

Interpolação Cúbica Adaptativa

Eric Magalhães Delgado

Resumo—Neste artigo, um algoritmo de interpolação cúbica, que adapta o filtro de reconstrução através de propriedades locais da seqüência a ser interpolada, é proposto. A idéia é minimizar uma medida de distorção entre o filtro de reconstrução cúbico e o filtro de reconstrução ideal. Simulações em imagens típicas mostram um ganho quantitativo significativo do algoritmo adaptativo quando comparado com algoritmos clássicos.

Abstract—In this paper, an algorithm of cubic interpolation, that adapts the reconstruction filter through local properties of the sequence to be interpolated, is proposed. The idea is to minimize a measure of distortion between the cubic reconstruction filter and the ideal reconstruction filter. Simulations in typical images show a significant quantitative gain of the adaptative algorithm when compared with classic algorithms.

Palavras-Chave—Reconstrução, Interpolação, Convolução Cúbica.

I. INTRODUÇÃO

Nas operações geométricas de mudança de resolução, rotação ou translação de uma imagem é necessário aplicar conceitos relacionados à reconstrução do sinal contínuo para obtenção da imagem de saída.

A diferença essencial entre os processos de reconstrução e interpolação é que a resolução associada à reconstrução é infinita. Já o processo de interpolação possui uma resolução finita, o que viabiliza sua implementação em sistemas digitais.

Conforme será descrito na Sec. II-B, o filtro de reconstrução cúbico é, na verdade, uma família de filtros de reconstrução em virtude da existência do grau de liberdade na sua definição.

Neste artigo, é proposto um algoritmo de interpolação adaptativo que minimiza uma medida de distorção entre o filtro de interpolação ideal e o filtro de interpolação da família cúbica.

Para avaliar o desempenho do algoritmo adaptativo foram realizados testes em imagens típicas. Para esse caso particular de implementação, a imagem foi dividida em seqüências unidimensionais de forma que cada seqüência seja modelada como resultado de um sistema Auto-Regressivo - AR de 1ª ordem.

II. RECONSTRUÇÃO

A. Descrição

Reconstrução é o processo inverso ao processo de amostragem, ou seja, é o processo de obtenção de uma função contínua $x(s)$ a partir de suas amostras x_k .

A reconstrução perfeita de um sinal $x(s)$ só é possível quando o mesmo é limitado em faixa, ou seja, $X(j\Omega) = 0$ para

Eric Magalhães Delgado estava na Universidade Estadual de Campinas - Unicamp. Agora está na Agência Nacional de Telecomunicações - Anatel. Email: eric.mdelgado@gmail.com

$|\Omega| > \Omega_M$, e o período de amostragem obedece à inequação $T \leq \pi/\Omega_M$.

Sem perdas de generalidades, serão considerados que a frequência máxima de $x(s)$ é $\Omega_M = \pi$ rad/s e que o período de amostragem é $T=1$ s.

A relação entre a função contínua $x(s)$ e suas amostras x_k é dada em (1).

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_r(s-k) \quad (1)$$

sendo $h_r(s)$ o filtro de reconstrução.

Como característica fundamental do processo de reconstrução, os valores do sinal $x(s)$ nas posições inteiras devem coincidir com os valores das amostras da seqüência x_k , isto é, $x(s=k) = x[k]$. Em consequência, o filtro de reconstrução deve possuir $h_r(0) = 1$ e $h_r(\ell) = 0 \forall \ell \in \mathbb{Z}^*$.

Observe que reconstrução é um processo associado a uma resolução infinita, uma vez que é obtido um sinal contínuo na saída. No entanto, na maioria das aplicações, o objetivo é aumentar a resolução de uma seqüência x_k por um fator finito e inteiro L . Na Fig. 1, está representado o processo de interpolação por um fator inteiro L . Inicialmente são inseridas $(L-1)$ amostras nulas entre cada amostra de x_k . A seqüência resultante $x_{e,k}$ é então filtrada para obtenção de y_k , seqüência esta associada a uma resolução L vezes superior à resolução de x_k .

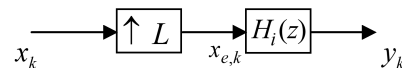


Fig. 1. Interpolação da seqüência x_k por um fator inteiro L .

Uma vez que $X_e(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$, a relação entre as densidades espectrais de potência das seqüências x_k e $x_{e,k}$ é dada em (2).

$$S_{x_e}(e^{j\omega}) = \frac{S_x(e^{j\omega L})}{L} \quad (2)$$

O filtro de interpolação $H_i(z)$ é uma versão discreta do filtro de reconstrução. Ou seja,

$$h_i[k] = h_r(s) \Big|_{s=kT} \quad (3)$$

com período de amostragem $T=(1/L)$.

B. Filtro de Reconstrução Cúbico

O filtro de reconstrução ideal é um filtro passa-baixa com ganho DC unitário e frequência de corte $\Omega_C = \pi$ rad/s. A resposta espacial do filtro de reconstrução ideal é dada em (4).

TABELA I
CONDIÇÕES PARA OBTENÇÃO DOS COEFICIENTES DO FILTRO DE RECONSTRUÇÃO CÚBICO.

Interpolador: $h_C(0)=1$ e $h_C(\ell)=0, \forall \ell \in \mathbb{Z}^*$	$\alpha_{0,0} = 1 \quad (1)$ $\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \alpha_{1,3} = 0 \quad (2)$ $\alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2} + 8\alpha_{1,3} = 0 \quad (3)$
Ganho DC: $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_C(s_0+\ell)=1, \forall s_0 \in \mathbb{R}$	$2 \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\alpha_{0,i} + \alpha_{1,i}}{2^i} \right) = 1 \quad (4)$
Continuidade C0: $\lim_{s \rightarrow s_0^-} h_C(s) = \lim_{s \rightarrow s_0^+} h_C(s) = h_C(s_0), \forall s_0 \in \mathbb{R}$	$\alpha_{0,0} + \alpha_{0,1} + \alpha_{0,2} + \alpha_{0,3} = \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \alpha_{1,3} \quad (5)$ $\alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2} + 8\alpha_{1,3} = 0 \quad (6)$
Continuidade C1: $\lim_{s \rightarrow s_0^-} h'_C(s) = \lim_{s \rightarrow s_0^+} h'_C(s) = h'_C(s_0), \forall s_0 \in \mathbb{R}$	$\alpha_{0,1} + 2\alpha_{0,2} + 3\alpha_{0,3} = \alpha_{1,1} + 2\alpha_{1,2} + 3\alpha_{1,3} \quad (7)$ $\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2} + 12\alpha_{1,3} = 0 \quad (8)$

$$h_B(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}, \quad s \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Conforme (4), h_B possui região de suporte infinita. Em conseqüência, não é realizável. Uma aproximação usual do filtro de reconstrução ideal h_B é obtida a partir de polinômios cúbicos no domínio $(-2, 2)$. Ou seja,

$$h_C(s) = \begin{cases} \alpha_{0,0} + \alpha_{0,1}|s| + \alpha_{0,2}|s|^2 + \alpha_{0,3}|s|^3 & \text{se } |s| < 1 \\ \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}|s| + \alpha_{1,2}|s|^2 + \alpha_{1,3}|s|^3 & \text{se } 1 \leq |s| < 2 \\ 0 & \text{se } |s| \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

Para obtenção dos coeficientes de h_C , supõe-se que h_C é uma função interpoladora, contínua, possui 1ª derivada contínua e ganho DC unitário. Veja a Tab. I.

Observe que são obtidas sete equações linearmente independentes, uma vez que as equações (3) e (6) da Tab. I são iguais. Seja $\alpha_{1,3} = a$. Em conseqüência,

$$h_C(s) = \begin{cases} 1 - (a+3)|s|^2 + (a+2)|s|^3 & \text{se } |s| < 1 \\ -4a + 8a|s| - 5a|s|^2 + a|s|^3 & \text{se } 1 \leq |s| < 2 \\ 0 & \text{se } |s| \geq 2 \end{cases} \quad (6)$$

Uma vez que o parâmetro a é o grau de liberdade de h_C , o filtro de reconstrução cúbico h_C é, na verdade, uma família de filtros de reconstrução.

A transformada de Fourier da família cúbica é dada em (7).

$$H_C(\Omega) = -\frac{4}{\Omega^4} \left[(4a+3)\Omega \sin \Omega + a\Omega \sin 2\Omega + 6(\cos \Omega - 1) + 3a(\cos 2\Omega - 1) \right] \quad (7)$$

Apesar de ser função do parâmetro a , na frequência de corte do filtro, $H_C(\Omega)$ independe de a , assumindo o valor de $48/\pi^4$ (aproximadamente -6 dB). Veja a Fig. 2.

Diferentes conceitos são usados para determinação do parâmetro a .

- Quando $-3 < a < 0$, as concavidades de h_C em $s = 0$ e $s = 1$ são iguais às do filtro de reconstrução ideal h_B [1].

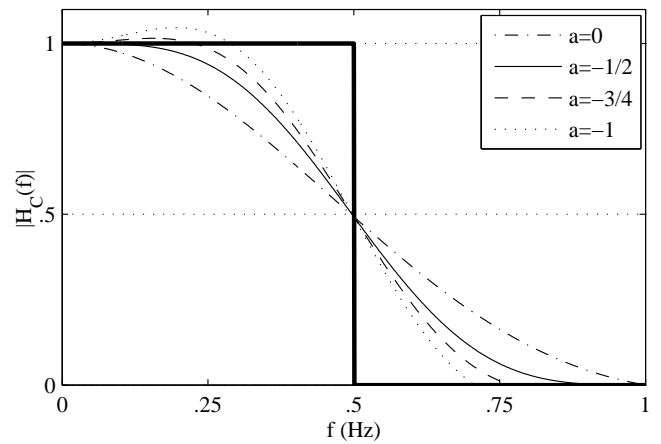


Fig. 2. Resposta espectral de h_C para diversos valores do parâmetro a no domínio $f < 1$ Hz.

- Quando $a = 0$, h_C é associado a apenas dois pontos de suporte, ou seja, cada valor do sinal reconstruído $x(s)$ é função de apenas duas amostras da seqüência x_k . Para qualquer outro valor do parâmetro a , h_C é associado a quatro pontos de suporte.
- Quando $a = -1/2$, h_C reconstrói os três primeiros termos da expansão em série de Taylor do sinal $x(s)$ [2].
- Quando $a = -3/4$, h_C possui 2ª derivada contínua.
- Quando $a = -1$, todos os coeficientes de h_C são números inteiros. Além disso, h_C possui taxa de decaimento em $s = 1$ igual à do filtro de reconstrução ideal h_B .

Na Fig. 2 são mostradas as respostas espectrais de alguns filtros de reconstrução da família cúbica. Observe que, com a diminuição do parâmetro a no intervalo $[-1, 0]$, o filtro possui uma resposta espectral com energia mais concentrada nas baixas frequências. Essa concentração pode levar ao *overshoot* na faixa de passagem, mas proporciona uma melhor resposta espectral na faixa de rejeição.

Para uma análise detalhada dos filtros de reconstrução ver [3-7].

III. INTERPOLAÇÃO CÚBICA ADAPTATIVA

Conforme mencionado na Sec. II-B, diferentes conceitos são usados para determinação do parâmetro a da família cúbica de filtros de reconstrução. Neste contexto, é proposto o valor do parâmetro a que se adapta às características da seqüência x_k de forma a minimizar uma medida de distorção entre os filtros de interpolação h_C e h_B .

Na Sec. III-A, é definida a medida de distorção a ser minimizada e, na Sec. III-B, é descrita uma possível implementação do algoritmo que adapta o parâmetro a da família cúbica no processo de interpolação de seqüência x_k . Neste caso, a seqüência x_k é modelada como resultado de um sistema AR de 1ª ordem.

Para uma análise de outros algoritmos adaptativos de interpolação cúbica ver [10-13].

A. Área de Distorção

O filtro de interpolação $H_i(z)$ pode ser modelado como a soma do filtro de interpolação ideal $H_B(z)$ e de um filtro diferença $\Delta(z)$. Veja a Fig. 3.

O módulo da resposta espectral do filtro diferença é

$$|\Delta(e^{j\omega})| = |H_i(e^{j\omega}) - H_B(e^{j\omega})| \quad (8)$$

Observe na Fig. 3 que a componente $y_{1,k}$ de y_k é a seqüência desejada. Portanto, a componente $y_{2,k}$ de y_k pode ser interpretada como o ruído associado ao processo de interpolação.

Em (9) é definida a Área de Distorção - AD.

$$AD \triangleq \frac{1}{L} \int_{\omega=-\pi}^{\pi} |\Delta(e^{j\omega})|^2 S_x(e^{j\omega L}) d\omega \quad (9)$$

Observe que (9) corresponde à área da densidade espectral de potência da componente y_2 no domínio $|\omega| < \pi$ rad.

O algoritmo adaptativo usa o valor do parâmetro a que minimiza a AD para um dado fator de interpolação L . Ou seja,

$$\frac{\partial AD}{\partial a} = 0 \Rightarrow a = a^* \quad (10)$$

O filtro de interpolação que satisfaz (10) será referenciado como $(a=a^*)h_C$.

Para exemplificar o uso da AD, considere que a seqüência a ser interpolada, x_k , é resultado de um sistema AR de 1ª ordem, cuja a entrada é um ruído branco, e que a densidade espectral de potência da seqüência x_k é dada em (11).

$$S_x(e^{j\omega}) = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos \omega + \rho^2} \sigma_x^2 \quad (11)$$

Na Fig. 4, está o mapeamento entre o parâmetro a que minimiza a AD e o coeficiente de correlação ρ do sistema, obtidos a partir do fator de interpolação $L = 4$.

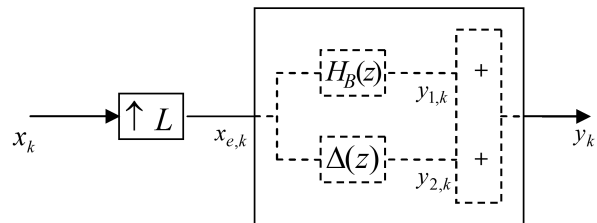


Fig. 3. Diagrama de blocos do processo de interpolação.

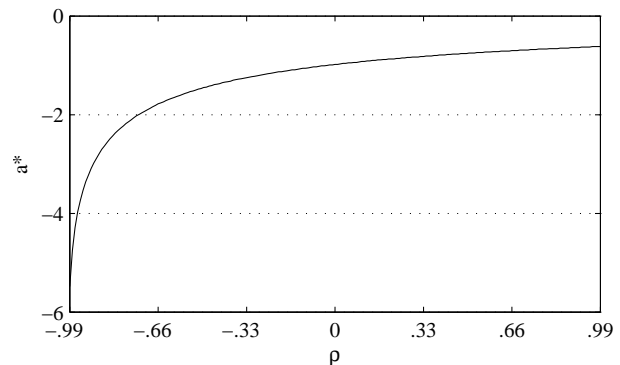


Fig. 4. Valor do parâmetro a da família cúbica que minimiza a AD para um fator de interpolação $L = 4$.

B. Algoritmo

O algoritmo adaptativo implementado no processo de interpolação tem como objetivo explorar a redundância espacial de uma seqüência cuja energia é concentrada nas baixas frequências, como é o caso da maioria das imagens reais.

Regiões de uma imagem cujas variações entre *pixels* vizinhos ocorrem de forma suave podem ser modeladas como saídas de sistemas AR de 1ª ordem com coeficientes de correlação ρ próximos a unidade [8]. No entanto, para regiões que possuem variações abruptas entre *pixels* vizinhos como, por exemplo, regiões repletas de bordas, esse modelo não é adequado para estimar a densidade espectral de potência, mas pode servir como indicativo de que a região possui um conteúdo em altas frequências considerável.

Na Tab.II, estão descritos os passos para adaptação do parâmetro a do filtro de interpolação $(a=a^*)h_C$. É importante observar que esse algoritmo corresponde a uma possível implementação de $(a=a^*)h_C$ para o caso em que a seqüência de entrada x_k é modelada como resposta de um sistema AR de 1ª ordem.

IV. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

A. Metodologia

Com o objetivo de comparar os algoritmos de interpolação quando aplicados a imagens reais, foram realizadas dois diferentes tipos de operações.

- Magnificação: Neste experimento, uma imagem é interpolada por um fator L . Na ausência de uma imagem ideal, uma vez que o filtro de reconstrução ideal definido em (4) não é realizável, a imagem interpolada é então

TABELA II
INTERPOLAÇÃO ADAPTATIVA USANDO FILTROS CÚBICOS.

Adaptação do parâmetro a do filtro de interpolação $(a=a^*)h_C$	
-	Para $k = Lk_0$, trunca-se a seqüência x_k , através de uma janela retangular de comprimento winSize, para obter a seqüência u_k . Ou seja,
$u[k] = \sum_{\ell=-\lfloor \text{winSize}/2 \rfloor}^{\lfloor \text{winSize}/2 \rfloor} x[\ell + k_0] \delta[k - \ell]$	
	Subtrai-se então da seqüência u_k a sua média, de forma a obter uma seqüência com média nula, isto é,
$u_k = u_k - E\{u_k\}$	
-	Se todas as amostras da seqüência u_k são nulas, então $a = -3/4$.
-	Caso contrário , considera-se que u_k é a saída de um sistema AR de 1ª ordem com o ruído branco como entrada, ou seja,
$u[k] = \rho u[k - 1] + \omega[k]$	
	e estima-se o coeficiente de correlação local ρ através do Método de Burg, que minimiza a energia média dos erros direto e reverso.
	A partir de ρ , encontra-se o valor do parâmetro a da família cúbica que minimiza a AD, ou seja, $a = a^*$, e, conseqüentemente, o filtro $h_{k_0} = (a=a^*)h_C$ que será usado para obtenção das L amostras em torno do índice Lk_0 da seqüência de saída y_k .
	Uma vez que para estimar o coeficiente de correlação local é necessário truncar a seqüência x_k através de uma janela retangular de comprimento winSize, o algoritmo de interpolação que adapta o parâmetro a da família cúbica será referenciado como $(a=a^*)h_C^{\text{winSize}}$.

decimada pelo mesmo fator L . Portanto, o filtro de decimação é $H_d(z) = H_i(z)/L$. Veja a Fig. 5.

- **Translação:** Neste experimento, uma imagem é translataada por um vetor \vec{v}_t para um novo grid. Na ausência de uma imagem ideal, a imagem translataada é então retranslada pelo vetor $-\vec{v}_t$, retornando assim ao grid inicial. No final, compara-se as imagens x_k e \hat{x}_k . O diagrama de blocos do experimento é representado na Fig. 6.

Observe que nos experimentos descritos são necessários dois processos, o direto e o reverso, para obtenção da imagem de saída \hat{x}_k . E que a imagem desejada é a imagem de entrada x_k . Essa metodologia possui a vantagem de amplificar o erro de reconstrução inerente aos algoritmos. A medida de distorção utilizada é o Erro Quadrático Médio (MSE - *Mean Squared Error*), sendo definida em (12).

$$\text{MSE} = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} (x_k - \hat{x}_k)^2 \quad (12)$$

Para comparar a qualidade visual associada aos filtros de reconstrução, a imagem módulo do erro e_k , representada nas Figuras 5 e 6, é normalizada da seguinte forma: os *pixels* com intensidade maior do que ξ são representados em preto; os outros, em branco [6]. Veja (13).

$$e_k = \begin{cases} 0 & \text{se } |x_k - \hat{x}_k| > \xi \\ 255 & \text{se } |x_k - \hat{x}_k| \leq \xi \end{cases} \quad (13)$$

onde 0 e 255 representam *pixels* preto e branco, respectivamente, numa imagem monocromática de 8 *bits/pixel*.

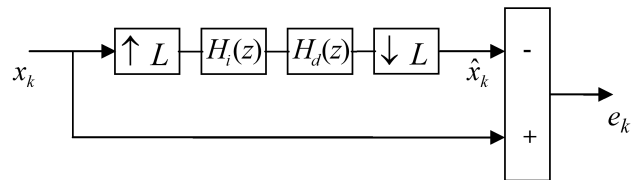


Fig. 5. Experimento de Magnificação por um fator L .

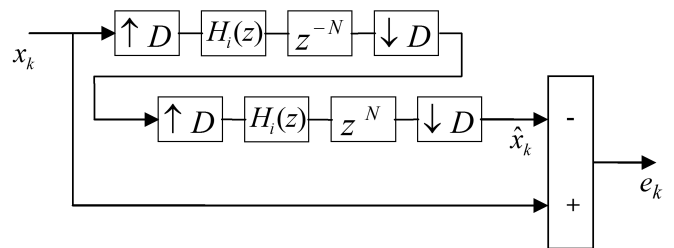


Fig. 6. Experimento de Translação por um vetor $\vec{v}_t = \frac{N}{D}$.

B. Resultados

Na Fig. 7, estão as imagens monocromáticas que foram utilizadas para avaliar o comportamento dos diversos filtros de reconstrução. As imagens possuem resolução de 512×512 *pixels* e 8 *bits/pixel*. Com o objetivo de eliminar os efeitos de borda, apenas os 472×472 *pixels* centrais são considerados no cálculo do MSE.

Nas Tabelas III e IV, estão os resultados associados aos experimentos de magnificação por um fator $L = 4$ e translação por um vetor $\vec{v}_t = (.5, .75)$, respectivamente. Foram inseridos nas Tabelas os resultados obtidos pelos filtros de reconstrução de ordem zero (h_N), ou *Método do Vizinho Mais Próximo*, linear (h_L) e quadrático (h_Q). Este último, proposto por



Fig. 7. Imagens teste com resolução de 512×512 pixels e 8 bits/pixel.

Dogdson em [9].

Observe nas Tabelas III e IV que, dentre os algoritmos clássicos da família cúbica, os melhores resultados são obtidos quando o parâmetro a assume os valores $-3/4$ e -1 . Para imagens repletas de bordas, como as imagens Barbara e Watch, $a = -1$ mostrou ser o valor mais adequado em virtude da maior concentração da energia em baixas frequências. Já para imagens repletas de regiões de textura, $a = -3/4$ mostrou ser o valor mais adequado. No entanto, para todas as imagens, a adaptação do parâmetro a da família cúbica apresentou um ganho significativo em relação aos algoritmos clássicos.

Na Fig 8, estão as imagens erro associadas aos filtros de interpolação $(a=-3/4)h_C$, $(a=-1)h_C$ e $(a=a^*)h_C^{11}$ para o experimento de Magnificação por um fator $L = 4$. Observe que, para $\xi = 10$, a imagem erro do algoritmo adaptativo possui baixa densidade de pixels pretos.

V. CONCLUSÃO

Nos algoritmos clássicos de interpolação, o valor do parâmetro a da família cúbica é constante. Com o objetivo de minimizar o erro inerente a qualquer algoritmo de interpolação realizável, foi proposto um algoritmo que adapta o parâmetro a de acordo com propriedades locais da seqüência a ser interpolada.

Uma possível implementação do algoritmo adaptativo para a classe de seqüências que resultam de um sistema AR de 1ª ordem foi descrita. Simulações em imagens típicas mostram um ganho quantitativo significativo do algoritmo adaptativo quando comparado com algoritmos clássicos.

REFERÊNCIAS

- [1] R. Bernstein, "Digital Image Processing of Earth Observation Sensor Data". *IBM Journal of Research Development*, pp. 40-57. January, 1976.
- [2] R. G. Keys, "Cubic Convolution Interpolation for Digital Image Processing", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP, pp. 1153-1160, 1981.
- [3] J. A. Parker, R. V. Kenyon e D. E. Troxel, "Comparison of interpolation methods for image resampling", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. MI-2, No. 1, pp. 31-39, 1983.
- [4] E. Maelland, "On The Comparison Of Interpolation Methods", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. 7, No. 3, September 1988.
- [5] E. H. W. Meijering, K. J. Zuiderveld e M. A. Viergever, "Image Reconstruction by Convolution with Symmetrical Piecewise n th-Order Polynomial Kernels", *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 8, No. 2, February 1999.
- [6] T. Lehmann, C. Gönner e K. Spitzer, "Survey: Interpolation Methods in Medical Image Processing", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. 18, November 1999.
- [7] P. Thévenaz, T. Blu e M. Unser, "Interpolation Revisited", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2000.
- [8] N. S. Jayant e P. Noll, "Digital Coding of Waveforms", *Prentice-Hall Signal Processing Series*, Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall Inc., 1984.
- [9] N. A. Dogdson, "Quadratic Interpolation for Image Resampling", *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 6, pp. 1322-1326, 1997.
- [10] R. Suntheralingam, "Adaptive Cubic Convolution of High Resolution Remotely Sensed Image Data", *Asian Conference on Remote Sensing*, 1995.
- [11] J. Han e S. Baek, "Parametric Cubic Convolution Scaler for Enlargement and Reduction of Image", *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, Vol. 46, No. 2, pp. 247-256, 2000.
- [12] J. Han e H. Kim, "Modified Cubic Convolution Scaler with Minimum Loss of Information", *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers*, 2001.
- [13] S. E. Khamy, M. M. Hadhoud, M. I. Dessouky, B. M. Salem e F. E. Samie, "An Adaptive Cubic Convolution Image Interpolation Approach", *Machine Graphics & Vision International Journal*, Vol. 14, 2005.

TABELA III
MSE DOS ALGORITMOS DE INTERPOLAÇÃO ASSOCIADOS À OPERAÇÃO DE MAGNIFICAÇÃO POR UM FATOR $L = 4$.

Filtro de Interpolação	Imagem									
	Airplane	Baboon	Barbara	Boat	Bridge	Couple	Goldhill	Lena	Peppers	Watch
h_N	16.37	80.67	65.11	22.58	49.95	26.77	18.75	21.25	14.37	166.09
h_L	8.64	80.87	60.79	14.45	43.46	20.09	14.92	12.42	10.09	161.05
h_Q	4.17	43.01	31.69	7.22	23.06	10.18	7.80	6.36	5.61	85.61
$(a=0)h_C$	6.00	56.99	42.83	10.02	30.69	13.94	10.44	8.78	7.29	113.52
$(a=-1/2)h_C$	1.86	29.32	17.89	3.97	15.40	6.17	5.17	3.57	4.15	57.90
$(a=-3/4)h_C$	1.29	20.97	9.75	2.63	11.16	4.39	3.73	2.60	3.35	41.16
$(a=-1)h_C$	2.31	19.87	8.00	3.18	11.20	4.95	3.74	3.49	3.45	38.27
$(a=a^*)h_C^{11}$	1.26	19.12	4.93	2.46	10.66	4.29	3.52	2.48	3.22	34.54

TABELA IV
MSE DOS ALGORITMOS DA FAMÍLIA CÚBICA ASSOCIADOS À OPERAÇÃO DE TRANSLAÇÃO POR UM VETOR $\vec{v}_t = (.5, .75)$.

Filtro de Interpolação	Imagem									
	Airplane	Baboon	Barbara	Boat	Bridge	Couple	Goldhill	Lena	Peppers	Watch
h_N	137.73	818.08	258.55	120.92	422.82	195.10	139.09	108.16	100.25	1304.96
h_L	16.43	161.60	93.11	23.70	80.10	37.22	26.86	21.02	17.34	290.96
h_Q	11.81	139.73	47.97	12.78	62.19	26.41	19.17	13.50	13.53	218.50
$(a=0)h_C$	13.63	148.20	63.54	16.59	68.62	30.25	21.80	16.36	14.93	243.76
$(a=-1/2)h_C$	4.30	82.91	24.17	5.96	35.31	13.92	10.84	6.86	8.52	128.51
$(a=-3/4)h_C$	3.07	62.96	12.48	4.03	26.48	10.21	8.02	5.14	6.96	94.41
$(a=-1)h_C$	5.43	60.11	13.18	5.80	27.24	11.44	8.40	7.06	7.31	87.96
$(a=a^*)h_C^{11}$	3.01	57.11	8.64	3.84	25.71	10.07	7.59	4.89	6.79	80.15

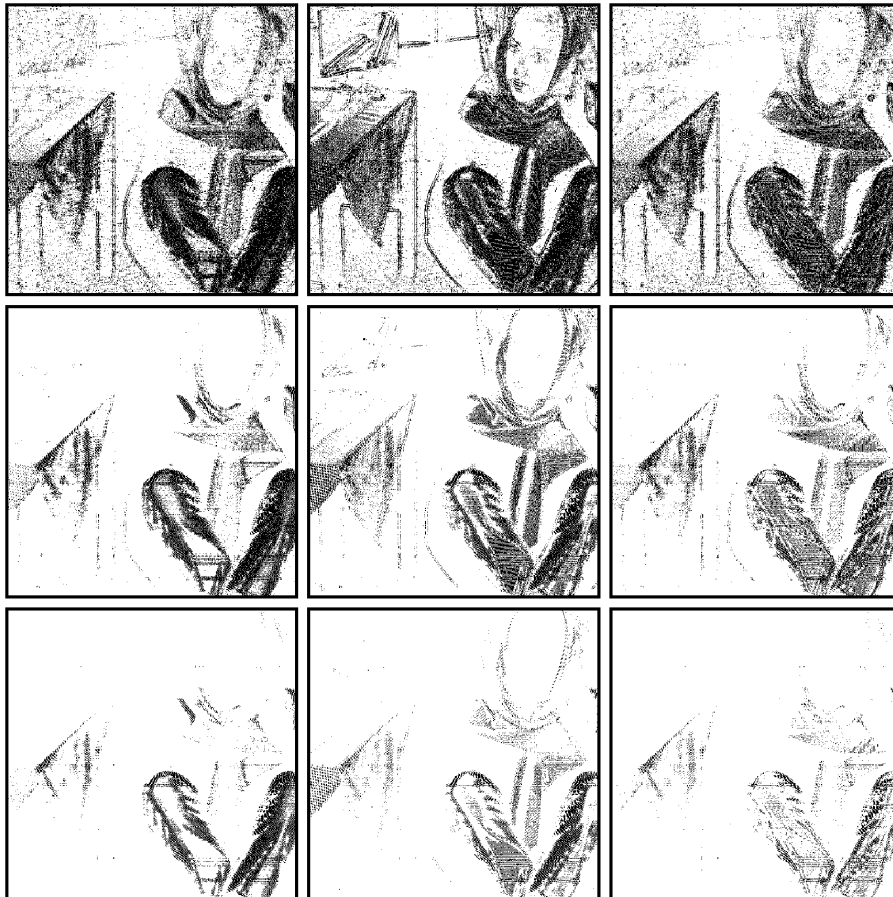


Fig. 8. Imagens erro para o experimento de Magnificação por um fator $L = 4$. Da esquerda para a direita, seguem as imagens erro obtidas a partir dos filtros de interpolação $(a=-3/4)h_C$, $(a=-1)h_C$ e $(a=a^*)h_C^{11}$ para $\xi = 1, 5$ e 10 , respectivamente.