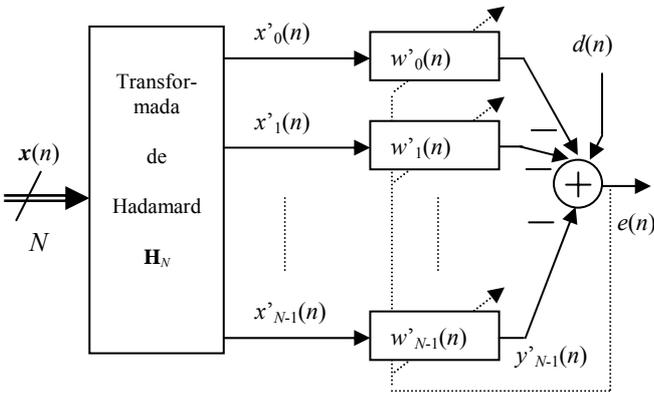


Fig. 1. Filtro transversal adaptativo clássico treinado.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará (CEFET-Ce), Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) processo número 484391/2006-2.

F. J. A. de Aquino é professor no CEFET-Ce e aluno de doutorado na UFSC no Grupo de Pesquisa em Comunicação (GPqCom), e-mail: fcovalves_aq@cefet-ce.br. C. A. Rocha e L. S. Resende são professores no Departamento de Engenharia Elétrica da UFSC, laboratório GPqCom. E-mails: {aurelio, leonardo}@eel.ufsc.br.

Fig. 2. Transformada de Hadamard da entrada $x(n)$.

Neste caso, o procedimento multi-split é equivalente à aplicação da matriz de transformada discreta de Walsh-Hadamard, o que é bem conveniente para a implementação em circuitos integrados (DSPs, FPGAs).

A matriz de Hadamard \mathbf{H}_N de ordem N pode ser formada a partir da matriz $\mathbf{H}_{N/2}$ como segue:

$$\mathbf{H}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{N/2} & \mathbf{H}_{N/2} \\ \mathbf{H}_{N/2} & -\mathbf{H}_{N/2} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

começando com $\mathbf{H}_1 = [1]$. Este procedimento pode gerar todas as matrizes de Hadamard que são potência de 2. Podemos verificar facilmente que $\mathbf{H}_N \mathbf{H}_N = \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é uma matriz identidade $N \times N$.

Portanto, o procedimento multi-split pode ser visto como uma transformação linear dos dados de entrada dada por:

$$\mathbf{x}'(n) = \mathbf{H}_N \mathbf{x}(n), \quad (2)$$

onde $\mathbf{x}(n) = [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(n-N+1)]^T$ é um vetor contendo os dados de entrada.

O procedimento multi-split aumenta a diagonalização da matriz de autocorrelação do sinal de entrada [10], e o algoritmo LMS pode ser usado para adaptar individualmente os parâmetros do equalizador, como mostra a Fig. 2. Estes fatos levam a um melhor desempenho do algoritmo LMS multi-split em relação ao LMS convencional. Notamos ainda que nenhuma operação de multiplicação é necessária nesta transformação (para o caso de $N = 2^M$).

A adaptação de cada coeficiente $w'_i(n)$ do equalizador, usando o algoritmo LMS multi-split (LMS-MS), pode ser descrita como [7]:

$$w'_i(n) = w'_i(n-1) + \frac{\mu_{MS}}{r_i(n)} x'_i(n) e(n), \quad (3)$$

onde $i = 0, 1, \dots, N-1$, μ_{MS} é o passo de adaptação,

$$e(n) = d(n) - y(n), \quad (4)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x'_i(n) w'_i(n), \quad (5)$$

e $r_i(n)$ é uma estimativa da variância de $x'_i(n)$. Esta estimativa pode ser calculada por:

$$r_i(n) = \frac{\sum_{j=1}^n \gamma^{n-j} |x'_i(j)|^2}{\sum_{j=1}^n \gamma^{n-j}} = \frac{p_i(n)}{q_i(n)}, \quad (6)$$

onde $p_i(n)$ e $q_i(n)$ são calculados recursivamente por:

$$p_i(n) = |x'_i(n)|^2 + \gamma p_i(n-1), \quad (7)$$

$$q_i(n) = 1 + \gamma q_i(n-1), \quad (8)$$

e γ ($0 \ll \gamma \leq 1$) é um fator de esquecimento. O caso $\gamma = 1$ é para um ambiente estacionário. Vale a pena observar que o cálculo de $r_i(n)$ feito aqui difere daquele apresentado em [7] e é computacionalmente mais estável.

III. PROCESSAMENTO LARGAMENTE LINEAR: CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Seja uma seqüência $x(n)$ complexa, discreta, aleatória, com média nula. Usualmente, as estatísticas de segunda ordem de $x(n)$ são descritas pela função de autocovariância (FAC), que é definida por:

$$\mu(n_1, n_2) = E\{x(n_1) x^*(n_2)\}, \quad (9)$$

onde $(.)^*$ é a operação de conjugação complexa. Entretanto, tem sido observado que a FAC não é inteiramente suficiente para descrever as estatísticas de segunda ordem em alguns casos [6, 11]. Logo, é necessário introduzir uma outra função chamada de pseudo-autocorrelação (FPAC), definida por:

$$\rho(n_1, n_2) = E\{x(n_1) x(n_2)\}. \quad (10)$$

Então, essas duas funções, $\mu(n_1, n_2)$ e $\rho(n_1, n_2)$, são necessárias para uma descrição completa das estatísticas de segunda ordem de $x(n)$. Quando $\rho(n_1, n_2)$ é igual a zero, a FPAC pode ser omitida e o processo é conhecido como *próprio*. Por outro lado, se o processo apresenta uma FPAC não nula, então este processo é dito ser *impróprio*. Um processo impróprio é estacionário no sentido amplo (*wide-sense stationary - WSS*) se, e somente se, $E\{x(n)\} = m_x$ é uma constante e tanto a FAC quanto a FPAC são independentes do tempo discreto n [11].

Deste modo, o processamento largamente linear faz uso de uma observação complexa imprópria $x(n)$, isto é, usa tanto $x(n)$ quanto o seu conjugado complexo $x^*(n)$.

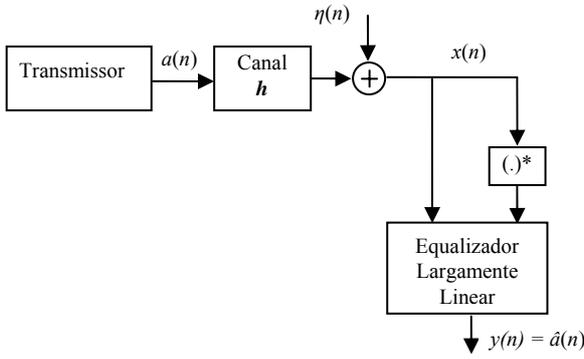


Fig. 3. Diagrama de blocos de um sistema de comunicação digital usando processamento largamente linear.

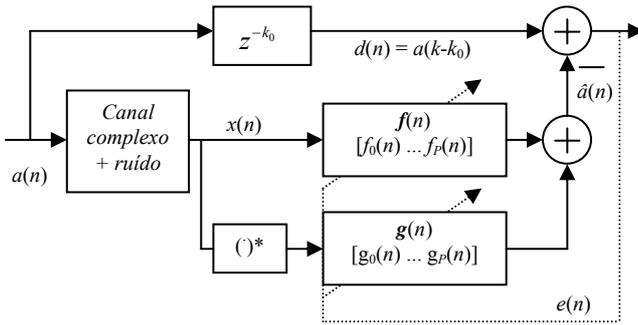


Fig. 4. Equalizador largamente linear treinado.

IV. EQUALIZAÇÃO LARGAMENTE LINEAR

A. Modelo do Sistema

Neste artigo, consideramos o sistema de comunicação digital como descrito pela Fig. 3, onde $a(n)$, $\eta(n)$, $x(n)$ e $y(n)$ representam o sinal transmitido (com os símbolos pertencentes a uma constelação real e com média nula), o ruído (considerado complexo, com igual variância nas partes real e imaginária, aditivo, gaussiano, branco e independente de $a(n)$), o sinal recebido e a saída do equalizador, respectivamente.

O canal de comunicação digital, que pode ser representado por um filtro FIR (*finite impulse response*) de coeficientes complexos e comprimento L , apresenta os efeitos combinados do filtro de transmissão, do canal contínuo no tempo, filtro de recepção e da amostragem. Consideramos ainda que o transmissor gera uma seqüência de símbolos independentes identicamente distribuídos (i.i.d) e de variância σ_a^2 . Já o ruído apresenta uma variância σ_η^2 e é considerado próprio.

O sinal recebido, após uma amostragem à taxa de símbolo e perfeita sincronização de portadora, é dado por:

$$x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)a(n-m) + \eta(n), \quad (11)$$

onde $h(m)$ indica a resposta ao impulso do canal. Note que $x(n)$ é um processo impróprio e que o processamento largamente linear pode ser aplicado vantajosamente.

B. Equalizador Largamente Linear

O equalizador largamente linear utiliza além de $x(n)$ seu conjugado complexo $x^*(n)$, como mostra a Fig. 4. De acordo com esta figura, o sinal de erro largamente linear pode ser expresso por

$$\begin{aligned} e_{LL}(n) &= d(n) - \sum_{m=0}^P f_m^*(n)x(n-m) - \sum_{m=0}^P g_m^*(n)x^*(n-m) \\ &= d(n) - \mathbf{f}^H(n)\mathbf{x}(n) - \mathbf{g}^H(n)\mathbf{x}^*(n), \end{aligned} \quad (12)$$

onde $d(n) = a(n-k_0)$ é o sinal de treinamento, $k_0 \geq 0$ é um atraso que deve ser criteriosamente escolhido [12], $\mathbf{x}(n) = [x(n) \dots x(n-M)]^T$, $x(n) = \mathbf{h}^T \mathbf{a}(n) + \eta(n)$, com $\mathbf{h} = [h_0 \ h_1 \ \dots \ h_L]^T$, $\mathbf{f}(n) = [f_0(n) \ f_1(n) \ \dots \ f_P(n)]^T$, $\mathbf{g}(n) = [g_0(n) \ \dots \ g_P(n)]^T$ e $\mathbf{a}(n) = [a(n) \ \dots \ a(n-L)]^T$.

A partir de (10) e usando as regras de derivação complexa [13] com o objetivo de minimizar a função custo $J = E\{|e_{LL}(n)|^2\}$, é fácil estabelecer o algoritmo LMS largamente linear como sendo expresso por [3, 8]:

$$\hat{\mathbf{a}}(n) = \mathbf{f}^H(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{g}^H(n)\mathbf{x}^*(n) \quad (13a)$$

$$e(n) = a(n-k_0) - \hat{\mathbf{a}}(n) \quad (13b)$$

$$\mathbf{f}(n+1) = \mathbf{f}(n) + \mu_{LL} e_{LL}^*(n) \mathbf{x}(n) \quad (13c)$$

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}^*(n+1) \quad (13d)$$

onde μ_{LL} é o passo (fixo) de adaptação do algoritmo. Notamos que, para esta aplicação, o filtro \mathbf{g} é uma versão conjugada complexa do filtro \mathbf{f} . Portanto, a complexidade computacional do algoritmo LMS-LL pode ser até menor que a sua versão estritamente linear, já que, em geral a ordem do equalizador precisa ser apenas igual a ordem do canal, ou seja, $P \geq L$ [1, 3, 14, 15].

O algoritmo LMS-LL descrito em (13) pode ter o seu passo de adaptação μ_{LL} variável com o objetivo de acelerar a convergência do algoritmo [4, 8]. Talvez a técnica mais simples para tornar o passo variável seja normalizar o vetor $\mathbf{x}(n)$:

$$\mu_{LL}(n) = \mu_N \frac{\mathbf{x}(n)}{\varepsilon + \|\mathbf{x}(n)\|^2} \quad (14)$$

onde $\varepsilon > 0$ é um valor pequeno e $0 < \mu_N < 1$. Incluindo esta modificação em (13), teremos o algoritmo LMS-LL-N (LMS-LL normalizado). Também poderíamos usar outras técnicas de passo variável como, por exemplo, a indicada em [16], mas isto foge ao objetivo deste artigo.

Na próxima seção aplicaremos o procedimento multi-split ao equalizador largamente linear descrito e iremos comparar o desempenho deste novo esquema com os algoritmos LMS-LL e LMS-LL-N através de simulações. A Tabela I sumariza o algoritmo LMS-LL-MS.

TABELA I: Algoritmo LMS-LL-MS

1) <i>Transformação Linear:</i> $\mathbf{x}'(n) = \mathbf{H}_N \mathbf{x}$
2) <i>Atualização:</i>
$y(n) = \mathbf{f}'^H(n) \mathbf{x}'(n) + \mathbf{g}'^H(n) \mathbf{x}^{*}(n)$
$e(n) = d(n) - y(n)$
$r_i(n) = p_i(n) / q_i(n)$ (ver equações 6, 7 e 8)
$f'_i(n) = f'_i(n-1) + \mu_{MS} e(n) x^{*}_i(n) / r_i(n)$
$\mathbf{g}'(n) = \mathbf{f}'^{*}(n)$

V. EQUALIZAÇÃO LARGAMENTE LINEAR MULTI-SPLIT E RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

A aplicação da operação multi-split no equalizador largamente linear é similar ao caso linear, bastando para isso aplicar a matriz de Hadamard nas partes reais e imaginárias dos vetores $\mathbf{x}(n)$ e $\mathbf{x}^{*}(n)$.

Para as simulações de Monte Carlo a seguir, iremos considerar que o sinal transmitido pertence a uma constelação 4-PAM, que o canal é complexo, discreto, de ordem L , e que a relação sinal-ruído (SNR – *signal-to-noise ratio*), definida por

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_n^2 + \sigma_a^2 \sum_{m=0}^L |h(m)|^2}{\sigma_n^2} \right), \quad (15)$$

é de 30 dB. Todos os equalizadores considerados têm $P = 8$ coeficientes. Em todas as simulações consideramos $\varepsilon = 10^{-4}$ para o algoritmo LMS-LL-N e $\gamma = 0,995$ para o algoritmo LMS-LL-MS. Escolhemos os passos de adaptação para que o erro quadrático médio $\left(E\{ |e_{LL}(n)|^2 \}, E\{ |e_{LL-N}(n)|^2 \} \right)$ e

$$E\{ |e_{LL-MS}(n)|^2 \}$$
 após a convergência dos algoritmos

sejam aproximadamente os mesmos. Todas as curvas de aprendizado foram obtidas pela mediação de 400 realizações independentes.

A. Simulação I

Nesta primeira simulação, consideramos um canal cuja resposta ao impulso é $h_1(z) = 0,601 + (0,6309 - 0,2403j)z^{-1} + (0,355 + 0,024j)z^{-2} + (-0,0348 - 0,047j)z^{-3} + (0,156 - 0,1706j)z^{-4}$. Este canal é de fase mista e apresenta um zero próximo ao círculo de raio unitário. A Fig. 5 mostra os zeros deste canal, bem como a sua resposta em frequência, o sinal após passar pelo canal e o sinal equalizado. Podemos notar que o sinal equalizado é puramente real

A Fig. 6 apresenta as curvas de aprendizado para os algoritmos LMS-LL, LMS-LL-N (normalizado) e LMS-LL-MS. Nesta simulação, escolhemos um atraso $k_0 = 3$. Notamos que os três algoritmos têm praticamente o mesmo erro quadrático médio final, mas o algoritmo LMS-LL-MS converge com um número menor de iterações. Os passos de adaptação usados foram: $\mu_{LL} = 0,0045$; $\mu_N = 0,22$ e $\mu_{LL-MS} = 1/32$.

B. Simulação II

Nesta segunda simulação, consideramos um canal cuja resposta ao impulso é dada por $h_1(z) = (0,3921 + 0,3921j) + (0,0392 + 0,745j)z^{-1} + (0,051 + 0,2548j)z^{-2} + (0,132 + 0,136j)z^{-3}$

$+ (0,1068 + 0,1129j)z^{-4} + (0,0423 + 0,0819j)z^{-5}$. Este canal também apresenta fase mista e um zero próximo ao círculo de raio unitário. A Fig. 7 mostra os zeros, a resposta em frequência e o sinal após passar pelo canal.

A Fig. 8 apresenta as curvas de aprendizado para os algoritmos LMS-LL, LMS-LL-N e LMS-LL-MS. O atraso usado foi $k_0 = 2$. Novamente, observamos que os três algoritmos têm praticamente o mesmo erro quadrático médio após a convergência, mas o algoritmo LMS-LL-MS converge com um número menor de iterações. Os passos de adaptação usados foram: $\mu_{LL} = 0,0050$; $\mu_N = 0,25$ e $\mu_{LL-MS} = 1/32$.

C. Simulação III

Nesta última simulação, consideramos o canal definido por Porat e Friedlander [17], cuja resposta ao impulso é $h_P(z) = (0,485 - 0,0971j) + (0,364 + 0,4368j)z^{-1} + 0,2427z^{-2} + (0,2912 - 0,3155j)z^{-3} + (0,1941 + 0,3883j)z^{-4}$. Este canal é de fase mista e apresenta dois zeros próximos ao círculo de raio unitário. A Fig. 9 mostra os zeros deste canal e a sua resposta em frequência.

A Fig. 10 apresenta as curvas de aprendizado para os algoritmos LMS-LL, LMS-LL-N (normalizado) e LMS-LL-MS. Escolhemos um atraso $k_0 = 4$. Notamos que, para este canal, o algoritmo LMS-LL-MS apresenta uma taxa de convergência apenas ligeiramente maior que a dos outros dois algoritmos. Os passos de adaptação usados foram: $\mu_{LL} = 0,0050$; $\mu_N = 0,22$ e $\mu_{LL-MS} = 1/32$.

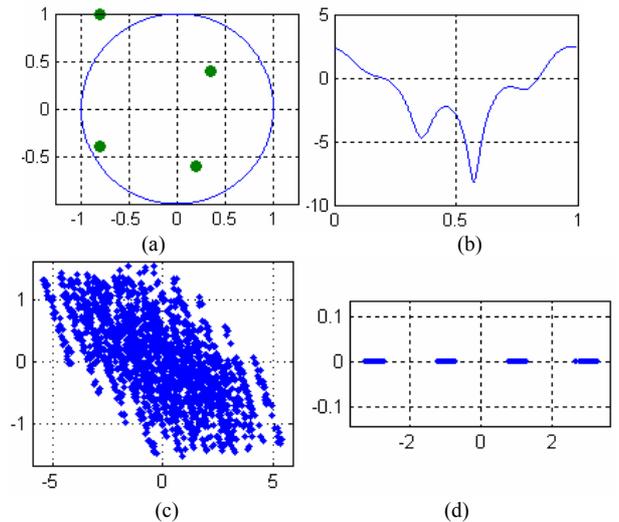


Fig. 5. (a) zeros do canal h_1 , (b) resposta em frequência, (c) saída do canal, (d) constelação equalizada (igual para os três equalizadores).

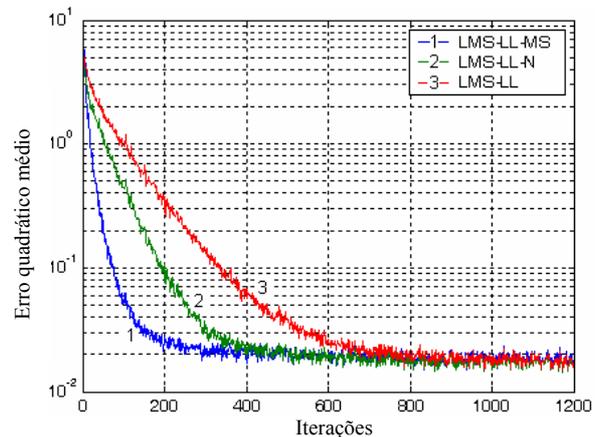


Fig. 6. Curvas de aprendizado para o canal h_1 .

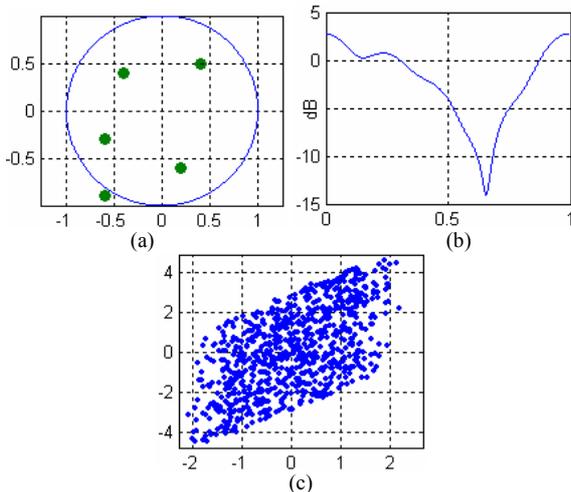


Fig. 7. (a) zeros do canal h_2 , (b) resposta em frequência, (c) sinal após o canal.

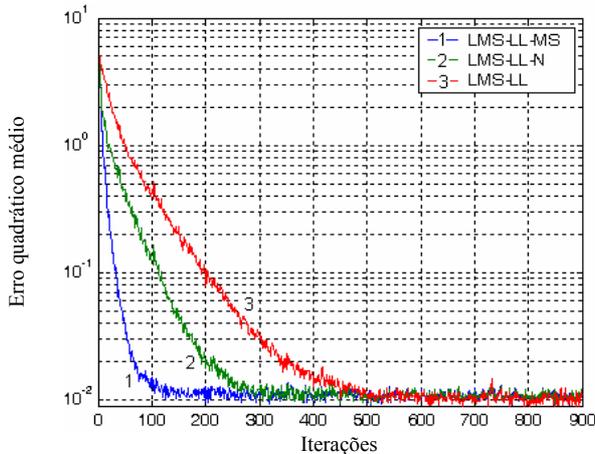


Fig. 8. Curvas de aprendizagem para o canal h_2 .

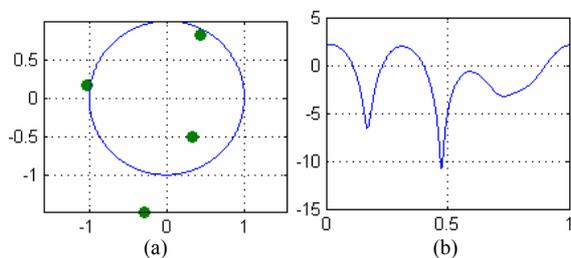


Fig. 9. (a) zeros do canal h_p , (b) resposta em frequência.

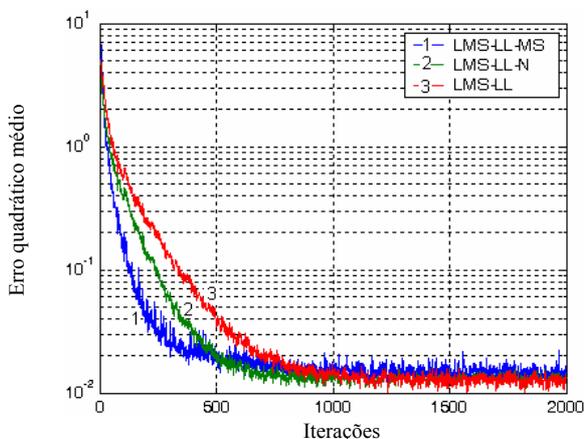


Fig. 10. Curvas de aprendizado para o canal h_p .

VI. CONCLUSÃO

Neste artigo, mostramos que a técnica multi-split pode ser aplicada ao algoritmo LMS largamente linear, da mesma forma que no caso linear. O desempenho do equalizador proposto foi avaliado para o caso de equalização adaptativa. Os resultados de simulação evidenciam que o algoritmo LMS-LL multi-split pode conseguir uma melhor taxa de convergência que a sua versão normalizada, para um desajuste final similar.

REFERÊNCIAS

- [1] F. J. A. de Aquino, C. A. F. da Rocha e L. S. Resende, "Widely Linear Prediction Applied to Blind Equalization", Proceedings of International Workshop on Telecommunications (IWT) 2007, pp. 240-247, Feb. 2007.
- [2] G. Gelli, L. Paura e A. R. P. Ragozini, "Blind widely linear multiuser detection," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 4, no. 6, pp. 187-189, Jun. 2000.
- [3] W. H. Gerstacker, R. Schober e A. Lampe, "Receivers with widely linear processing for frequency-selective channels," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 7, no. 9, pp. 1512-1523, Sep. 2003.
- [4] Amaro A. de Lima e Rodrigo C. de Lamare, "Adaptive Detection using Widely Linear Processing with Data Reusing for DS-CDMA Systems", *VI International Telecommunications Symposium (ITS2006)*, Fortaleza-CE, Brazil, vol. 1, 167-172, Sep., 2006.
- [5] R. Schober, W. H. Gerstacker, L. H.-J. Lampe, "Data-Aided and Blind Stochastic Gradient Algorithms for Widely Linear MMSE MAI Suppression for DS-CDMA", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 52, pp. 746-755, no. 3, Mar 2004.
- [6] B. Picinbono, e P. Chevalier, "Widely linear estimation with complex data," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, pp. 2030-2033, Aug. 1995.
- [7] R.D. Souza, L.S. Resende, M.G. Bellanger, "Efficient Implementation of Multi-Split LMS Filtering with Complex Parameters", Proceedings of the 4th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis, pp. 419-423, 2005.
- [8] F. J. A. de Aquino, C. A. F. da Rocha e L. S. Resende, "Accelerating the Convergence of the Widely Linear LMS Algorithm for Channel Equalization", *VI International Telecommunications Symposium (ITS2006)*, Fortaleza-CE, Brazil, vol. 1, 57-61, Sep., 2006.
- [9] K. F. Wan e P. C. Ching, "Multilevel split-path adaptive filtering and its unification with discrete Walsh transform application," *IEEE Trans. Circuits Syst II*, vol. 44, No.2, pp. 147-151, Feb. 1997.
- [10] R. D. Souza, L. S. Resende, e M. G. Bellanger, "A justification for the improved performance of the multi-split LMS algorithm," in *Proc. IEEE ICASSP'03*, Hong Kong, pp. 89-92, Apr. 2003.
- [11] F. D. Neeser e J. L. Massey, "Proper complex random processes with applications to information theory," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 39, pp. 1293-1302, July 1993.
- [12] P.A. Voois, I. Lee, e J. M. Cioffi, "The effect of decision delay in finite-length decision feedback equalization", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 42, pp. 618-621, Mar. 1996.
- [13] S. Haykin, "Adaptive Filter Theory", 4th. ed., Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- [14] C.B. Papadias e D.T.M. Slock, "Fractionally spaced equalization of linear polyphase channels and related blind techniques based on multichannel linear prediction", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 47, pp. 641-654, Mar. 1999.
- [15] G.B. Giannakis, e S.D. Halford, "Blind fractionally spaced equalization of noisy FIR channels: direct and adaptive solutions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, pp.:2277 - 2292, Sept. 1997.
- [16] M.H. Costa e J.C. Bermudez, "A Robust Variable Step-Size Algorithm for LMS Adaptive Filters", *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 3, pp. 93-96, May 2006.
- [17] B. Porat e B. Friedlander, "Blind Equalization of Digital Communication Channels Using High-Order Moments", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 39, no. 2, pp. 522-526, Feb. 1991.