

# Taxa de Cruzamento de Nível e Duração Média de Desvanecimento para Canais $\alpha$ - $\mu$ usando Técnicas de Combinação por Diversidade

Daniel Benevides da Costa, *Student Member, IEEE*, Michel Daoud Yacoub e José Cândido Silveira Santos Filho

**Resumo**—Este artigo apresenta expressões para a taxa de cruzamento de nível e duração média de desvanecimento de combinadores multirramos por seleção pura, ganho igual e razão máxima operando em canais de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  (também chamados Gama generalizados) independentes e não-idênticos. As expressões são obtidas em forma fechada, para combinadores por seleção pura, e na forma integral, para combinadores por ganho igual e razão máxima. Para estes dois últimos cenários de combinação, aproximações precisas e em forma fechada são propostas. Os resultados analíticos são validados reduzindo as expressões gerais para casos particulares conhecidos e por meio de simulação.

**Palavras-Chave**—Métodos de aproximação, duração média de desvanecimento, técnicas de diversidade, canais de desvanecimento generalizados, taxa de cruzamento de nível.

**Abstract**—This paper derives exact expressions for the level crossing rate and average fade duration of multibranch pure-selection, equal-gain, and maximal-ratio combiners operating over independent non-identical  $\alpha$ - $\mu$  (also called generalized Gamma or Stacy) fading channels. The derived expressions are in closed form for pure-selection combining and in integral form for equal-gain and maximal-ratio combining. For the two latter schemes, accurate closed-form approximations are then provided. The analytical results are validated by reducing the general expressions to known particular cases and, more generally, by means of simulation.

**Keywords**—Approximation methods, average fade duration, diversity methods, generalized fading channels, level crossing rate.

## I. INTRODUÇÃO

O modelo de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  foi recentemente proposto em [1], [2] levando em consideração dois importantes fenômenos inerentes à radiopropagação, que são a não-linearidade e a influência do número de *clusters*. Além de sua flexibilidade e simplicidade matemática, o modelo provê um bom ajuste a medidas de campo, como demonstrado em inúmeras campanhas de medição. A distribuição que rege este modelo, distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , é escrita em termos de parâmetros físicos,  $\alpha$  e  $\mu$ , que descrevem a não-linearidade do meio de propagação e o número de *clusters* de ondas de multipercorso, respectivamente. Esta distribuição é também como Gama generalizada ou Stacy [1], [2].

Daniel Benevides da Costa, Michel Daoud Yacoub e José Cândido Silveira Santos Filho, Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, E-mails: daniel@wisstek.org, michel@wisstek.org, candido@wisstek.org. Este trabalho foi parcialmente financiado pela FAPESP (05/59259-7).

Em sistemas sem fio, a envoltória do sinal recebido varia aleatoriamente devido ao desvanecimento por multipercorso, e técnicas de diversidade são geralmente utilizadas para combater esta variação aleatória do nível de sinal. A taxa de cruzamento de nível (LCR) e a duração média de desvanecimento (AFD) são métricas importantes que avaliam o desempenho dinâmico de sistemas de diversidade. Por esta razão, tais métricas têm sido amplamente investigadas na literatura para os canais de desvanecimento mais conhecidos [3], [4], [5], [6]. Um dos propósitos deste artigo é obter expressões exatas para a LCR e AFD de combinadores multirramos por ganho igual e por razão máxima operando em canais de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  independentes e não-idênticos. Devido à dificuldade inerente da formulação exata, no qual a LCR e AFD são expressas em termos de múltiplas integrais, aproximações precisas e em forma fechada são propostas para tais métricas. Como será visto através de resultados numéricos, as diferenças entre as curvas exatas e aproximadas são imperceptíveis. Além disso, baseando em alguns resultados da literatura, expressões simples e em forma fechada para a LCR e AFD usando a técnica combinação por seleção pura (PSC) são obtidas. Os resultados analíticos apresentados são validados reduzindo as expressões gerais para alguns casos particulares, no qual as soluções são conhecidas, e por meio de simulação.

Este artigo está estruturado da seguinte forma. A Seção II apresenta o modelo de desvanecimento para canais  $\alpha$ - $\mu$  e introduz algumas estatísticas importantes utilizadas ao longo do artigo. Na Seção III são obtidas expressões para a LCR e AFD de canais de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  usando as técnicas PSC, combinação por ganho igual (EGC) e combinação por razão máxima (MRC). Como para as técnicas EGC e MRC as soluções exatas são dadas em termos de múltiplas integrais, na Seção IV são propostas aproximações simples e em forma fechada para a LCR e AFD de tais métricas. Na Seção V são plotados alguns resultados numéricos e finalmente na Seção VI concluímos o artigo. Um Apêndice no final do artigo mostra a dedução da variância da função densidade de probabilidade (PDF) condicional das envoltórias na entrada do combinador.

## II. O MODELO DE DESVANECIMENTO $\alpha$ - $\mu$

Nesta seção, o modelo de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  proposto em [1], [2] será revisto. A condição de propagação  $\alpha$ - $\mu$  considera um sinal composto por *clusters* de ondas de multipercorso em um ambiente não-homogêneo. Dentro de cada um dos *clusters*, as fases das ondas espalhadas são aleatórias, com o espalhamento dos atrasos dos diversos *clusters* sendo relativamente

grande. Além disso, os *clusters* de ondas de multipercurso possuem ondas espalhadas com potências idênticas. A envoltória resultante é obtida como uma função não-linear do módulo da soma das componentes de multipercurso. Tal não-linearidade é manifestada em termos de um parâmetro de potência, tal que a intensidade do sinal resultante é obtida não apenas como o módulo da soma das componentes de multipercurso, mas como este módulo elevado a um certo expoente.

Assumindo que o sinal recebido no  $i$ -ésimo ramo ( $i = 1, \dots, M$ ) inclui um certo número  $n_i$  de *clusters* de multipercurso, a envoltória  $\alpha$ - $\mu$  resultante  $R_i$  no  $i$ -ésimo ramo é escrita como [1], [2]

$$R_i^{\alpha_i} = \sum_{l=1}^{n_i} (X_{il}^2 + Y_{il}^2), \quad (1)$$

onde  $\alpha_i > 0$  é o parâmetro de potência,  $X_{il}$  e  $Y_{il}$  são processos gaussianos mutuamente independentes de médias nula com variâncias idênticas  $V(X_{il}) = V(Y_{il}) = \sigma_i^2$ , onde  $V(\cdot)$  denota o operador variância. A PDF de  $R_i$  é dada por [1], [2]

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{\alpha_i \mu_i^{\mu_i} r_i^{\alpha_i \mu_i - 1}}{\hat{r}_i^{\alpha_i \mu_i} \Gamma(\mu_i)} \exp\left(-\mu_i \frac{r_i^{\alpha_i}}{\hat{r}_i^{\alpha_i}}\right), \quad (2)$$

onde  $\hat{r}_i = \sqrt[\alpha_i]{E(R_i^{\alpha_i})} = \sqrt[\alpha_i]{2\mu_i \sigma_i^2}$  é o valor médio da raiz  $\alpha_i$ -ésima de  $R_i^{\alpha_i}$ ,  $E(\cdot)$  denota o operador esperança,  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt$  é a função Gama, e  $\mu_i > 0$  é a extensão real do parâmetro  $n_i$ , dado pelo inverso da variância normalizada de  $R_i^{\alpha_i}$ , isto é,

$$\mu_i = \frac{E^2(R_i^{\alpha_i})}{V(R_i^{\alpha_i})}. \quad (3)$$

Para  $\mu_i = 1$ , (2) reduz a PDF de Weibull, enquanto para  $\alpha_i = 2$  reduz-se a PDF de Nakagami- $m$ . A partir de (2), o  $k$ -ésimo momento  $E(R_i^k)$  pode ser expresso como

$$E(R_i^k) = \hat{r}_i^k \frac{\Gamma(\mu_i + k/\alpha_i)}{\mu_i^{k/\alpha_i} \Gamma(\mu_i)}. \quad (4)$$

A função de distribuição cumulativa (CDF)  $F_{R_i}(\cdot)$  de  $R_i$  é dada por [1], [2]

$$F_{R_i}(r_i) = \frac{\Gamma(\mu_i, \mu_i r_i^{\alpha_i} / \hat{r}_i^{\alpha_i})}{\Gamma(\mu_i)}, \quad (5)$$

onde  $\Gamma(z, y) = \int_0^y t^{z-1} \exp(-t) dt$  é a função Gama incompleta.

Para espalhamento isotrópico, as derivadas temporais  $\dot{X}_{il}$  e  $\dot{Y}_{il}$  de  $X_{il}$  e  $Y_{il}$ , respectivamente, são variáveis gaussianas de médias nula e variâncias  $\sigma_{\dot{r}_i}^2 = 2\pi^2 f_m^2 \sigma_i^2$  [7], onde  $f_m$  é o desvio Doppler máximo em Hz. Conseqüentemente, baseado em (1), a PDF condicional  $f_{\dot{R}_i|R_i}(\cdot|\cdot)$  da derivada temporal de  $R_i$ , expressa por  $\dot{R}_i$ , dado  $R_i$ , é escrita como

$$f_{\dot{R}_i|R_i}(\dot{r}_i|r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{R}_i}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{r}_i}{\sigma_{\dot{R}_i}}\right)^2\right), \quad (6)$$

no qual  $\sigma_{\dot{R}_i}^2 = \frac{r_i^{2-\alpha_i}}{\alpha_i^2 \mu_i} \Omega_i 4\pi^2 f_m^2$  (ver Apêndice I) e  $\Omega_i = \hat{r}_i^{\alpha_i}$ . Tais resultados foram obtidos e usados em [2] para calcular a

LCR  $N_{R_i}(r)$  e AFD  $T_{R_i}(r)$  da envoltória  $\alpha$ - $\mu$   $R_i$ , ou seja,

$$N_{R_i}(r) = \frac{\sqrt{2\pi} f_m r^{\alpha_i(\mu_i-1/2)} \mu_i^{\mu_i-1/2}}{\Gamma(\mu_i) \Omega_i^{\mu_i-1/2}} \exp\left(-\frac{\mu_i r^{\alpha_i}}{\Omega_i}\right), \quad (7)$$

$$T_{R_i}(r) = \frac{\Gamma(\mu_i, \mu_i r^{\alpha_i} / \Omega_i) \Omega_i^{\mu_i-1/2}}{\sqrt{2\pi} f_m r^{\alpha_i(\mu_i-1/2)} \mu_i^{\mu_i-1/2}} \exp\left(\frac{\mu_i r^{\alpha_i}}{\Omega_i}\right). \quad (8)$$

### III. TAXA DE CRUZAMENTO DE NÍVEL E DURAÇÃO MÉDIA DE DESVANECIMENTO

A LCR é definida como o número médio de cruzamentos do sinal por segundo em um dado nível, na direção positiva ou negativa. Sendo  $\dot{R}$  a derivada temporal da envoltória  $R$  e  $r$  o nível de cruzamento, a LCR é estimada como [6]

$$N_R(r) = \int_0^\infty \dot{r} f_{R,\dot{R}}(r, \dot{r}) d\dot{r}, \quad (9)$$

onde  $f_{R,\dot{R}}(\cdot, \cdot)$  é a PDF conjunta de  $R$  e  $\dot{R}$ . A AFD é definida como o tempo médio que a envoltória recebida permanece abaixo de um dado limiar  $r$  após cruzá-lo na direção negativa, sendo expresso por

$$T_R(r) = \frac{F_R(r)}{N_R(r)}, \quad (10)$$

onde  $F_R(\cdot)$  é a CDF de  $R$ . Nas seções seguintes,  $R$  e  $\dot{R}$  representam a envoltória na saída do combinador e sua derivada temporal, respectivamente.

#### A. Combinação por Seleção Pura

Em PSC, os sinais recebidos são continuamente monitorados tal que o melhor sinal é selecionado. Dessa forma, a envoltória na saída do combinador  $R$  pode ser escrita como

$$R = \max_{i=1, \dots, M} \{R_i\}. \quad (11)$$

Em [8], uma formulação geral para sistemas PSC operando com canais de desvanecimento independentes foi apresentada, como descrita abaixo

$$N_R(r) = \sum_{i=1}^M N_{R_i}(r) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M F_{R_j}(r). \quad (12)$$

Neste caso,  $F_{R_j}(\cdot)$  e  $N_{R_i}(\cdot)$  são dados por (5) e (7), respectivamente. Da mesma forma, desde que para ramos independentes a seguinte relação  $F_R(r) = \prod_{i=1}^M F_{R_i}(r)$  é válida, substituindo isso e (12) em (10), e após manipulações algébricas, pode ser mostrado que

$$T_R^{-1}(r) = \sum_{i=1}^M T_{R_i}^{-1}(r), \quad (13)$$

onde  $T_{R_i}(r)$  é dado por (8). Vale a pena ressaltar que (13) é de fato geral e se aplica a qualquer cenário de desvanecimento com ramos independentes.

1) *Combinação por Ganho Igual*: Em EGC, os sinais recebidos com envoltórias  $R_i$  são cofasados e adicionados tal que a envoltória na saída do combinador  $R$ , já levando em conta a potência do ruído resultante na saída do combinador, é escrita como

$$R = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M R_i. \quad (14)$$

Diferenciando ambos os lados de (14), temos

$$\dot{R} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M \dot{R}_i. \quad (15)$$

Em [5], [10], foi mostrado que  $f_{R,\dot{R}}(\cdot, \cdot)$  pode ser escrito em termos da PDF conjunta de  $R_1, \dots, R_M$  e  $\dot{R}$  como

$$f_{R,\dot{R}}(r, \dot{r}) = \sqrt{M} \int_0^{\sqrt{Mr}} \int_0^{\sqrt{Mr-r_M}} \dots \int_0^{\sqrt{Mr-\sum_{i=3}^M r_i}} f_{R_1, R_2, \dots, R_M, \dot{R}} \left( \left( \sqrt{Mr} - \sum_{i=2}^M r_i \right), r_2, \dots, r_M, \dot{r} \right) dr_2 \dots dr_M. \quad (16)$$

Usando propriedades da teoria de probabilidade [9], temos que

$$f_{R_1, R_2, \dots, R_M, \dot{R}}(r_1, r_2, \dots, r_M, \dot{r}) = f_{\dot{R}|R_1, R_2, \dots, R_M}(\dot{r}|r_1, r_2, \dots, r_M) \times f_{R_1, \dots, R_M}(r_1, \dots, r_M). \quad (17)$$

Devido os ramos serem assumidos independentes, então a PDF conjunta das envoltórias de entrada pode ser escrita como o produto das PDFs marginais, ou seja,

$$f_{R_1, \dots, R_M}(r_1, \dots, r_M) = \prod_{i=1}^M f_{R_i}(r_i), \quad (18)$$

onde cada  $f_{R_i}(\cdot)$  é dado por (2). Por outro lado, a partir de (15), perceba que

$$f_{\dot{R}|R_1, R_2, \dots, R_M}(\dot{r}|r_1, r_2, \dots, r_M) \sim N \left( 0, \sum_{i=1}^M \sigma_{\dot{R}_i}^2 / M \right), \quad (19)$$

com  $\sigma_{\dot{R}_i}^2 = \frac{r_i^{2-\alpha_i}}{\alpha_i^2 \mu_i} \Omega_i 4\pi^2 f_m^2$  (ver Apêndice I) e onde  $N(a, b)$  representa uma distribuição gaussiana de média  $a$  e variância  $b$ . Agora, com (17), (18) e (19) em (16), e então substituindo isto em (9), segue, após manipulações algébricas, que

$$N_R(r) = \sqrt{2\pi} f_m \int_0^{\sqrt{Mr}} \int_0^{\sqrt{Mr-r_M}} \dots \int_0^{\sqrt{Mr-\sum_{i=3}^M r_i}} \frac{\left( \sqrt{Mr} - \sum_{i=2}^M r_i \right)^{2-\alpha_1} \Omega_1}{\alpha_1^2 \mu_1} + \sum_{i=2}^M \frac{r_i^{2-\alpha_i} \Omega_i}{\alpha_i^2 \mu_i} \times f_{R_1} \left( \sqrt{Mr} - \sum_{i=2}^M r_i \right) \prod_{i=2}^M f_{R_i}(r_i) dr_2 \dots dr_{M-1} dr_M. \quad (20)$$

Para calcular a AFD, falta encontrarmos a CDF  $F_R(\cdot)$  de  $R$ . Isso pode ser feito integrando a PDF conjunta

$f_{R_1, \dots, R_M}(\cdot, \dots, \cdot)$  de  $R_i$  sobre o volume  $M$ -dimensional limitado pelo hiperplano  $\sqrt{Mr} = \sum_{i=1}^M r_i$  e suas coordenadas. Usando um procedimento similar ao aplicado em [5], [10], segue que

$$F_R(r) = \int_0^{\sqrt{Mr}} \int_0^{\sqrt{Mr-r_M}} \dots \int_0^{\sqrt{Mr-\sum_{i=3}^M r_i}} \int_0^{\sqrt{Mr-\sum_{i=2}^M r_i}} f_{R_1, \dots, R_M}(r_1, \dots, r_M) dr_1 dr_2 \dots dr_{M-1} dr_M. \quad (21)$$

Substituindo (20) e (21) em (10), a AFD é obtida.

### B. Combinação por Razão Máxima

Em MRC, os sinais recebidos são cofasados, cada sinal é amplificado apropriadamente por combinação ótima e os sinais resultantes são então adicionados tal que a envoltória  $R$ , na saída do combinador, é dada por

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^M R_i^2}. \quad (22)$$

A derivada temporal  $\dot{R}$  de  $R$  pode ser expressa como

$$\dot{R} = \sum_{i=1}^M \frac{R_i}{R} \dot{R}_i. \quad (23)$$

A análise para MRC segue o mesmo raciocínio à realizada para EGC, porém o hiperplano usado para o cálculo das estatísticas é  $r^2 = \sum_{i=1}^M r_i^2$ . Segue então que

$$f_{R,\dot{R}}(r, \dot{r}) = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-r_M^2}} \dots \int_0^{\sqrt{r^2-\sum_{i=3}^M r_i^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2-\sum_{i=2}^M r_i^2}} \times f_{R_1, R_2, \dots, R_M, \dot{R}} \left( \left( \sqrt{r^2 - \sum_{i=2}^M r_i^2} \right), r_2, \dots, r_M, \dot{r} \right) dr_2 \dots dr_M, \quad (24)$$

$$F_R(r) = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-r_M^2}} \dots \int_0^{\sqrt{r^2-\sum_{i=3}^M r_i^2}} \int_0^{\sqrt{r^2-\sum_{i=2}^M r_i^2}} \prod_{i=1}^M f_{R_i}(r_i) dr_1 dr_2 \dots dr_{M-1} dr_M, \quad (25)$$

e, a partir de (23),

$$f_{\dot{R}|R_1, R_2, \dots, R_M}(\dot{r}|r_1, r_2, \dots, r_M) \sim N \left( 0, \sum_{i=1}^M r_i^2 \sigma_{\dot{R}_i}^2 / r^2 \right), \quad (26)$$

tal que, usando (17) e (18), temos

$$\begin{aligned}
 N_R(r) &= \sqrt{2\pi} f_m \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-r_M^2}} \dots \int_0^{\sqrt{r^2-\sum_{i=3}^M r_i^2}} \\
 &\frac{1}{\sqrt{r^2-\sum_{i=2}^M r_i^2}} \sqrt{\frac{(r^2-\sum_{i=2}^M r_i^2)^{\frac{4-\alpha_1}{2}} \Omega_1}{\alpha_1^2 \mu_1} + \sum_{i=2}^M \frac{r_i^{4-\alpha_i} \Omega_i}{\alpha_i^2 \mu_i}} \\
 &\times f_{R_1} \left( \sqrt{r^2-\sum_{i=2}^M r_i^2} \right) \prod_{i=2}^M f_{R_i}(r_i) dr_2 \dots dr_{M-1} dr_M.
 \end{aligned} \quad (27)$$

Substituindo (27) e (25) em (10), a AFD é obtida.

#### IV. APROXIMAÇÕES EM FORMA FECHADA

As formulações desenvolvidas nas seções anteriores são gerais e exatas. Por outro lado, exceto para aqueles casos especiais para os quais expressões em forma fechada são encontradas (não mostradas aqui devido a limitação de espaço), soluções dadas em função de múltiplas integrais podem não ser tão interessantes do ponto de vista computacional. Sendo assim, é certamente desejável encontrar aproximações precisas que possam ser utilizadas para substituir tais integrais. Em [11], foi mostrado que a soma de variáveis Weibull pode ser aproximada por uma variável  $\alpha$ - $\mu$ . Aqui, com o intuito de obter aproximações simples e em forma fechada para a LCR e AFD de sistemas EGC e MRC em canais de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$ , nós estendemos a idéia apresentada em [11] aproximando a soma de processos aleatórios  $\alpha$ - $\mu$  por um outro processo aleatório  $\alpha$ - $\mu$ . A motivação para isso vem do fato de que a soma de potências  $\alpha$ - $\mu$  segue também uma distribuição  $\alpha$ - $\mu$ . Sendo mais claro, assumindo que  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  são variáveis  $\alpha$ - $\mu$  i.i.d. (i.i.d., do inglês *independent identically distributed*) com parâmetros  $\alpha$ ,  $\mu$  e  $\hat{r}$ , então, a partir do modelo proposto,  $Z^\alpha = \sum_{i=1}^M Z_i^\alpha$  é também distribuído  $\alpha$ - $\mu$  com parâmetros  $\alpha$ ,  $\mu M$  e  $\sqrt[\alpha]{\hat{r}^\alpha M}$ .

Nossa proposta é então aproximar a LCR e a AFD exatas de sistemas EGC e MRC obtidas na seção anterior pela LCR e AFD de uma dada variável  $\alpha$ - $\mu$ , isto é [1], [2]

$$N_R(r) \approx \frac{\sqrt{2\pi} f_m r^{\alpha(\mu-1/2)} \mu^{\mu-1/2}}{\Gamma(\mu) \Omega^{\mu-1/2}} \exp\left(-\frac{\mu r^\alpha}{\Omega}\right), \quad (28)$$

$$T_R(r) \approx \frac{\Gamma(\mu, \mu r^\alpha / \Omega) \Omega^{\mu-1/2}}{\sqrt{2\pi} f_m r^{\alpha(\mu-1/2)} \mu^{\mu-1/2}} \exp\left(\frac{\mu r^\alpha}{\Omega}\right), \quad (29)$$

onde os parâmetros das fórmulas aproximadas, designados por  $\alpha$ ,  $\mu$ , and  $\Omega$  tem que ser obtidos para a aplicação apropriada. Perceba que (28) e (29) têm a mesma forma funcional de (7) e (8), respectivamente. Dessa forma, com o objetivo de tornar (28) e (29) boas aproximações, serão usados estimadores baseados em momentos para o cálculo de  $\alpha$ ,  $\mu$  e  $\Omega$ , como segue.

#### A. Combinação por Ganho Igual

Assuma, inicialmente, o conhecimento de  $E(R)$ ,  $E(R^2)$  e  $E(R^4)$ . Então, estimadores baseados em momentos para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\mu$  e  $\Omega$  podem ser escritos baseados em [1], [2] como

$$\frac{\Gamma^2(\mu+1/\alpha)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+2/\alpha)-\Gamma^2(\mu+1/\alpha)} = \frac{E^2(R)}{E(R^2)-E^2(R)}, \quad (30)$$

$$\frac{\Gamma^2(\mu+2/\alpha)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+4/\alpha)-\Gamma^2(\mu+2/\alpha)} = \frac{E^2(R^2)}{E(R^4)-E^2(R^2)}, \quad (31)$$

$$\Omega = \left[ \frac{\mu^{1/\alpha} \Gamma(\mu) E(R)}{\sqrt{M} \Gamma(\mu+1/\alpha)} \right]^\alpha. \quad (32)$$

O sistema de equações transcendentais (30) e (31) têm que ser resolvidos numericamente para  $\alpha$  e  $\mu$ . A maioria dos *softwares* de computadores possuem suas próprias rotinas que realizam esta tarefa de forma rápida e eficiente. Em *MATHEMATICA*, por exemplo, a função FindRoot pode ser usada para isso. Tendo obtido os parâmetros  $\alpha$  e  $\mu$ ,  $\Omega$  é estimado através de (32).

Contudo, ainda temos que encontrar os momentos exatos  $E(R)$ ,  $E(R^2)$  e  $E(R^4)$  requeridos em (30), (31) e (32), que foram assumidos conhecidos. Para isso, usando expansão multinomial, estes momentos são obtidos a partir de (14) em termos de cada um dos momentos individuais  $\alpha$ - $\mu$  como [11]

$$\begin{aligned}
 E(R^n) &= \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^{n_1} \dots \sum_{n_{M-1}=0}^{n_{M-2}} \binom{n}{n_1} \binom{n_1}{n_2} \dots \binom{n_{M-2}}{n_{M-1}} \\
 &E(R_1^{n-n_1}) E(R_2^{n_1-n_2}) \dots E(R_M^{n_{M-1}}), \quad (33)
 \end{aligned}$$

onde os momentos  $\alpha$ - $\mu$  requeridos são dados em (4).

#### B. Combinação por Razão Máxima

Assim como para o caso EGC, nós propomos aproximar a LCR e AFD de  $R$  pela LCR e AFD da envoltória  $\alpha$ - $\mu$  dado em (28) e (29), respectivamente. Perceba que como a técnica MRC consiste da soma de envoltórias ao quadrado, os estimadores são modificados tais que as condições de contorno sejam satisfeitas. Então, de [1], [2], chega-se a

$$\frac{\Gamma^2(\mu+2/\alpha)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+4/\alpha)-\Gamma^2(\mu+2/\alpha)} = \frac{E^2(R^2)}{E(R^4)-E^2(R^2)}, \quad (34)$$

$$\frac{\Gamma^2(\mu+4/\alpha)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+8/\alpha)-\Gamma^2(\mu+4/\alpha)} = \frac{E^2(R^4)}{E(R^8)-E^2(R^4)}, \quad (35)$$

$$\Omega = \left[ \frac{\mu^{2/\alpha} \Gamma(\mu) E(R^2)}{\Gamma(\mu+2/\alpha)} \right]^{\alpha/2}. \quad (36)$$

Novamente, por expansão multinomial, os momentos exatos  $E(R^2)$ ,  $E(R^4)$  e  $E(R^8)$  requeridos em (34), (35) e (36) podem ser encontrados a partir de (22) como

$$\begin{aligned}
 E(R^{2n}) &= \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^{n_1} \dots \sum_{n_{M-1}=0}^{n_{M-2}} \binom{n}{n_1} \binom{n_1}{n_2} \dots \binom{n_{M-2}}{n_{M-1}} \\
 &E(R_1^{2(n-n_1)}) E(R_2^{2(n_1-n_2)}) \dots E(R_M^{2(n_{M-1})}). \quad (37)
 \end{aligned}$$

V. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, alguns gráficos ilustram as expressões aqui obtidas. A validade das mesmas é feita comparando as curvas teóricas com os resultados de simulação. Como será observado, há uma excelente concordância entre os resultados teóricos e os simulados. Além disto, outros resultados numéricos são plotados com o intuito de mostrar o bom ajuste das aproximações propostas.

Com o intuito de comparar as formulações exata e aproximada, Fig. 1, para o caso EGC, e Fig. 2, para o caso MRC, traçam a LCR normalizada (eixo da esquerda),  $N_R(r)/f_m$ , e AFD (eixo da direita),  $T_R(r)f_m$ , como função da envoltória. As curvas foram plotadas para  $M = 4$ ,  $\alpha_i = 1.5$  (caso EGC) e  $\alpha_i = 2.5$  (caso MRC), variando o parâmetro  $\mu_i$ . Note como as aproximações propostas produzem resultados muito bons, sendo verificado pela diferença mínima entre as curvas exatas e aproximadas. De fato, ambas as curvas são coincidentes para  $\alpha_i = 1$  (caso EGC) e  $\alpha_i = 2$  (caso MRC), independente do valor assumido por  $\mu_i$ . Ressalta-se que, quando  $\alpha_i$  aumenta (de 1 a  $\infty \rightarrow$  EGC, ou de 2 a  $\infty \rightarrow$  MRC) ou  $\alpha_i$  diminui (de 1 a 0  $\rightarrow$  EGC, ou de 2 a 0  $\rightarrow$  MRC), a diferença entre as curvas exatas e aproximadas aumenta, mas de uma maneira suave, de forma que um bom ajuste ainda é garantido. Tal comportamento não é mostrado nas figuras devido as mesmas serem traçadas para um único valor de  $\alpha_i$  ( $\alpha_i = 1.5 \rightarrow$  EGC,  $\alpha_i = 2.5 \rightarrow$  MRC). Além disso, para altos valores do parâmetro  $\mu_i$ ,  $\alpha_i$  pode ter um intervalo de variação ainda maior tal que uma ótima aproximação é ainda mantida.

As Figuras 3 e 4 traçam a LCR normalizada (eixo da esquerda) e AFD (eixo da direita), como uma função da envoltória, para as técnicas PSC, EGC e MRC. Os ramos são assumidos balanceados ( $\Omega_i = \Omega = 1$ ), tendo parâmetros de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  arbitrários. As curvas sem diversidade foram omitidas, porém, como já é bem conhecido na literatura, o uso de diversidade reduz drasticamente o efeito prejudicial do desvanecimento. Perceba que as técnicas EGC e MRC possuem desempenho similares, diferentemente da técnica PSC, que apresenta o pior desempenho. Tal degradação de desempenho relativo a técnica PSC torna-se ainda maior quando  $M$  aumenta. Note ainda que para o caso no qual  $M = 2$ ,  $\mu_i = 2$  e  $\alpha_i = 2$  (Nakagami- $m$ ), a métrica AFD é praticamente coincidente para as três técnicas analisadas. As diferenças entre estas torna-se mais visível quando o parâmetro de não-linearidade  $\alpha$  parte do caso linear ( $\alpha = 2$ ).

Para  $\mu_i = \mu = 2$ , Fig. 5 plota as curvas simuladas da LCR normalizada, como função da envoltória, para as técnicas PSC, EGC e MRC, usando dois ramos balanceados. Perceba a excelente concordância entre as curvas teóricas e simuladas. Para outras condições de desvanecimento, inúmeras simulações foram realizadas e, em todos os casos, um ótimo ajuste foi obtido.

VI. CONCLUSÕES

Neste artigo, expressões exatas e aproximadas para a LCR e AFD das técnicas EGC e MRC sujeitas a desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  e usando  $M$  ramos independentes, desbalanceados e não-idênticos foram obtidas. As aproximações propostas

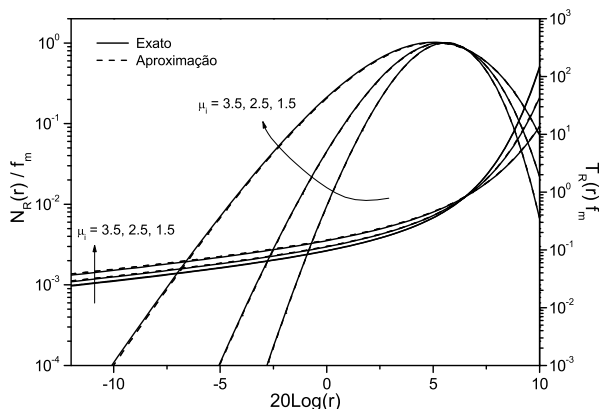


Fig. 1. LCR e AFD da técnica EGC para canais de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  balanceados ( $M = 4$ ,  $\alpha_i = 1.5$  e variando  $\mu_i = \mu$ ).

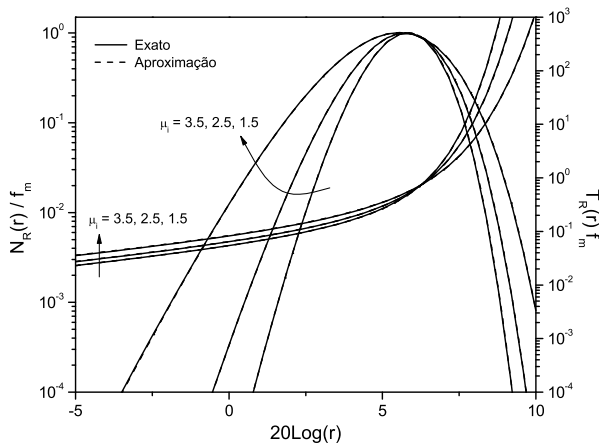


Fig. 2. LCR e AFD da técnica MRC para canais de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  balanceados ( $M = 4$ ,  $\alpha_i = 2.5$  e variando  $\mu_i = \mu$ ).

mostraram-se ser altamente precisas. Além disso, expressões simples e em forma fechada para tais métricas (LCR e AFD) foram apresentadas para a técnica PSC no qual os canais estavam sujeitos as mesmas condições de desvanecimento das técnicas EGC e MRC.

As expressões exatas foram validadas reduzindo-as para alguns casos particulares, no qual as soluções são conhecidas, e por meio de simulação. Nossos resultados encontram aplicabilidade na análise e projeto de sistemas sem fio com diversidade operando em condições generalizadas de desvanecimento, onde ambos os fenômenos de não-linearidade e clusterização ocorrem.

REFERÊNCIAS

[1] M. D. Yacoub, *The  $\alpha$ - $\mu$  distribution: A general fading distribution*. IEEE Inter. Symp. on Personal, Indoor and Mobile Radio Commun., v. 2, p. 629-633, Sep., 2002.

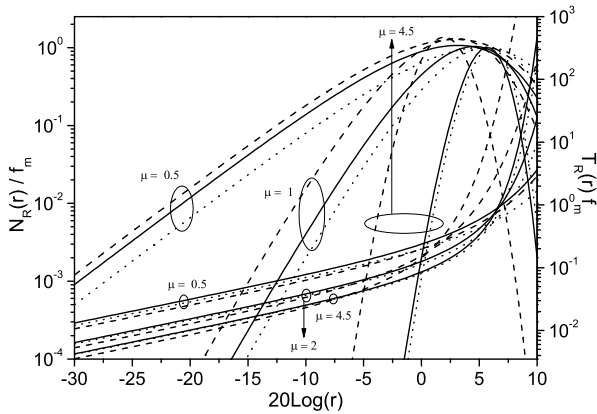


Fig. 3. LCR e AFD das técnicas PSC, EGC e MRC para canais de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  balanceados (linhas sólidas  $\rightarrow$  EGC, linhas pontilhadas  $\rightarrow$  MRC, linhas tracejadas  $\rightarrow$  PSC,  $M = 4$ ,  $\Omega_i = 1$ ,  $\alpha_i = 1.5$  e variando  $\mu_i = \mu$ ).

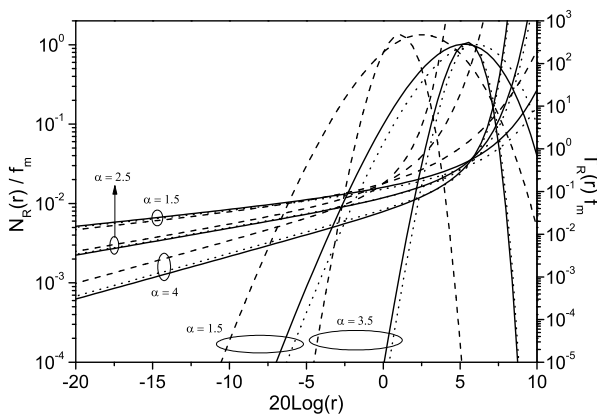


Fig. 4. LCR e AFD das técnicas PSC, EGC e MRC para canais de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  balanceados (linhas sólidas  $\rightarrow$  EGC, linhas pontilhadas  $\rightarrow$  MRC, linhas tracejadas  $\rightarrow$  PSC,  $M = 4$ ,  $\Omega_i = 1$ ,  $\mu_i = 2$  e variando  $\alpha_i = \alpha$ ).

- [2] M. D. Yacoub, *The  $\alpha$ - $\mu$  distribution: a physical fading model for the Stacy distribution*, IEEE Trans. Veh. Technol., v. 56, n<sup>o</sup> 1, p. 27-34, Jan., 2007.
- [3] G. Fraidenraich, J. C. S. Santos Filho, and M. D. Yacoub, *Second-order statistics of maximal-ratio and equal-gain combining in Hoyt fading*, IEEE Commun. Lett., v. 9, n<sup>o</sup> 1, p. 19-21, Jan., 2005.
- [4] G. Fraidenraich, M. D. Yacoub, and J. C. S. Santos Filho, *Second-order statistics of maximal-ratio and equal-gain combining in Weibull fading*, IEEE Commun. Lett., v. 9, n<sup>o</sup> 6, p. 499-501, Jun., 2005.
- [5] M. D. Yacoub, C. R. C. M. da Silva, and J. E. V. Bautista, *Second-order statistics for diversity-combining techniques in Nakagami-fading channels*, IEEE Trans. Veh. Technol., v. 50, n<sup>o</sup> 6, p. 1464-1470, Nov., 2001.
- [6] S. O. Rice, *Mathematical analysis of random noise*, Bell System Technical Journal, v. 23, p. 282-332, Jul., 1944.
- [7] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*, 1974.
- [8] L. Yang and M. -S. Alouni, *Level crossing rate over multiple independent random processes - an extension of the applicability of the Rice formula*. Proc. IEEE Global Telecommun. Conf., San Francisco, USA, Dez., 2005.
- [9] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*,

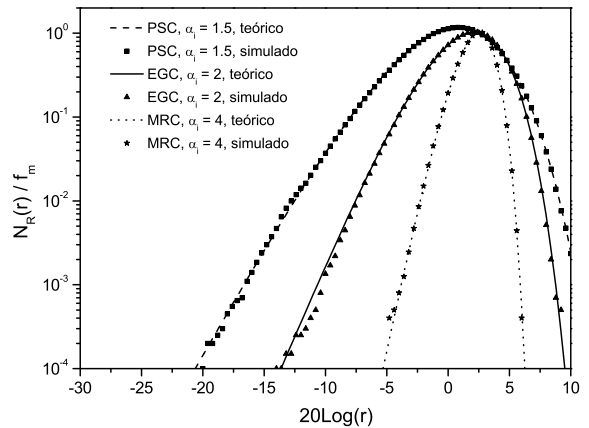


Fig. 5. Comparação entre as curvas teóricas e simuladas para PSC, EGC, e MRC com  $M = 2$  e usando  $\mu = 2$ .

4th edition, 1974.

- [10] D. G. Brennan, *Linear diversity combining techniques*, v. 47, p. 1075-1102, Jun., 1959.
- [11] J. C. S. Santos Filho and M. D. Yacoub, *Simple precise approximations to Weibull sums*, IEEE Commun. Lett., v. 10, n<sup>o</sup> 8, p. 614-616, Aug., 2006.
- [12] C.-D. Iskander and P. T. Mathiopoulos, *Analytical level crossing rates and average fade durations for diversity techniques in Nakagami fading channels*, IEEE Trans. Commun., v. 50, n<sup>o</sup> 8, p. 1301-1309, Aug., 2002.

## APÊNDICE I

O objetivo deste Apêndice é encontrar a variância da PDF condicional de  $\hat{R}_i$  dado  $R_i$ . A partir de (1), temos que

$$R_i^{\alpha_i} = \sum_{l=1}^{n_i} (X_{il}^2 + Y_{il}^2). \quad (38)$$

Derivando cada lado da igualdade em (38), temos

$$\alpha_i R_i^{\alpha_i - 1} \dot{R}_i = \sum_{l=1}^{n_i} (2X_{il} \dot{X}_{il} + 2Y_{il} \dot{Y}_{il}). \quad (39)$$

Rearranjando os termos e aplicando o operador variância condicional,

$$\sigma_{\hat{R}_i}^2 = 4 \sum_{l=1}^{n_i} \frac{X_{il}^2 + Y_{il}^2}{\alpha_i^2 R_i^{2\alpha_i - 2}} \sigma_i^2. \quad (40)$$

Sabendo que  $\sigma_i^2 = 2\pi^2 f_m^2 \sigma_i^2 = \pi^2 f_m^2 \Omega_i / \mu_i$ , obtém-se

$$\sigma_{\hat{R}_i}^2 = 4\pi^2 f_m^2 \sum_{l=1}^{n_i} \frac{X_{il}^2 + Y_{il}^2}{\alpha_i^2 \mu_i R_i^{2\alpha_i - 2}} \Omega_i. \quad (41)$$

Substituindo (38) em (41), a demonstração está concluída. Portanto, a variância da PDF condicional de  $\hat{R}_i$  dado  $R_i$  é expressa por

$$\sigma_{\hat{R}_i}^2 = \frac{R_i^{2-\alpha_i}}{\alpha_i^2 \mu_i} 4\pi^2 f_m^2 \Omega_i. \quad (42)$$