Transformada Inteira de Gram-Schmidt para Imagens Multiespectrais

Alison de O. Moraes, Giovanni K. Bonetti e Marcelo da S. Pinho

***Resumo*— Este artigo apresenta uma transformada inteira para imagens multiespectrais, baseada no processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, denominada IGST. O objetivo desta transformada, que é uma aproximação da transformação de Gram-Schmidt (GST), é descorrelacionar as bandas da imagem. A IGST é utilizada para calcular transformadas para imagens do tipo RGB e imagens geradas a partir de dados de satélites de sensoriamento remoto. Os resultados mostram que o desempenho da IGST é muito próximo do desempenho da GST. A eficiência da IGST também é comparada com a eficiência da transformada inteira de Kahunen-Loève, proposta por Hao e Shi (IKLT), quando usada na transformação do mesmo grupo de imagens. É mostrado que a IGST atinge resultados ligeiramente melhores que a IKLT e que possui uma complexidade computacional significativamente menor.**

***Palavras-Chave*— Transformada inteira, transformada inteira multiespectral, compressão de imagens multiespectrais**

***Abstract*— This work presents an integer transform based on Gram-Schmidt orthogonalization procedure for multispectral images, called IGST. The aim of this transform, which is an approximation of the Gram-Schmidt Transform (GST), is to decorrelate the image bands. The IGST is applied to transform RGB images and satellite remote sensing images. The results show that the IGST performance is very closed to the GST performance. The IGST efficiency is also compared to the efficiency of the integer Kahunen-Loève transform, proposed by Hao and Shi (IKLT), when used to transform the same group of images. It is shown that the IGST achieves a slightly better performances than IKLT and has a lower computational complexity.**

***Keywords*— Integer transform, multispectral integer transform, multispectral image compression**

I. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o estudo de transformadas inteiras recebeu atenção especial devido a sua importância em sistemas de compressão de imagens sem perda de informação (e em sistemas com qualidade progressiva capazes de atingir a reconstrução perfeita). De fato, alguns algoritmos muito populares, tais como o SPIHT [1] e o algoritmo do padrão JPEG2000 [2], possuem versões que utilizam transformadas inteiras.

Na compressão de imagens multiespectrais, em geral, a primeira etapa é uma transformação nas bandas, cujo objetivo é facilitar o processo de compressão [3]. Idealmente, esta transformação deveria permitir que as bandas fossem codificadas de forma independente, sem perda de eficiência. Na prática, as transformações que conseguem os melhores resultados produzem bandas transformadas com coeficientes reais, e sendo assim não podem ser utilizadas em aplicações que necessitam de uma reconstrução perfeita.

Em [4], foi apresentado um método de fatoração de matrizes que possibilita encontrar aproximações inteiras para qualquer transformação linear. Este método permite diferentes formas de se fatorar a matriz da transformação linear, sendo que uma das soluções é a fatoração em um produto de três matrizes triangulares que podem ser utilizadas para definir uma aproximação inteira para a transformação linear em questão.

Devido à sua capacidade de gerar bandas descorrelacionadas, a KLT (*Kahunen-Loève Transform*) é uma solução que tem sido analisada com freqüência em estudos sobre compressão de imagens multiespectrais. No entanto, por não ser uma transformada inteira, a KLT não pode ser utilizada diretamente em um sistema sem perda. Em [5], o método proposto em [4] foi utilizado para a implementação de uma transformada inteira de Kahunen-Loève (IKLT - *Integer KLT*). Simulações com imagens mostraram que os resultados da IKLT são muito próximos dos resultados obtidos com a KLT.

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt também pode ser adaptado para produzir uma transformação para as bandas de uma imagem multiespectral, capaz de gerar bandas transformadas descorrelacionadas. Este trabalho apresenta uma aproximação inteira para uma transformada baseada neste processo, que será denominada IGST (*Integer Gram-Schmidt Transform*). Resultados preliminares mostram que a IGST atinge um desempenho ligeiramente superior ao desempenho da IKLT, tendo uma complexidade computacional significativamente menor. Este artigo está organizado da seguinte forma. A seção II apresenta os principais aspectos da IKLT. A IGST é introduzida na seção III. Os resultados de simulação com imagens são analisados na seção IV. Encerrando o trabalho, a seção V apresenta a conclusão.

II. TRANSFORMADA INTEIRA DE KAHUNEN-LOÈVE

Nesse trabalho, uma imagem multiespectral com n bandas é modelada através de n processos estocásticos reais e bidimensionais, $\{X_1(i,j),\dots,X_n(i,j)\}$, onde $X_k(i,j)$ representa o valor do pixel da k-ésima banda no ponto (i,j). Sem perda de generalidade, este trabalho irá considerar imagens quadradas com m linhas e m colunas. Sendo assim, o ponto (i,j) é tal que $i,j \in \{1,\dots,m\}$. Conforme mencionado na Introdução, em geral, o primeiro passo de um codificador para imagens multiespectrais é uma transformação nas bandas desta imagem. Esta transformação mapeia $\{X_1(i,j),\dots,X_n(i,j)\}$ em n bandas transformadas (ou processos estocásticos) $\{Y_1(i,j),\dots,Y_n(i,j)\}$ e tem

Alison de O. Moraes, Instituto de Aeronáutica e Espaço, e Giovanni K. Bonetti e Marcelo da S. Pinho, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, S.P., Brasil. E-mails: alison.moraes@gmail.com, giovanni.bonetti@gmail.com e mpinho@ieee.org. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq.

como objetivo permitir que o codificador comprima estas bandas transformadas separadamente, sem perda de eficiência. Através de resultados da teoria da informação, é possível afirmar que este objetivo só seria atingido caso a transformação fosse capaz de gerar bandas estatisticamente independentes [6]. No caso geral, encontrar uma transformação com tal característica é bastante difícil. Sendo assim, para facilitar a busca por boas soluções é comum restringir o estudo a um subconjunto de transformações.

Quando se restringe a análise ao conjunto de transformações lineares, acredita-se que uma boa solução para o problema seja a utilização de um método capaz de gerar bandas descorrelacionadas. Quando as funções de autocorrelação em relação às bandas são conhecidas, i.e., quando $\mathbb{E}[X_{k_1}(i,j)X_{k_2}(i,j)]$ são conhecidas (onde $\mathbb{E}$ representa o operador valor esperado), o método de Kahunen-Loève pode ser utilizado para se encontrar uma transformação que produzirá para cada posição (i,j), um vetor $\{Y_1(i,j), Y_2(i,j), \ldots, Y_n(i,j)\}$ de variáveis aleatórias descorrelacionadas [7].

Na prática, as funções de correlação dos processos estocásticos $\{X_1(i,j), \ldots, X_n(i,j)\}$ não são conhecidas a priori. Por esta razão, o método de Kahunen-Loève não pode ser aplicado diretamente. Na literatura da área de compressão de imagens, em geral, o termo *Kahunen-Loève Transform* é utilizado para uma transformação obtida a partir do método de Kahunen e Loève aplicado em estimativas de funções de correlação dos processos em questão. Estas estimativas, usualmente, são baseadas nas seguintes considerações.

(a) $\{X_1(i,j), X_2(i,j), \ldots, X_n(i,j)\}$ são processos conjuntamente estacionários;

(b) se

$$\mu_k(m) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} X_k(i,j), \tag{1}$$

então $\mu_k(m) \to \mathbb{E}[X_k(i,j)]$ quando $m \to \infty$, onde E representa o operador média; e

(c) se

$$\begin{aligned}\lambda_{k_1,k_2}(m) \quad = \quad & \frac{1}{m^2-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(X_{k_1}(i,j) - \mu_{k_1}(m)\right) \\ & \left(X_{k_2}(i,j) - \mu_{k_2}(m)\right),\end{aligned} \tag{2}$$

então $\lambda_{k_1,k_2}(m)$ converge para a covariância entre $X_{k_1}(i,j)$ e $X_{k_2}(i,j)$, quando m cresce indefinidamente.

Seja $\mathbf{X}(i,j)$ o vetor aleatório composto da seguinte forma.

$$\mathbf{X}(i,j) = \begin{pmatrix} X_1(i,j) \\ X_2(i,j) \\ \ldots \\ X_n(i,j) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Seja $\mathbf{\Lambda_X}$ a matriz de covariância de $\mathbf{X}(i,j)$. O método de Kahunen-Loève garante que se $\mathbf{A}$ for uma matriz em que as linhas são compostas pelos autovetores de $\mathbf{\Lambda_X}$, então o vetor aleatório resultante da transformação $\mathbf{AX}(i,j)$ possuirá componentes descorrelacionadas. De fato, pois neste caso, a matriz de covariância de $\mathbf{AX}(i,j)$ será dada por $\mathbf{A\Lambda_X A}^T$. Como $\mathbf{A}$ é construído com os autovetores de $\mathbf{\Lambda_X}$, é possível mostrar que $\mathbf{A\Lambda_X A}^T$ se transforma em uma matriz diagonal, o que representa uma matriz de covariância de um vetor aleatório com componentes descorrelacionadas.

Como $\lambda_{k_1,k_2}(m)$ converge para a covariância entre $X_{k_1}(i,j)$ e $X_{k_2}(i,j)$, uma boa estimativa para a matriz de covariância de $\mathbf{X}(i,j)$ pode ser obtida utilizando $\lambda_{k_1,k_2}(m)$. Sendo assim, a KLT aplicada em imagens, em geral, é construída tomando como base a estimativa da matriz de covariância [8].

Em geral, a KLT não é uma transformada inteira, pois ela pode mapear valores inteiros em valores reais, o que inviabiliza sua utilização em sistemas de compressão sem perda. Em [4] foi apresentado um método de fatoração de matrizes capaz de encontrar aproximações inteiras para transformadas reais. Em [5], esta técnica é utilizada para construir uma aproximação inteira da KLT (denominada de IKLT).

Para que uma transformação permita uma reconstrução perfeita, é necessário que as bandas transformadas $\{Y_1(i,j), \ldots, Y_n(i,j)\}$ sejam compostas por variáveis aleatórias discretas. Em geral, as transformações utilizadas em sistemas de codificação sem perda mapeiam variáveis inteiras em variáveis inteiras.

O princípio da técnica proposta em [4] é a fatoração da matriz da transformação linear em um produto de matrizes triangulares cujas diagonais principais são compostas por elementos iguais a ± 1. No caso da KLT, a matriz $\mathbf{A}$, definida acima, é decomposta em

$$\mathbf{A} = \mathbf{LUS}, \tag{4}$$

onde $\mathbf{L}$ e $\mathbf{S}$ são matrizes triangulares inferiores e $\mathbf{U}$ é uma matriz triangular superior (sendo que as diagonais principais das três são compostas por elementos iguais a ± 1). Detalhes sobre o processo de fatoração da matriz de transformação podem ser obtidos em [4].

Para compreender como esta fatoração pode auxiliar na busca por uma aproximação inteira, basta observar dois pontos importantes. Em primeiro lugar, encontrar uma aproximação inteira para uma matriz triangular é um problema relativamente simples. Em segundo lugar, a composição de transformações inteiras é uma transformação inteira.

Seja $\mathbf{L}$ uma matriz triangular inferior, cuja diagonal principal é composta apenas por elementos iguais a ± 1. Neste caso, se $\mathbf{L}$ é aplicada no vetor $\mathbf{X}(i,j)$, o vetor transformado será dado por

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}}(i,j) \quad &= \quad \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \ldots & o \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \ldots & l_{n,n} \end{pmatrix} \mathbf{X}(i,j) \\ &= \begin{pmatrix} \pm X_1(i,j) \\ \pm X_2(i,j) + l_{2,1}X_1(i,j) \\ \ldots \\ \pm X_n(i,j) + \sum_{k=1}^{n-1} l_{n,k}X_k(i,j) \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5}$$

Neste caso, a aproximação inteira pode ser obtida da seguinte forma.

$$\lfloor \hat{X}_k(i,j) \rfloor = \pm X_k(i,j) + \lfloor \sum_{\nu=1}^{k-1} l_{k,\nu} X_\nu(i,j) \rfloor, \tag{6}$$

para $k = 1, \ldots, n$, onde $\lfloor \alpha \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a α. Para concluir que $\mathbf{X}(i,j)$ pode ser recuperado sem distorção a partir das aproximações de $\hat{\mathbf{X}}(i,j)$, basta observar em (6) que $X_k(i,j)$ pode ser escrito em função da versão aproximada, $\lfloor \hat{X}_k(i,j) \rfloor$, e das variáveis $X_\nu(i,j)$, $\nu < k$. Sendo assim, se as variáveis $X_\nu(i,j)$, $\nu < k$ forem conhecidas antes do cálculo de $X_k(i,j)$, este poderá ser recuperado sem distorção. No entanto, $X_1(i,j)$ pode ser obtido a partir de $\lfloor \hat{X}_1(i,j) \rfloor$. Portanto, por indução, é possível concluir que $\mathbf{X}(i,j)$ pode ser recuperado sem distorção.

Analogamente é possível encontrar uma aproximação inteira para a transformação definida para uma matriz triangular superior, cuja diagonal principal é composta apenas por elementos iguais a ± 1.

Sendo assim, para se obter a IKLT é necessário calcular a KLT, fatorar a matriz da KLT, seguindo o método proposto por [4] e aplicar as aproximações das transformadas $\mathbf{S}$, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{L}$ sucessivamente na imagem original.

III. TRANSFORMADA INTEIRA DE GRAM-SCHMIDT

Seja $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ um conjunto de n elementos pertencentes a um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Seja $\mathcal{V}$ o subespaço de $\mathcal{H}$ gerado por $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$. O procedimento de Gram-Schmidt permite encontrar uma base ortonormal para $\mathcal{V}$ a partir de $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$. Este procedimento pode ser adaptado para gerar uma transformação que descorrelaciona um vetor aleatório. De fato, basta tomar o espaço de variáveis aleatórias que possuem momento de segunda ordem finito, com a métrica L_2. Neste caso, o produto interno entre duas variáveis aleatórias W e Z é dado por $\mathbb{E}[WZ]$. Sendo assim, se W e Z forem ortogonais, $\mathbb{E}[WZ] = 0$. Além disso, se W ou Z tiverem média nula, $\mathbb{E}[WZ] = \mathbb{E}[W]\mathbb{E}[Z]$, i.e., as variáveis serão descorrelacionadas.

Como o objetivo final é a construção de uma transformação inteira, o processo de Gram-Schmidt é utilizado apenas para se obter um conjunto ortogonal de variáveis aleatórias (não se normaliza as variáveis), com médias nulas. Seja $\mathbf{X}(i,j)$ o vetor aleatório definido em (3). Seja $\mathbf{\Psi}(i,j) = \mathbf{X}(i,j) - \mathbb{E}[\mathbf{X}(i,j)]$ o vetor aleatório com a média removida. A transformada de Gram-Schmidt utilizada neste trabalho mapeia $\mathbf{X}(i,j)$ em um vetor aleatório $\mathbf{Y}(i,j)$, definido da seguinte forma.

$$\begin{aligned} Y_1(i,j) &= \Psi_1(i,j), \\ Y_2(i,j) &= \Psi_2(i,j) - \frac{<\Psi_2(i,j), Y_1(i,j)>}{||Y_1(i,j)||^2} Y_1(i,j), \\ &\cdots \\ Y_n(i,j) &= \Psi_n(i,j) - \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{<\Psi_n(i,j), Y_k(i,j)>}{||Y_k(i,j)||^2} Y_k(i,j), \end{aligned} \tag{7}$$

onde $\Psi_k(i,j)$ representa a k-ésima componente do vetor $\mathbf{\Psi}(i,j)$, $< W, Z >$ representa o produto interno entre W e Z e $||W||$ representa a norma de W. Pela característica do processo de Gram-Schmidt, é possível afirmar que as componentes do vetor aleatório $\mathbf{Y}(i,j)$ são ortogonais. Além disso, como $Y_1(i,j) = \Psi_1(i,j)$, é possível afirmar que esta variável aleatória possui média nula. Da definição de $Y_k(i,j)$, também é possível notar que sua média é dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_k(i,j)] &= \mathbb{E}[\Psi_k(i,j)] - \\ &- \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{<\Psi_k(i,j), Y_\nu(i,j)>}{||Y_\nu(i,j)||^2} \mathbb{E}[Y_\nu(i,j)], \end{aligned}$$

para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$. Logo se $\mathbb{E}[Y_\nu(i,j)] = 0$ para todo $\nu < k$, então $\mathbb{E}[Y_k(i,j)] = 0$ (pois pela definição de $\Psi_k(i,j)$, $\mathbb{E}[\Psi_k(i,j)] = 0$). Mas como $\mathbb{E}[Y_1(i,j)] = 0$, por indução é possível concluir que $\mathbb{E}[Y_k(i,j)] = 0$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, o vetor aleatório $\mathbf{Y}(i,j)$ contém componentes ortogonais e vetor média nulo. Conseqüentemente, as componentes de $\mathbf{Y}(i,j)$ são descorrelacionadas.

De forma análoga ao que ocorre na transformação de imagens multiespectrais pela KLT, neste caso, os produtos escalares entre $\Psi_{k_1}(i,j)$ e $Y_{k_2}(i,j)$, $1 \le k_2 < k_1 \le n$, e as normas de $Y_k(i,j)$, $k = 1, \ldots, n-1$ (utilizadas na GST) não são conhecidas. No entanto, se as considerações (a), (b) e (c), sobre $\{X_1(i,j), X_2(i,j), \ldots, X_n(i,j)\}$, apresentadas na seção II, forem válidas, é possível estimar de forma eficiente estas grandezas.

É interessante observar que o conjunto de equações (7) pode ser reescrito através de uma transformação

$$\mathbf{Y}(i,j) = \mathbf{B}\left(\mathbf{X}(i,j) - \mathbb{E}[\mathbf{X}(i,j)]\right), \tag{8}$$

onde $\mathbf{B}$ é uma matriz calculada a partir das covariâncias e variâncias utilizadas na GST. Além disso, também é possível notar que a matriz $\mathbf{B}$ é triangular inferior e que sua diagonal principal é composta apenas por termos iguais a 1. Sendo assim, não há a necessidade de se fatorar a matriz $\mathbf{B}$ para se encontrar uma aproximação inteira.

Sendo assim, para se obter a IGST basta calcular a GST e aplicar a aproximação inteira na matriz de transformação, conforme descrito na seção II.

IV. RESULTADOS

A IKLT e a IGST foram implementadas em *software* para avaliar o desempenho destes métodos quando aplicados em imagens com múltiplas bandas. Um dos testes mais simples que podem ser realizados é a utilização destes métodos em imagens coloridas, representadas através das componentes RGB (*red-green-blue*). O grupo de imagens utilizado para avaliar o desempenho dos algoritmos foi composto pelas imagens *airplane, baboon, lena, peppers* e *sailboat*, todas disponíveis na página da Internet do *Center for Image Processing Research* do *Rensselaer Polytechnic Institute*, cujo endereço é http://www.cipr.rpi.edu.

Uma forma de avaliar os resultados obtidos pelas diferentes transformadas é analisando a matriz de covariância estimada das bandas transformadas, $\{Y_1(i,j), Y_2(i,j), \ldots, Y_n(i,j)\}$. Para realizar esta estimativa, foi utilizado o estimador não polarizado, seguindo procedimento análogo ao definido em (2) para o vetor $\mathbf{X}(i,j)$. A Tabela I apresenta as matrizes estimadas para a imagem transformada da lena, para a KLT, a IKLT, a GST e a IGST.

A título de ilustração, a Tabela I também apresenta a matriz de covariância da transformada de cor utilizada no padrão JPEG2000, em sua versão sem perdas [2]. É importante citar que a opção do padrão JPEG2000 foi a de utilizar uma transformada com baixa complexidade computacional. De fato, se as bandas 1, 2 e 3 representam as bandas *red, green* e *blue* respectivamente, a transformada é definida por

$$\begin{aligned} Y_1(i,j) &= \lfloor \frac{X_1(i,j) + 2X_2(i,j) + X_3(i,j)}{4} \rfloor \\ Y_2(i,j) &= X_3(i,j) - X_2(i,j) \\ Y_3(i,j) &= X_1(i,j) - X_2(i,j) \end{aligned} \tag{9}$$

Sendo assim, é natural que o resultado da transformação do padrão seja pior que o resultado das demais transformadas inteiras.

TABELA I

MATRIZ DE COVARIÂNCIA DA IMAGEM TRANSFORMADA DA LENA

KLT	IKLT
$\begin{pmatrix} 57,2 & 0 & 0 \\ 0 & 56,5 & 0 \\ 0 & 0 & 5.740 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 57,3 & -0,1 & -0,3 \\ -0,1 & 56,5 & -0,4 \\ -0,3 & -0,4 & 5.738 \end{pmatrix}$
GST	IGST
$\begin{pmatrix} 2.406 & 0 & 0 \\ 0 & 638 & 0 \\ 0 & 0 & 121 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.406 & -1 & -0,1 \\ -1 & 638 & 0 \\ -0,1 & 0 & 121 \end{pmatrix}$
Transformada do JPEG2000	
$\begin{pmatrix} 2.043 & 985 & 354 \\ 985 & 676 & 7,5 \\ 354 & 7,5 & 645 \end{pmatrix}$	

Devido a dificuldade em se apresentar as matrizes de covariância de todas as imagens do conjunto de testes, este trabalho focaliza sua análise no máximo do valor absoluto dos coeficientes de correlação das bandas da imagem transformada. O coeficiente de correlação é definido por

$$\rho(Y_{k_1}(i,j), Y_{k_2}(i,j)) = \frac{< Y_{k_1}(i,j), Y_{k_2}(i,j) >}{||Y_{k_1}(i,j)|| \times ||Y_{k_2}(i,j)||}$$

e mede a dependência linear entre as bandas. O intervalo de variação do valor absoluto dos coeficientes é $[0,1]$, sendo que este assume o valor 0 quando as bandas são descorrelacionadas e quanto maior for o valor absoluto deste coeficiente, maior é a dependência linear entre as bandas. A Tabela II apresenta o máximo dos módulos dos coeficientes de correlação.

TABELA II

COEFICIENTES DE CORRELAÇÃO DAS BANDAS TRANSFORMADAS DAS IMAGENS COLORIDAS

Imagens	IKLT	IGST
airplane	$4,6\ 10^{-4}$	$3,1\ 10^{-4}$
baboon	$4,6\ 10^{-4}$	$7,4\ 10^{-5}$
lena	$5,8\ 10^{-4}$	$7,7\ 10^{-4}$
peppers	$1,4\ 10^{-4}$	$1,0\ 10^{-4}$
sailboat	$1,0\ 10^{-3}$	$9,0\ 10^{-5}$

Através dos resultados apresentados na Tabela II, é possível notar que o máximo do coeficiente de correlação entre as bandas transformadas não ultrapassa $1,0\ 10^{-3}$ para a IKLT e não ultrapassa $7,7\ 10^{-4}$ para a IGST. Estes valores mostram que as duas aproximações inteiras são muito boas. Ainda através dos resultados da Tabela II, é possível observar uma pequena vantagem da IGST em relação à IKLT. Este fato já era de se esperar, visto que a IKLT é obtida a partir de 3 aproximações sucessivas, originadas da fatoração da matriz de transformação em um produto de três matrizes triangulares, enquanto que a IGST não necessita da fatoração e sendo assim a aproximação é realizada em um único passo. No entanto, é importante observar que a maior vantagem da IGST em relação à IKLT está na complexidade computacional reduzida, pois a primeira não precisa realizar a fatoração da matriz.

Além das imagens coloridas, este trabalho avaliou o desempenho da IKLT e da IGST quando aplicadas em imagens de satélite de sensoriamento remoto. As imagens de teste foram construídas a partir de dados coletados pelo Landsat 5, através do sistema TM (*Thematic Mapper*), disponibilizados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE). Cabe ressaltar que este conjunto de teste tem sido utilizado em trabalhos anteriores [9], [10]. Foram construídos dois grupos de imagens. O primeiro é composto por 7 imagens com 3 bandas (bandas 1, 3 e 4 do TM) com resolução de 120 metros por pixel que serão denominadas por "a1", "b1", "c1", "d1", "e1", "f1" e "g1". O segundo grupo é semelhante ao primeiro, exceto pela resolução, que neste caso é de 180 metros por pixel. As imagens com resolução de 180 metros são denominadas "a2", "b2", "c2", "d2", "e2", "f2" e "g2".

A Tabela III apresenta as matrizes de covariância das bandas transformadas da imagem "a2" geradas pela KLT, pela IKLT, pela GST e pela IGST. A Tabela IV apresenta o máximo dos módulos dos coeficientes de correlação para todas as imagens do grupo de teste.

TABELA III

MATRIZ DE COVARIÂNCIA DA IMAGEM TRANSFORMADA DA "A2"

KLT	IKLT
$\begin{pmatrix} 8,25 & 0 & 0 \\ 0 & 44,0 & 0 \\ 0 & 0 & 78,8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8,33 & 0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 43,4 & -0,29 \\ 0,01 & -0,29 & 79,82 \end{pmatrix}$
GST	IGST
$\begin{pmatrix} 17,8 & 0 & 0 \\ 0 & 44,0 & 0 \\ 0 & 0 & 36,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17,8 & 0,14 & 0,23 \\ 0,14 & 44,5 & -0,16 \\ 0,23 & -0,16 & 36,6 \end{pmatrix}$

TABELA IV

COEFICIENTES DE CORRELAÇÃO DAS BANDAS TRANSFORMADAS DAS IMAGENS DE SENSORIAMENTO REMOTO

Imagens	IKLT	IGST
a1	$5,0\ 10^{-2}$	$8,0\ 10^{-3}$
b1	$9,1\ 10^{-4}$	$5,0\ 10^{-4}$
c1	$4,9\ 10^{-2}$	$1,2\ 10^{-2}$
d1	$4,7\ 10^{-2}$	$3,9\ 10^{-2}$
e1	$4,2\ 10^{-2}$	$1,5\ 10^{-2}$
f1	$1,9\ 10^{-3}$	$3,3\ 10^{-3}$
g1	$3,7\ 10^{-3}$	$2,4\ 10^{-3}$
a2	$5,0\ 10^{-3}$	$8,9\ 10^{-3}$
b2	$2,2\ 10^{-3}$	$2,1\ 10^{-4}$
c2	$1,2\ 10^{-2}$	$8,1\ 10^{-3}$
d2	$4,7\ 10^{-2}$	$2,3\ 10^{-2}$
e2	$1,8\ 10^{-2}$	$1,5\ 10^{-2}$
f1	$4,6\ 10^{-3}$	$2,3\ 10^{-3}$
g1	$1,2\ 10^{-3}$	$1,2\ 10^{-3}$

Os resultados apresentados nas Tabelas III e IV, referentes às imagens geradas de dados coletados pelo LANDSAT 5, seguem um comportamento semelhante aos resultados das imagens do tipo RGB. Neste caso, os maiores coeficientes de correlação obtidos para a IKLT foram de $5,0\ 10^{-2}$ para as imagens com resolução de 120 metros por pixel e de $4,7\ 10^{-2}$ para o grupo de imagens com resolução de 180 metros por pixel. Para a IGST, os piores resultados foram de $3,9\ 10^{-2}$ para as imagens do primeiro grupo e de $2,3\ 10^{-2}$ para as imagens do segundo grupo. Estes valores ainda podem ser considerados baixos, o que significa que as aproximações inteiras são boas. Ainda para o grupo de imagens do LANDSAT 5, se observa também uma ligeira vantagem da IGST em relação à IKLT, o que já era esperado devido às mesmas razões apresentadas para as imagens do tipo RGB. Cabe ainda ressaltar novamente que a maior vantagem do sistema apresentado neste trabalho é a menor complexidade computacional.

V. Conclusões

Este trabalho apresentou uma transformada inteira baseada no processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, chamada de IGST. Esta transformada inteira é obtida a partir de uma transformada de Gram-Schmidt (GST) que produz coeficientes reais. A IGST foi implementada em *software* e foi medido o seu desempenho quando esta é utilizada na transformação de imagens do tipo RGB e de imagens construídas a partir de dados coletados do LANDSAT 5. Os resultados obtidos neste trabalho mostraram que o desempenho da IGST é próximo ao desempenho da GST real, sendo que no pior caso, o módulo do coeficiente de correlação entre duas bandas atingiu o valor de $4,7\ 10^{-2}$, ao invés de ser nulo como ocorre na GST. Os resultados obtidos com a IGST também foram comparados com os resultados de uma transformação inteira baseada no procedimento de Kahunen-Loève, proposta por Hao e Shi. Foi observado que além de possuir uma complexidade computacional menor, que é a maior vantagem da IGST em relação à IKLT, a transformada apresentada neste trabalho possui um desempenho ligeiramente superior ao desempenho da IKLT.

Referências

[1] A. Said &, W. A. Pearlman, “An image multiresolution representation for lossless and lossy compression,” IEEE Transactions on Image Processing, vol. 5, pp. 1303-1310, 1996.

[2] D. S. Taubman & M. W. Marcelin, *JPEG2000: Image Compression Fundamentals, Standards and Practice,* Kluwer Academic Publishers, MA, 2001.

[3] P. L. Dragotti, G. Poggi & A. R. P. Ragozini, “Compression of multispectral images by three-dimensional SPIHT algorithm,” IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 38, pp. 416-428, 2000.

[4] P. Hao & Q. Shi, “Matrix factorizations for reversible integer mapping,” IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 49, pp. 2314-2324, 2001.

[5] P. Hao & Q. Shi, “Reversible integer KLT for progressive-to-lossless compression of multiple component images,” Proc. IEEE International Conference on Image Processing, pp. I633-I636, 2003.

[6] T. M. Cover & J. A. Thomas, *Elements of Information Theory,* 2^{nd} Ed., John Wiley & Sons, NJ , 2006.

[7] A. Papoulis & S. U. Pillai, *Probability, random variables, and stochastic processes,* 4^{th} Ed., McGraw-Hill, NY, 2002.

[8] R. C. Gonzales & R. E. Woods, *Digital Image Processing,* 2^{nd} Ed., Prentice-Hall, NJ, 2002

[9] R. D. Azevedo, *Codificação Conjunta, Para Fonte e Canal, Usando Quantização Vetorial Estruturada em Árvore, Para Imagens de Sensoriamento Remoto,* Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio, 2000.

[10] A. Temporal Neto, *Compressão Com Perdas, de Imagens Obtidas por Satélites de Sensoriamento Remoto, Para Transmissão em Canal com Ruído,* Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio, 2000.