

EFEITO DA INICIALIZAÇÃO NO MODELO DO COMPORTAMENTO DOS COEFICIENTES DO ALGORITMO DE PROJEÇÕES AFINS

Márcio H. Costa, Sérgio J. M. de Almeida, José C. M. Bermudez e Rodrigo B. Barcelos

Resumo—Este trabalho apresenta um novo modelo analítico para a descrição do comportamento médio dos coeficientes do algoritmo adaptativo de Projeções Afins assumindo sinais de entrada auto-regressivos e passo unitário. Equações determinísticas recursivas foram derivadas levando em consideração a influência de uma inicialização arbitrária dos coeficientes. Como decorrência, caracterizou-se a existência de um transiente inicial devido à incorreta ortogonalização do vetor de coeficientes em relação ao subespaço definido pelos vetores passados do sinal de entrada. Simulações Monte Carlo mostram a melhoria na precisão do modelo desenvolvido quando comparado à modelagem realizada sem a influência da inicialização.

Palavras-Chave—Filtragem adaptativa, Algoritmo de projeções afins, Modelo analítico, Comportamento médio dos coeficientes.

Abstract—This paper presents a new analytical model for the mean weight behavior of the Affine Projection adaptive algorithm for autoregressive inputs and unity step-size. Deterministic recursive equations are derived considering an initial transient previously not accounted for. This phase occurs at the beginning of the adaptation process, and is due to the arbitrary initialization of the coefficients. It is a deterministic process that prevents the correct orthogonalization of the coefficient vector with respect to the subspace defined by the past input vectors. Monte Carlo simulations show improvements in the accuracy of the presented model when compared to a previously one.

Keywords—Adaptive filter, Affine projection algorithm, Analytical model, Mean weight behavior.

I. INTRODUÇÃO

Algoritmos adaptativos são amplamente usados em muitas aplicações importantes em tempo-real, como por exemplo cancelamento de eco e controle ativo de ruído, e em aparelhos auditivos. Apesar de bastante difundida por seu baixo custo computacional, a família LMS apresenta convergência lenta para sinais de entrada altamente correlacionados. O algoritmo de projeções afins (AP) proposto por Ozeki e Umeda em 1984 [1] atualiza o vetor de coeficientes na direção ortogonal aos P últimos vetores de entrada, considerando o uso de passo unitário. Essa estratégia tende a descorrelacionar o sinal de entrada, acelerando a convergência [2] e fazendo com que o algoritmo seja atrativo para aplicações com sinais de entrada altamente correlacionados. A melhoria no desempenho é obtida ao custo de uma maior complexidade computacional e de um aumento no erro quadrático médio em excesso, em comparação ao algoritmo LMS normalizado (NLMS). Com a redução

progressiva das limitações à complexidade computacional, devido aos avanços tecnológicos, o algoritmo AP e suas versões rápidas [3]-[4] são hoje empregados em várias aplicações práticas. Apesar dos diversos trabalhos publicados sobre o comportamento do algoritmo AP, seu completo entendimento ainda é um desafio. Isto ocorre em função do processo de estimação subdeterminado embutido em suas equações, o que dificulta significativamente sua análise.

Uma análise estatística do algoritmo AP foi apresentada em [5] para sinais de entrada autoregressivos (AR) e passo unitário (máxima velocidade de convergência). Nesse trabalho, equações recursivas determinísticas foram obtidas, permitindo a descrição do comportamento médio e quadrático médio do AP no caso de um grande número de coeficientes adaptativos. Os exemplos em [5] mostraram que os modelos desenvolvidos descrevem o comportamento do algoritmo com adequada acurácia para todos os casos analisados, quando comparados à simulações Monte Carlo. Entretanto, o uso extensivo da teoria desenvolvida em [5] evidenciou imprecisões do modelo nas iterações iniciais do algoritmo para certas configurações de parâmetros. Um exemplo típico é o processamento de sinais de entrada AR de ordem elevada combinado com uma inicialização do vetor de coeficientes muito distante da solução ótima (solução de Wiener). Estes erros iniciais são propagados ao longo do tempo devido à natureza recursiva do processo de aprendizagem adaptativa.

Este trabalho apresenta uma extensão do modelo analítico de [5] para o comportamento médio dos coeficientes do algoritmo AP. A acurácia do modelo é incrementada através da inclusão de um novo termo nas equações derivadas em [5]. Esse termo estima o efeito do transiente causado por uma inicialização arbitrária do vetor de coeficientes. Os resultados deste trabalho podem ser utilizados não apenas para melhorar modelos teóricos previamente desenvolvidos, como também para a análise de robustez e estabilidade [6].

Este artigo é organizado da seguinte maneira. A Seção 2 introduz o modelo do sinal de entrada e a notação usada. A Seção 3 introduz o algoritmo AP. A Seção 4 apresenta resumidamente o modelo teórico derivado em [5]. A Seção 5 deriva o novo modelo analítico. A Seção 6 apresenta simulações Monte Carlo para validar o modelo desenvolvido. Finalmente, na Seção 7 são apresentadas as principais conclusões deste trabalho. Neste artigo, escalares são denotados por letras maiúsculas e minúsculas em itálico, vetores são denotados por letras minúsculas em negrito e

Márcio H. Costa, José C. M. Bermudez e Rodrigo B. Barcelos, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, Brasil, Sérgio J. M. de Almeida, Centro Politécnico, Universidade Católica de Pelotas, Pelotas-RS, Brasil, E-mails: costa@eel.ufsc.br; j.bermudez@ieee.org; borgesrb@lpds.ufsc.br; smelo@ucpel.tche.br. Este trabalho foi financiado pelo CNPq (303803/2009-6 e 305377/2009-4).

matrizes por letras maiúsculas em negrito. A letra n representa o tempo discreto.

II. O MODELO DO SINAL DE ENTRADA

Neste trabalho, o sinal de entrada $u(n)$ é assumido como sendo um processo AR estacionário de média zero e ordem P , de tal forma que:

$$u(n) = \sum_{i=1}^P a_i u(n-i) + z(n) \quad (1)$$

em que a_i são os coeficientes AR e $z(n)$ é um ruído branco Gaussiano com variância σ_z^2 . Processos AR são facilmente tratáveis matematicamente e podem ser utilizados para modelar sinais de entrada para muitas aplicações práticas [8]. N amostras consecutivas de (1) podem ser descritas pela seguinte equação matricial

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{U}(n)\mathbf{a} + \mathbf{z}(n) \quad (2)$$

em que $\mathbf{u}(n) = [u(n) \ u(n-1) \ \dots \ u(n-N+1)]^T$ é o vetor de entrada com matriz de auto-correlação dada por $\mathbf{R}_u = E\{\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^T(n)\}$, $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_P]^T$, $\mathbf{z}(n) = [z(n) \ z(n-1) \ \dots \ z(n-N+1)]^T$ e $\mathbf{U}(n) = [\mathbf{u}(n-1) \ \mathbf{u}(n-2) \ \dots \ \mathbf{u}(n-P)]^T$. O algoritmo AP tem como objetivo estimar o sinal desejado $d(n)$ que é modelado [5] por

$$d(n) = \mathbf{w}^o \mathbf{u}(n) + r(n) \quad (3)$$

em que $\mathbf{w}^o = [w_0^o \ w_1^o \ w_2^o \ \dots \ w_{N-1}^o]^T$ modela a resposta ao impulso do sistema desconhecido (planta) e $r(n)$ é um ruído de média zero, independente, identicamente distribuído e com variância σ_r^2 .

III. O ALGORITMO DE PROJEÇÕES AFINS

O algoritmo AP pode ser formulado como uma solução de um problema de mínimos quadrados subdeterminado sujeito a múltiplas restrições [2]. O problema de otimização pode ser definido como a minimização da norma Euclidiana de $\Delta \mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)$, em que $\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \ w_1(n-1) \ \dots \ w_{N-1}(n)]^T$ é o vetor de coeficientes adaptativos, sujeito ao conjunto de restrições dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n+1) &= d(n) \\ \mathbf{u}^T(n-1)\mathbf{w}(n+1) &= d(n-1) \\ &\vdots \\ \mathbf{u}^T(n-P)\mathbf{w}(n+1) &= d(n-P). \end{aligned} \quad (4)$$

A solução desse problema de otimização usando o método dos multiplicadores de *Lagrange* leva à equação de atualização dos coeficientes do AP [1]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{U}_u(n) [\mathbf{U}_u^T(n) \mathbf{U}_u(n)]^{-1} \mathbf{e}_v(n) \quad (5)$$

na qual $\mathbf{U}_u(n) = [\mathbf{u}(n) \ \mathbf{U}(n)]$, $\mathbf{e}_v(n) = [e_v(n) \ e_v(n-1) \ \dots \ e_v(n-P)]^T$ é o vetor de erro com elementos $e_v(n-k) = d(n-k) - \mathbf{u}^T(n-k)\mathbf{w}(n)$ e $e_v(n) = e(n)$ é o sinal de erro instantâneo. O passo μ é considerado unitário na solução do problema de otimização e é introduzido em [5] visando unicamente permitir algum controle sobre a convergência do algoritmo.

Para $u(n)$ autoregressivo como definido em (1) e para $\mu = 1$, é mostrado em [2] que a atualização do vetor de coeficientes ocorre na direção de um vetor $\phi(n)$ dado por

$$\phi(n) = \mathbf{u}(n) - \mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n) \quad (6)$$

em que $\hat{\mathbf{a}}(n)$ é a estimativa de mínimos quadrados do vetor \mathbf{a} de coeficientes do processo AR, sendo descrita por

$$\hat{\mathbf{a}}(n) = [\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1} \mathbf{U}^T(n)\mathbf{u}(n). \quad (7)$$

Como resultado, a equação de atualização dos coeficientes é descrita como

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\phi(n)}{\phi^T(n)\phi(n)} e(n). \quad (8)$$

Definindo o vetor de erro dos coeficientes como $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o$, o sinal de erro escalar $e(n)$ é dado por

$$e(n) = r(n) - \mathbf{v}^T(n)\mathbf{u}(n). \quad (9)$$

A ordem do algoritmo AP é definida [2] como o número $P+1$ de vetores de entrada usados para determinar $\phi(n)$.

IV. ANÁLISE DO AP

Os trabalhos em [2] e [5] descrevem aspectos importantes do comportamento do algoritmo AP. Alguns desses resultados são brevemente revisitados nesta seção, pois constituem a base deste trabalho.

A. Comportamento dos Coeficientes

A equação (12) de [2] introduz o seguinte conjunto de relações determinísticas para o AP

$$\begin{aligned} \phi^T(n)\mathbf{v}(n+1) &= \phi^T(n)\mathbf{v}(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) + r(n) \\ \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n+1) &= r(n) \\ \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n+1) &= \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) \end{aligned} \quad (10)$$

A equação (10) resulta em

$$\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{r}(n-1) \quad (11)$$

em que $\mathbf{r}(n-1) = [r(n-1) \ r(n-2) \ \dots \ r(n-P)]^T$. Usando as equações (6), (9), e (10) em (11) obtém-se

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) - \frac{\phi(n)\phi^T(n)\mathbf{v}(n)}{\phi^T(n)\phi(n)} + \frac{\phi(n)r_a(n)}{\phi^T(n)\phi(n)} \quad (12)$$

em que $r_a(n) = r(n) - \sum_{i=1}^P \hat{a}_i(n)r(n-i)$ é a sequência de ruído filtrado [2].

B. Comportamento Médio dos Coeficientes

A equação (12) foi utilizada como ponto de partida para a análise do comportamento médio dos coeficientes realizada em [5], na qual as seguintes hipóteses estatísticas foram utilizadas:

- A1: O número de coeficientes do filtro adaptativo é grande o suficiente para considerar $N \gg P$.
- A2: A dependência estatística entre $\mathbf{z}(n)$ e $\mathbf{U}(n)$ pode ser desprezada para $N \gg P$.
- A3: Os vetores $\phi(n)$ e $\mathbf{w}(n)$ são estatisticamente independentes e $\phi(n)$ é ortogonal às colunas de $\mathbf{U}(n)$.
- A4: $\phi(n)$ é um vetor aleatório Gaussiano de média zero.

Usando A3 e sabendo que $E\{\phi(n)r_a(n)\} = \mathbf{0}$ devido à característica de média zero de $r(n)$, o valor esperado de (12) é [5]

$$E\{\mathbf{v}(n+1)\} = E\{\mathbf{v}(n)\} - E\left\{\frac{\phi(n)\phi^T(n)}{\phi^T(n)\phi(n)}\right\} E\{\mathbf{v}(n)\} \quad (13)$$

Além disso, usando os seguintes resultados de [5]

$$E\left\{\left[\frac{\phi(n)\phi^T(n)}{\phi^T(n)\phi(n)}\right]^{-1}\right\} = \frac{N}{G(G-2)\sigma_z^2} \quad (14)$$

$$E\{\phi(n)\phi^T(n)\} = (G/N)\sigma_z^2 \mathbf{I}. \quad (15)$$

em que $G = N-P$, (13) resulta em

$$E\{\mathbf{v}(n+1)\} = \left(1 - \frac{1}{G-2}\right) E\{\mathbf{v}(n)\}. \quad (16)$$

A equação (16) é a recursão determinística derivada em [5] para prever o comportamento médio do erro dos coeficientes.

V. TRANSIENTE DE INICIALIZAÇÃO

Esta seção apresenta um novo modelo analítico para o comportamento médio dos coeficientes do algoritmo AP visando melhorar os resultados apresentados em [2] e [5].

A. Inicialização Arbitrária

Em [5], as equações (10) e (11) apresentadas acima são assumidas válidas para todos os estágios do processo de adaptação, resultando em uma predição precisa do comportamento médio e quadrático médio do AP em todos os casos estudados. Entretanto, a equação (11) não é sempre válida. Existe uma fase do transiente, durante as primeiras iterações do algoritmo, que é função da distância entre o vetor inicial de coeficientes e a solução ótima. Para um vetor de coeficientes $\mathbf{w}(0)$, pode ser facilmente verificado através da observação de que $\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n+1)|_{n=-1} = \mathbf{U}^T(-1)[\mathbf{w}(0) - \mathbf{w}^*]$ (antes da primeira atualização dos coeficientes) não é necessariamente igual a $\mathbf{r}(-2)$. Desta forma, uma inicialização que não satisfaça a equação (11) resultará em um erro na ortogonalização do vetor de coeficientes com respeito ao subespaço definido pelos P vetores passados de entrada. Conforme o processo de adaptação evolui, o lado direito da equação (11) satisfaz sucessivamente (termo a termo) os elementos do lado esquerdo. Entretanto, a influência de um erro inicial persistirá durante toda a fase transiente devido à memória infinita da equação (8).

Para evitar o erro de transiente, o vetor de inicialização $\mathbf{w}(0)$ deveria satisfazer a equação

$$\begin{bmatrix} u(n-1) & \dots & u(n-N) \\ u(n-2) & \dots & u(n-N-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u(n-P) & \dots & u(n-N-P+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0(0) - w_0^* \\ w_1(0) - w_1^* \\ \dots \\ w_{N-1}(0) - w_{N-1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(n-1) \\ r(n-2) \\ \dots \\ r(n-P) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Uma vez que a solução ótima não é conhecida (visto que o processo de adaptação visa à identificação da planta), é pouco provável que um $\mathbf{w}(0)$ arbitrário satisfaça (17). Por isso, o comportamento do algoritmo pode ser significativamente diferente daquele predito pelos modelos apresentados na Seção IV. A acurácia do modelo dependerá da magnitude do erro na estimação do vetor de ruído atrasado $\mathbf{r}(n-1)$ e da memória do filtro adaptativo. Foi observado que essas imprecisões na modelagem têm um impacto mais significativo quando três condições são apresentadas simultaneamente: ordem elevada do AP, grande número de coeficientes da planta e inicialização longe da solução ótima.

B. Solução Proposta

A solução proposta para o problema de inicialização consiste em adicionar um fator de correção à equação (11) que incorpore o efeito da ortogonalização incorreta do vetor de coeficientes no início do processo de adaptação. Dessa forma, a equação (11) é modificada para

$$\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{r}(n-1) + \mathbf{q}(n) \quad (18)$$

em que $\mathbf{q}(n) = [q_1(n) \ q_2(n) \ \dots \ q_P(n)]^T$. Os elementos de $\mathbf{q}(n)$ devem desaparecer sequencialmente a cada iteração do algoritmo. Uma forma de obter este efeito é definir

$$q_i(n) = \{\mathbf{u}^T(n-i)\mathbf{v}(0) - r(n-i)\}u_{-1}(i-n) \quad (19)$$

em que $u_{-1}(k)$ é a função degrau unitário (1 se $k \geq 0$ e 0 para outros valores de k). Como resultado, $q(n)$ pode ser representado na forma de vetor como

$$\mathbf{q}(n) = \mathbf{Q}(-n+1) [\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(0) - \mathbf{r}(n-1)] \quad (20)$$

em que a matriz $P \times P$ $\mathbf{Q}(-n+1)$ é

$$\mathbf{Q}(-n+1) = \begin{bmatrix} u_{-1}(-n+1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{-1}(-n+2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{-1}(-n+P) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Usando (18) e (20) em (8) como em [2], obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) & - \frac{\boldsymbol{\phi}(n)\boldsymbol{\phi}^T(n)\mathbf{v}(n)}{\boldsymbol{\phi}^T(n)\boldsymbol{\phi}(n)} + \frac{\boldsymbol{\phi}(n)r_a(n)}{\boldsymbol{\phi}^T(n)\boldsymbol{\phi}(n)} \\ & - \frac{\boldsymbol{\phi}(n)\hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{U}^T(n)}{\boldsymbol{\phi}^T(n)\boldsymbol{\phi}(n)}\mathbf{v}(0) \\ & + \frac{\boldsymbol{\phi}(n)\hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{r}(n-1)}{\boldsymbol{\phi}^T(n)\boldsymbol{\phi}(n)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Note, neste caso, o aparecimento de dois novos termos no lado direito da equação (22) em relação à (12). Através de (21) fica evidente que todos os $q_i(n)$ irão desaparecer após P iterações. Desta forma, ambas as equações (12) e (22) produzirão o mesmo resultado em regime permanente.

C. Comportamento Médio dos Coeficientes

Aplicando o valor esperado em (22), obtém-se

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(n+1)\} = E\{\mathbf{v}(n)\} & - E\left\{\frac{\boldsymbol{\phi}(n)\boldsymbol{\phi}^T(n)}{\boldsymbol{\phi}^T(n)\boldsymbol{\phi}(n)}\mathbf{v}(n)\right\} \\ & + E\left\{\frac{\boldsymbol{\phi}(n)r_a(n)}{\boldsymbol{\phi}^T(n)\boldsymbol{\phi}(n)}\right\} \\ & - E\left\{\frac{\boldsymbol{\phi}(n)\hat{\mathbf{a}}^T(n)}{\boldsymbol{\phi}^T(n)\boldsymbol{\phi}(n)}\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{U}^T(n)\right\}\mathbf{v}(0) \\ & + E\left\{\frac{\boldsymbol{\phi}(n)\hat{\mathbf{a}}^T(n)}{\boldsymbol{\phi}^T(n)\boldsymbol{\phi}(n)}\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{r}(n-1)\right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Assumindo que o ruído de medida $r(n)$ e o sinal de entrada são independentes entre si, o terceiro e o quinto termos de (23) são anulados devido à média-zero de $r(n)$, levando a

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(n+1)\} = E\{\mathbf{v}(n)\} & - E\left\{\frac{\boldsymbol{\phi}(n)\boldsymbol{\phi}^T(n)}{\boldsymbol{\phi}^T(n)\boldsymbol{\phi}(n)}\mathbf{v}(n)\right\} \\ & - E\left\{\frac{\boldsymbol{\phi}(n)\hat{\mathbf{a}}^T(n)}{\boldsymbol{\phi}^T(n)\boldsymbol{\phi}(n)}\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{U}^T(n)\right\}\mathbf{v}(0). \end{aligned} \quad (24)$$

Da mesma forma que em [5], o numerador e o denominador de cada termo em (24) podem ser assumidos fracamente correlacionados para grandes valores de N . Para sinais de entrada ergódicos, essa aproximação é equivalente à aplicação do princípio das médias [7]. Usando A3, (14) e (15) tem-se que

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(n+1)\} = \left(1 - \frac{1}{G-2}\right)E\{\mathbf{v}(n)\} \\ - \frac{N}{G(G-2)\sigma_z^2}\mathbf{T}(n)\mathbf{v}(0). \end{aligned} \quad (25)$$

em que

$$\mathbf{T}(n) = E\left\{\boldsymbol{\phi}(n)\hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{U}^T(n)\right\} \quad (26)$$

O valor de $\mathbf{T}(n)$ depende somente das estatísticas do sinal de entrada e varia deterministicamente com o tempo conforme as mudanças de $\mathbf{Q}(-n+1)$. Além disto, $\mathbf{T}(n)$ pode ser diretamente estimada a partir das estatísticas do sinal de entrada. A equação (25) fornece um modelo analítico para o

comportamento médio dos coeficientes do algoritmo AP. Note que (25) tende para (16) à medida que o termo extra do transiente tende para zero. Dessa forma, as equações (16) e (25) resultam em estimativas não polarizadas da solução ótima em regime permanente.

Finalmente, a equação (25) pode ser expressa através de substituição iterativa para $n > 0$ como

$$E\{\mathbf{v}(n)\} = \left[\alpha^n \mathbf{I}_N + \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha^{n-i-1} \beta \mathbf{T}(i)) \right] \mathbf{v}(0) \quad (27)$$

em que \mathbf{I}_N uma matriz identidade de dimensões $N \times N$ e

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{G-2} \right) \quad (28)$$

$$\beta = - \left(\frac{N}{G(G-2)\sigma_z^2} \right). \quad (29)$$

A série converge para valores de $\alpha < 1$ e $\beta < 1$. Através da equação (27) é possível verificar que o efeito de memória da matriz $\mathbf{T}(n)$ é suprimido pelo fator decrescente α conforme n evolui (visto que $\mathbf{T}(n)_{n>P} = \mathbf{0}$).

VI. SIMULAÇÕES

Esta seção apresenta comparações entre o modelo proposto e o anteriormente apresentado em [5]. Simulações Monte Carlo foram realizadas visando avaliar a acurácia do modelo analítico descrito na equação (25). Em decorrência de limitações de espaço, três exemplos são apresentados. O primeiro exemplo faz uso de um sinal de entrada modelado por um processo AR de ordem elevada e inicialização do vetor de coeficientes distante da solução ótima, de forma a exaltar o efeito da inicialização. No segundo exemplo é apresentado um caso em que o sinal AR é de ordem 1 e $\mathbf{w}(n)$ é inicializado próximo à solução ótima. O terceiro exemplo assume um sinal de entrada AR de ordem 2 e inicialização do vetor de coeficientes próximo à solução ótima. A matriz $\mathbf{T}(n)$ foi estimada numericamente em todos os exemplos.

Exemplo 1 – Os parâmetros utilizados visam enfatizar o efeito da inicialização, sendo $\sigma_z^2 = 1$, $\sigma_r^2 = 10^{-6}$ e $P = 30$. O sinal de entrada foi gerado por um modelo AR(30) com coeficientes $a_i = (-0,99)^i$ sendo $i = 1, \dots, P$. O sistema desconhecido \mathbf{w}^0 é uma janela de Hanning de tamanho $N = 64$, multiplicada por um fator de amplificação de 100, $\mathbf{w}(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ e os resultados apresentados da simulação constituem a média de 5000 realizações.

A Figura 1 apresenta o comportamento médio do décimo sexto e do trigésimo segundo coeficientes preditos pelo modelo proposto, pelo modelo desenvolvido em [5], e obtidos de simulações Monte Carlo, em escala linear, para o Exemplo 1. Note que o novo modelo fornece uma melhor predição do comportamento na fase de transiente em relação ao modelo descrito em [5]. A Figura 2 apresenta o resultado anterior para o décimo sexto coeficiente em escala logarítmica, indicando uma melhora de aproximadamente 3 dB após P iterações. De forma a permitir uma análise de desempenho global do modelo desenvolvido, a Figura 3 apresenta a evolução da distância Euclidiana entre os vetores de erro de coeficientes para cada um dos modelos e a simulação Monte Carlo, $\sqrt{\sum_{k=1}^N [E\{v_{\text{modelo}_k}(n)\} - E\{v_{\text{simulação}_k}(n)\}]^2}$. Esses resultados coincidem com o aumento esperado de acurácia em decorrência da modelagem do efeito da inicialização.

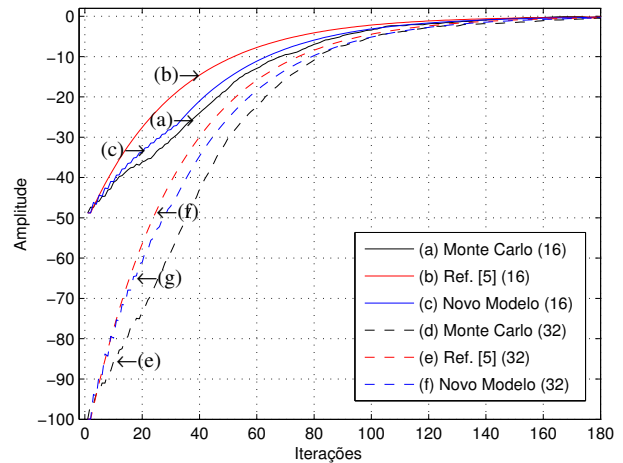


Fig. 1. Comportamento médio do 16º $E\{v_{16}(n)\}$ (linha contínua) e do 32º $E\{v_{32}(n)\}$ (linha tracejada) coeficientes para o Exemplo 1 (escala linear). Simulação de Monte Carlo em preto (a,d), modelo em [5] em vermelho (b,e) e modelo proposto em azul (c,f).

Exemplo 2 – Foram utilizados os mesmos parâmetros empregados no Exemplo 1 de [5]. O sinal de entrada foi gerado por um modelo AR(1) com coeficiente $a_1 = -0,9$ (e demais a_i nulos); σ_z^2 foi ajustado de forma que $\sigma_\phi^2 = 1$. A relação sinal-ruído utilizada foi de 60 dB, de forma que $\sigma_r^2 = 10^{-6}$. O sistema desconhecido \mathbf{w}^0 é uma janela de Hanning de tamanho $N = 64$, $\mathbf{w}(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, $P = 1$ e 5000 promediações. A Figura 4 apresenta o comportamento médio do quinto coeficiente para o Exemplo 2. É possível notar que ambos os modelos produzem estimativas aproximadamente idênticas para P pequeno e inicialização próxima da solução ótima. A semelhança de predição entre os dois modelos é a mesma para todos os exemplos apresentados em [5] nos quais não ocorreram os problemas de inicialização descritos neste artigo.

Exemplo 3 – Os parâmetros foram escolhidos de forma a demonstrar o efeito da inicialização em uma situação prática (P pequeno e inicialização do vetor de coeficientes $\mathbf{w}(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$). O sinal de entrada foi gerado através de um modelo AR(2) com coeficientes $a_1 = 1,96$ e $a_2 = -0,9893$; σ_z^2 foi ajustado de forma que $\sigma_\phi^2 = 1$ e relação sinal-ruído de 60 dB, de forma que $\sigma_r^2 = 10^{-6}$. A planta \mathbf{w}^0 é uma janela de Hanning de $N = 64$. Foram efetuadas 5000 promediações.

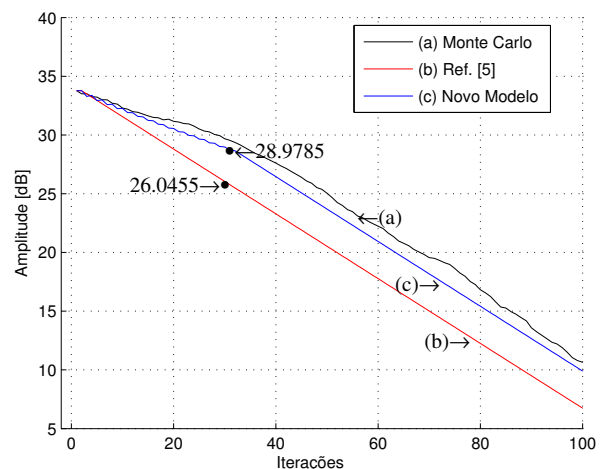


Fig. 2. Comportamento médio do 16º coeficiente $E\{v_{16}(n)\}$ para o Exemplo 1 (escala logarítmica). (a) Simulação de Monte Carlo (preto), (b) Modelo em [5] (vermelho), e (c) Modelo proposto (azul).

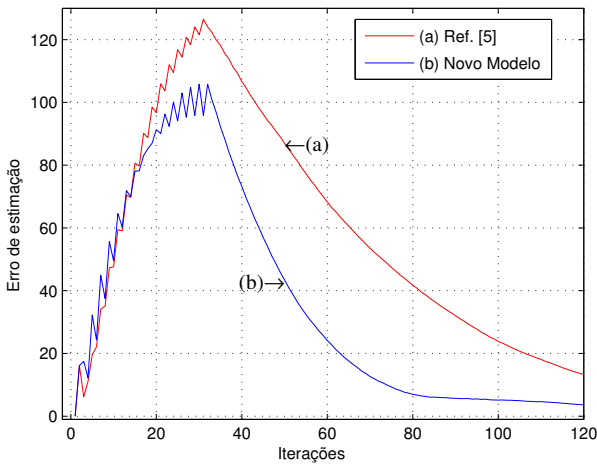


Fig. 3. Distância euclidiana entre os vetores de erro dos coeficientes para cada um dos modelos e os resultados da simulação de Monte Carlo para o Exemplo 1 (escala logarítmica). (a) Modelo em [5] (vermelho), e (b) Modelo proposto (azul).

A Figura 5 apresenta o comportamento médio do quinquagésimo quarto coeficiente para o Exemplo 3 em escala logarítmica permitindo visualizar uma melhora de modelagem de aproximadamente 2,8 dB em relação ao modelo de [5]. Também é possível observar que o novo modelo consegue acompanhar com bastante acurácia a variação apresentada nas primeiras P iterações.

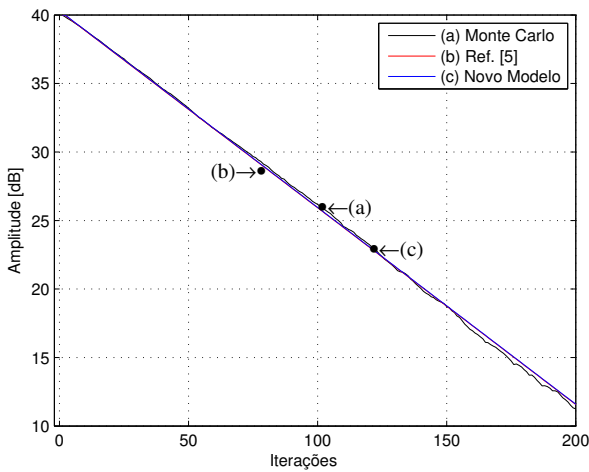


Fig. 4. Comportamento médio do quinto coeficiente $E\{v_5(n)\}$ para o Exemplo 2. (escala logarítmica). (a) Simulação de Monte Carlo (preto), (b) Modelo em [5] (vermelho), e (c) Modelo proposto (azul).

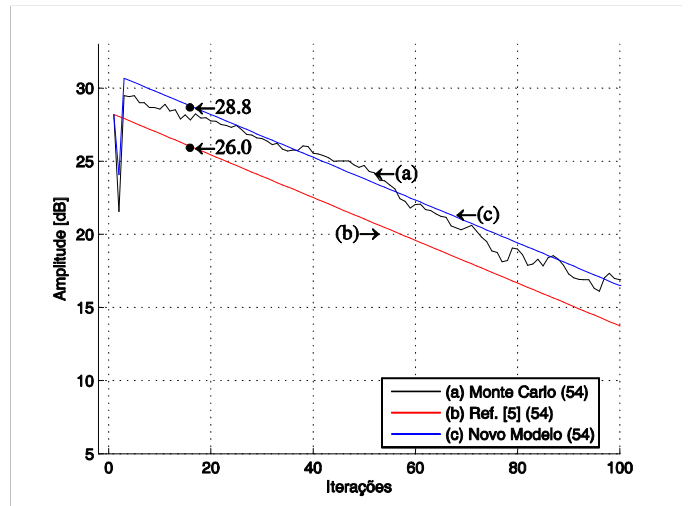


Fig. 5. Comportamento médio do 54º coeficiente $E\{v_{54}(n)\}$ para o Exemplo 3. (escala logarítmica). (a) Simulação de Monte Carlo (preto), (b) Modelo em [5] (vermelho), e (c) Modelo proposto (azul).

VII. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um novo modelo analítico para a predição do comportamento médio dos coeficientes do algoritmo AP utilizando sinais de entrada autoregressivos e passo unitário. A análise concentrou-se no modelamento da fase inicial do transiente de convergência do algoritmo, devido a erros no processo de ortogonalização associados a uma inicialização arbitrária dos coeficientes adaptativos. O modelo desenvolvido estende o modelo apresentado em [5] com a inclusão de um novo termo cuja influência direta se extingue após um determinado número de iterações. Simulações Monte Carlo e comparações com o modelo apresentado em [5] apresentam uma melhoria nas predições do comportamento do AP. Além disso, a contribuição feita neste trabalho pode ser utilizada não apenas na melhoria de modelos teóricos anteriormente desenvolvidos, como também na análise de robustez e estabilidade do AP e de suas versões rápidas, como em [6].

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pelo Ministério da Ciência e Tecnologia (CNPq), projetos 303803/2009-6 e 305377/2009-4.

REFERÊNCIAS

- [1] K. Ozeki e T. Umeda, "An adaptive filtering algorithm using orthogonal projection to an affine subspace and its properties", *Electron. Commun. Japan*, v. 67-A, n.º.5, pp. 19-27, Fevereiro 1984.
- [2] M. Rupp, "A family of filter algorithms with decorrelating properties", *IEEE Trans. Signal Proc.*, v. 46, n.º. 3, pp. 771-775, Março 1998.
- [3] S. L. Gay, "The fast affine projection algorithm", *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process.*, v. 5, pp. 3023-3026, Maio 1995.
- [4] M. Bouchard, "Multichannel affine and fast affine projection algorithms for active noise control and acoustic equalization systems", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 11, no. 1, pp. 54-60, Janeiro 2003.
- [5] S. J. M. Almeida, J. C. M. Bermudez, N. J. Bershad, e M. H. Costa, "A statistical analysis of the Affine Projection algorithm for unity step size and autoregressive inputs", *IEEE Trans. Circ. and Syst. - I*, v. 52, n.º. 7, pp. 1394-1405, Julho 2005.
- [6] M. Rupp, "Pseudo-affine projection algorithms revisited: robustness and stability analysis", *IEEE Trans. Signal Proc.*, v. 59, n.º. 5, pp. 2017-2023, Maio 2011.
- [7] J. E. Mazo, "On the independence theory of equalizer convergence", *Bell Syst. Tech. Journal*, v. 58, pp. 963-993, Maio-Junho 1979.
- [8] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*, Chichester: John Wiley & Sons, 1998.