

O Efeito da Digitalização num Sistema de Comunicação Baseado em Sincronismo Caótico

Vinícius Borges e Marcio Eisenkraft

Resumo—A dinâmica caótica pode ser explorada para a implementação de sistemas de comunicação não convencionais. Uma das formas de fazê-lo consiste em utilizar o sincronismo que ocorre entre osciladores caóticos, para transmitir informações adequadamente codificadas dentro do conjunto invariante. Sendo assim, no decorrer das últimas décadas, muitos métodos de sincronismo para sistemas caóticos têm sido propostos visando aplicações em comunicações. No entanto seus desempenhos não têm-se mostrado satisfatórios quando submetidos a condições práticas de transmissão. Neste trabalho faz-se uma análise simplificada da influência do erro de digitalização no desempenho de um sistema de comunicação baseado em sincronismo caótico.

Palavras-Chave—Sistemas de Comunicação; Erro de digitalização; Sincronismo Caóticos.

Abstract—The chaotic dynamics can be explored for implementing unconventional communication systems. One possible alternative is to use the synchronization that occurs between chaotic oscillators, to transmit information properly coded within the invariant chaotic set. Thus, over the past few decades, many synchronization methods for chaotic systems have been proposed targeting applications in communications. However, their performances have not been satisfactory when subjected to practical conditions of transmission. Bearing this in mind, this work presents a simplified analyzes of the quantization error influence on the performance of a chaos-based communication system.

Keywords—Communication Systems; Quantization Error; Chaotic Synchronism.

I. INTRODUÇÃO

Sinais caóticos são determinísticos, aperiódicos e apresentam Dependência Sensível com as Condições Iniciais (DSCI) [1]. Esta última propriedade significa que os estados de dois sistemas caóticos idênticos, iniciados com condições cuja diferença seja arbitrariamente pequena, depois de um tempo finito, estarão distantes no espaço de fase [1].

O uso da dinâmica caótica em problemas de interesse em Telecomunicações teve seu ponto de inflexão a partir do trabalho de Pecora e Carroll [2] que mostrou como a sincronização associada ao caos pode ser usada para implementar sistemas de comunicação. Esses sistemas de comunicação baseados em caos (SCBC) podem oferecer vários benefícios potenciais sobre as abordagens clássicas, incluindo, por exemplo, espectro banda larga e baixa probabilidade de detecção [3]. Especificamente, tais sistemas buscam ser imunes a interferências naturais e artificiais, ou garantir que a mensagem enviada seja recebida ou compreendida apenas

por um receptor autorizado. Pesquisas recentes mostram uma evolução no desempenho dos SCBCs, por exemplo, o uso de filtros adaptativos *kernel* para mapas unidimensionais [4], codificação de imagens usando sinais caóticos [5], e ainda, em [6] mostra-se numericamente que, escolhendo-se de forma adequada a função de codificação, pode-se chegar a taxas de erro de bit próximas dos sistemas convencionais.

No entanto, a falta de robustez da sincronização caótica em relação as limitações impostas pela implementação prática de SCBCs ainda representa uma barreira para o seu uso prático [3]. Os sistemas baseados em caos que dependem do sincronismo caótico apresentam, em geral, fraco desempenho em termos de Taxa de Erro de Bit (BER - Bit Error Rate) quando as condições de transmissão não são ideais [7]. Além disso, é necessário que haja compatibilidade entre os sistemas de comunicação baseados em caos e os convencionais [8]. Assim, parece haver um longo caminho de pesquisas a serem realizadas antes de os sistemas de comunicação baseados em caos tenham reais condições de serem utilizados na prática.

Com o intuito de investigar o desempenho dos SCBCs, uma perspectiva relevante é considerar o efeito da limitação da representação numérica em meios digitais sob o seu desempenho. A maioria dos sistemas digitais tem um número fixo de bits em seus registros. Com isso, a capacidade de armazenamento, a precisão com que as constantes são armazenadas e os cálculos efetuados podem ser severamente afetados [9]. Dessa forma, as consequências das limitações computacionais são investigadas em diversas áreas, como por exemplo, processamento digital de sinais [10–13], simulação computacional [14, 15] e sistemas dinâmicos [16–18].

No presente trabalho considera-se o SCBC proposto em [19]. Nele a sincronização mestre-escravo ocorre por meio da implementação de dois geradores de sinais caóticos (GSC). Aqui consideram-se os mapas de Hénon [20], bidimensional e tridimensional, e de Lozi [21]. Para efeito de simulação, os seus coeficientes foram perturbados e representados por variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade uniforme. Por fim, utilizou-se a BER para verificar a influência da digitalização na recuperação da mensagem do SCBC.

O artigo está organizado da seguinte forma: na Seção II, revisita-se o sincronismo caótico, com a apresentação do SCBC considerado e os geradores de sinais caóticos utilizados no trabalho. Também discute-se sucintamente a modelagem do erro de digitalização. Na Seção III, descreve-se a metodologia de simulação para a obtenção dos resultados apresentados na Seção IV. Por fim, na Seção V resumem-se as principais conclusões.

Vinícius Borges, Engenharia Elétrica, Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, e-mail: viniciusb@usp.br; Marcio Eisenkraft, Engenharia Elétrica, Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, e-mail: marcioft@usp.br

II. CONCEITOS PRELIMINARES

Nessa seção, descrevem-se o sincronismo mestre-escravo em tempo discreto, com a apresentação do sistema simulado e o equacionamento dos mapas utilizados, bem como a modelagem do erro de digitalização.

A. Sincronismo mestre-escravo em tempo discreto

Considere dois sistemas de tempo discreto que podem ser escritos como [19, 22]

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(n)). \quad (2)$$

Os vetores $\mathbf{x}(n)$ e $\mathbf{y}(n)$ são M -dimensionais. A matriz quadrada $\mathbf{A}_{M \times M}$ e o vetor coluna $\mathbf{b}_{M \times 1}$ são constantes.

O sistema descrito pela equação (1) é autônomo e, portanto, chamado de *mestre*; o sistema descrito por (2) depende de $\mathbf{x}(n)$ e é chamado de *escravo*.

O erro de sincronização é definido por

$$\mathbf{e}(n) \triangleq \mathbf{y}(n) - \mathbf{x}(n). \quad (3)$$

Subtraindo-se (2) de (1), obtém-se

$$\mathbf{e}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{e}(n). \quad (4)$$

Os sistemas estão *completamente sincronizados* [23] se $\mathbf{e}(n) \rightarrow 0$ quando n cresce. De (4), uma condição necessária e suficiente para que isso ocorra é [24]:

$$\|\lambda_m\| < 1, \quad 1 \leq m \leq M, \quad (5)$$

em que λ_m são autovalores de \mathbf{A} . Dado que os autovalores da matriz \mathbf{A} determinam se os sistemas (1) e (2) sincronizam, \mathbf{A} é chamada de *matriz de sincronização*.

Esse esquema de sincronização pode ser facilmente adaptado para transmissão unidirecional de uma mensagem $m(n)$, tomando-se o mestre como sistema transmissor e o escravo como receptor, como mostrado na Figura 1, sendo o operador z^{-1} o atraso unitário, ou seja, $z^{-1}\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}(n-1)$. Para tanto, considera-se que $\mathbf{f}(\cdot)$ depende apenas da componente x_1 de \mathbf{x} e que pode ser escrita como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(n)) = [f(x_1(n)) \ 0 \ \dots \ 0]^T. \quad (6)$$

O sinal transmitido $s(n)$ é gerado misturando-se a mensagem $m(n)$ com $x_1(n)$ por meio de uma função de codificação invertível $c(\cdot)$; isto é

$$s(n) = c(x_1(n), m(n)). \quad (7)$$

Além de ser transmitido, $s(n)$ também é realimentado no gerador caótico como argumento de $\mathbf{f}(\cdot)$, como pode ser visto na Figura 1.

Seja $r(n)$ o sinal que chega ao receptor que, em geral, difere de $s(n)$. Nesse SCBC, os dois nós são então dados por

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s(n)) \quad (8)$$

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(r(n)). \quad (9)$$

As únicas diferenças entre (1)-(2) e (8)-(9) são os argumentos de $\mathbf{f}(\cdot)$.

Para um canal ideal, isto é, $s(n) = r(n)$, (8)-(9) tornam-se

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s(n)), \quad (10)$$

$$\mathbf{y}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{y}(n) + \mathbf{b} + \mathbf{f}(s(n)). \quad (11)$$

Assim, a dinâmica do erro é ainda governada por (4). Dessa forma, se a condição (5) é válida, então

$$y_1(n) \rightarrow x_1(n). \quad (12)$$

No receptor, estima-se a mensagem enviada como

$$\hat{m}(n) = d(y_1(n), r(n)), \quad (13)$$

em que $d(\cdot, \cdot) = c^{-1}(\cdot, \cdot)$ com relação à primeira variável. Assim, de (12),

$$\hat{m}(n) = d(y_1(n), r(n)) \rightarrow d(x_1(n), s(n)) = m(n). \quad (14)$$

Portanto, quando os valores dos parâmetros de mestre e escravo estão perfeitamente casados e o canal é ideal, a mensagem é recuperada sem degradação no escravo, exceto durante um transitório necessário para a sincronização.

A seguir descrevem-se alguns mapas que podem ser utilizados como geradores de sinais caóticos para esse SCBC.

B. Mapa de Hénon

Hénon [20] propôs um mapa bidimensional para reduzir os esforços no estudo do sistema de Lorenz. Mapa é dado por

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= 1 - \alpha x_1(n)^2 + x_2(n) \\ x_2(n+1) &= \beta x_1(n) \end{cases}, \quad (15)$$

sendo α e β parâmetros fixos. Para os parâmetros $\alpha = 1,4$ e $\beta = 0,3$ o sistema gera sinais caóticos.

Além disso, considera-se aqui a extensão tridimensional do mapa de Hénon [25] definida por:

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= 1 - \alpha x_1(n)^2 + x_3(n) \\ x_2(n+1) &= \beta x_1(n) \\ x_3(n+1) &= \beta x_1(n) + x_2(n). \end{cases} \quad (16)$$

C. Mapa de Lozi

Em 1978, Lozi introduziu as equações de um mapa bidimensional semelhante ao mapa Hénon [20]. A não linearidade quadrática foi substituída por uma não linearidade modular:

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= 1 - \alpha|x_n| + x_2(n) \\ x_2(n+1) &= \beta x_1(n) \end{cases} \quad (17)$$

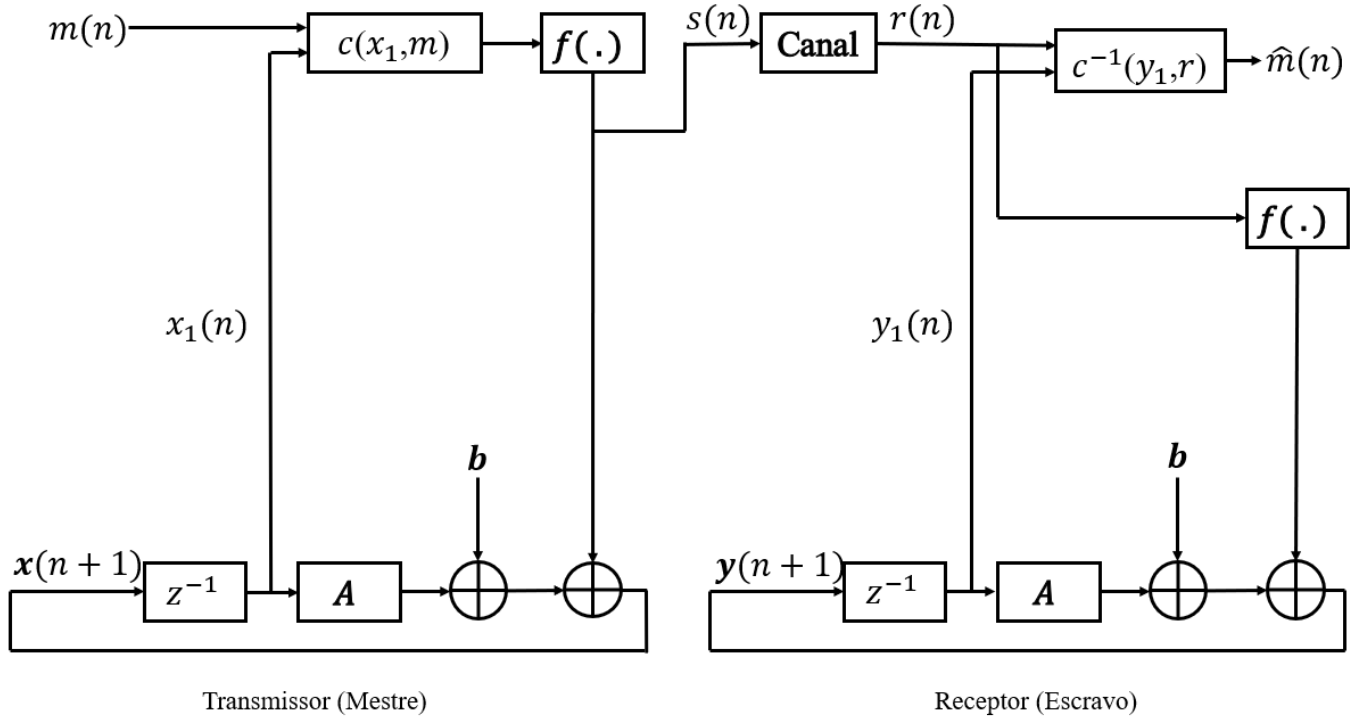


Fig. 1: Diagrama de blocos do SCBC (8)-(9), proposto em [19].

D. Erros de Digitalização

A maioria dos sistemas digitais tem um número fixo de bits em seus registros. Com isso, a capacidade de armazenamento e a precisão com que as constantes são armazenadas e os cálculos efetuados sofrem interferência.

Esse erro de digitalização pode ser visto de uma maneira alternativa se considerarmos os coeficientes dos mapas delimitados por um intervalo [26]. Assim, a digitalização pode ser vista como a adição de uma certa quantidade de incerteza [27]. Quanto menos bits for usado na digitalização; mais ruído é adicionado.

Para exemplificar, considere uma representação de ponto fixo. O erro de digitalização é dado por:

$$|\epsilon_r| \leq \frac{Q}{2}, \quad (18)$$

em que $Q = 2^b$, b é o número de bits. Assim, os coeficientes em (15)-(17) apresentam limites mais baixos dado por:

$$\underline{\alpha} = \alpha - Q/2, \quad \underline{\beta} = \beta - Q/2, \quad (19)$$

enquanto os limites superiores são dados por

$$\bar{\alpha} = \alpha + Q/2, \quad \bar{\beta} = \beta + Q/2. \quad (20)$$

Isso equivale a dizer que o erro de digitalização produz um intervalo em torno do valor desejado dos coeficientes. Em outras palavras, o valor aproximado dos coeficientes $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ é dado por:

$$\underline{\alpha} < \hat{\alpha} < \bar{\alpha} \quad (21)$$

$$\underline{\beta} < \hat{\beta} < \bar{\beta}. \quad (22)$$

III. METODOLOGIA

O presente trabalho visa analisar o desempenho do SCBC da Figura 1, quando os coeficientes dos GSCs, neste caso o Mapa de Hénon e o de Lozi, são perturbados pelo do erro de digitalização. Dessa forma, para realizar as simulações considerou-se as seguintes condições:

- 1) A mensagem transmitida, $m(n)$ é constituída de 10^6 bits representados por, 1 ou -1 ;
- 2) Escolher os parâmetros dos mapas. Os mapas dependem de dois parâmetros, α e β e no artigo original de Hénon têm valores iguais à $\alpha = 1,4$ e $\beta = 0,3$;
- 3) As condições iniciais no transmissor são nulas, no receptor considerou-se condições iniciais independentes e uniformemente distribuídas no intervalo $[0,1]$;
- 4) Utilizou-se a função de codificação:

$$c(x_1, m) = x_1(n) + \lambda m(n);$$

- 5) Consequentemente, a função de decodificação é dada por

$$c^{-1}(y_1, r) = r(n) - \frac{y_1(n)}{\lambda}.$$

Usando uma representação de ponto fixo e o erro de digitalização definido pela equação (18), os coeficientes do mapa de Hénon foram digitalizados, dessa forma, por meio das Equações (19)-(20), os coeficientes podem ser definidos como variáveis aleatórias uniformes assumindo valores no intervalo $[\alpha - Q/2, \alpha + Q/2]$ e $[\beta - Q/2, \beta + Q/2]$. Além disso, a função de codificação e decodificação tem parâmetro $\lambda = 0,001$

Desse modo, os parâmetros do mapa de Hénon foram perturbados e simulados no sistema de comunicação proposto em [19].

IV. RESULTADOS

Na Figura 2, mostra-se um exemplo da implementação do sistema da Figura 1 usando o mapa de Hénon (15). Em (a) uma mensagem $m(n)$ transmitida, em (b) a mensagem $\hat{m}(n)$ recuperada no receptor ideal e (c) a mesma mensagem recuperada, mas agora com os coeficientes α e β representados com 8 bits. Nota-se claramente a perda de informação devida ao número de bits disponíveis no registrador.

Na Figura 2.(d) mostra-se o desempenho do SCBC relacionando a taxa de erro de bits (BER) e o número de bits na digitalização, com a transmissão de 10^6 bits. Para a realização desta simulação considerou-se o pior caso, os coeficientes do mapa no transmissor arredondados para o intervalo superior, $\alpha = 1,4 + Q/2$ e $\beta = 0,3 + Q/2$, os coeficientes dos mapas no receptor arredondados para o intervalo inferior, $\alpha = 1,4 - Q/2$ e $\beta = 0,3 - Q/2$. Nota-se que a BER cai de forma abrupta quando se utiliza mais do que 10 bits na representação.

Além disso, na Tabela I, nota-se o mapa que apresentou melhor desempenho em relação a BER foi o Hénon tridimensional. O mapa de Hénon bidimensional apresentou maior influência de digitalização, pois com 11 bits de perturbação apresentou BER maior que 10^{-5} .

Bits	Mapa Hénon bidimensional	Mapa Hénon tridimensional	Mapa Lozi
2	0,4998	0,4994	0,4474
3	0,4998	0,4994	0,4999
4	0,4981	0,4958	0,4999
5	0,4959	0,4202	0,4999
6	0,4930	0,3745	0,4999
7	0,4818	0,3745	0,4999
8	0,4547	0,3745	0,4999
9	0,4201	0,3745	0,4999
10	0,3483	0,3745	0,4999
11	0,1998	$< 10^{-5}$	$< 10^{-5}$
12	$< 10^{-5}$	$< 10^{-5}$	$< 10^{-5}$

TABELA I: Relação da BER dos mapas simulados com o número de bits na digitalização.

V. CONCLUSÕES

Com este trabalho fica evidente a influência da digitalização no SCBC da Figura 1. Para sistemas com 8 bits, todos os mapas apresentados tiveram desempenho insatisfatório. No entanto, para a implantação para sistemas que empregam maior número de bits, todos os mapas analisados tiveram comportamento parecido. Em particular, para uma digitalização dos coeficientes com mais de 12 bits, a BER em canal ideal ficou abaixo de 10^{-5} .

Em trabalhos futuros pretende-se estudar em mais detalhes esse efeito, por meio da simulação de outros mapas. Além disso, deve-se investigar a influência da precisão computacional na realização das operações aritméticas, problema não considerado neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos*. Springer, 1996.

- [2] T. L. Carroll and L. M. Pecora, “Synchronizing chaotic circuits,” in *Nonlinear Dynamics in Circuits*, pp. 215–248, World Scientific, 1995.
- [3] M. Eisencraft, R. Fanganiello, J. Grzybowski, D. Soriano, R. Attux, A. Batista, E. Macau, L. H. A. Monteiro, J. Romano, R. Suyama, *et al.*, “Chaos-based communication systems in non-ideal channels,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 12, pp. 4707–4718, 2012.
- [4] E. Sabatini, R. Candido, M. Silva, and M. Eisencraft, “Sistemas de comunicação baseados em caos com filtros adaptativos kernel e mapa quadrático,” in *Anais de XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, 11 2020.
- [5] E. Sabatini, M. Silva, and M. Eisencraft, “Codificação de imagens usando sinais caóticos,” in *Anais de XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, 11 2020.
- [6] G. Abib and M. Eisencraft, “Sobre o desempenho em canal com ruído de um sistema de comunicação baseado em caos,” in *Anais de XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, 2013.
- [7] C. Williams, “Chaotic communications over radio channels,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 48, no. 12, pp. 1394–1404, 2001.
- [8] C. Tse and F. Lau, “Chaos-based digital communication systems,” *Operating Principles, Analysis Methods and Performance Evaluation*, 2003.
- [9] D. Chan and L. Rabiner, “Analysis of quantization errors in the direct form for finite impulse response digital filters,” *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. 21, no. 4, pp. 354–366, 1973.
- [10] A. Mehrnia and A. N. Willson, “A Lower Bound for the Hardware Complexity of FIR Filters,” *IEEE Circuits and Systems Magazine*, vol. 18, no. 1, pp. 10–28, 2018.
- [11] N. Chervyakov, P. Lyakhov, D. Kaplun, D. Butusov, and N. Nagornov, “Analysis of the quantization noise in discrete wavelet transform filters for image processing,” *Electronics*, vol. 7, no. 8, p. 135, 2018.
- [12] V. S. Borges, E. G. Nepomuceno, C. A. Duque, and D. N. Butusov, “Some remarks about entropy of digital filtered signals,” *Entropy*, vol. 22, no. 3, p. 365, 2020.
- [13] V. Borges, E. G. Nepomuceno, A. V. Tutueva, A. I. Karimov, C. Duque, and T. I. Karimov, “Analysis of iir filters by interval response,” in *2020 Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT)*, pp. 1–5, IEEE, 2020.
- [14] E. G. Nepomuceno and E. M. Mendes, “On the analysis of pseudo-orbits of continuous chaotic nonlinear systems simulated using discretization schemes in a digital computer,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 95, pp. 21–32, 2017.
- [15] F. L. Milani, W. R. Lacerda Júnior, S. A. M. Martins, and E. G. Nepomuceno, “Influência de softwares e sistemas operacionais na simulação de modelos dinâmicos não lineares,” *XXI Congresso Brasileiro de Automática*, 2016.
- [16] P. Silva, V. Borges, P. Guedes, I. Silva, and E. Nepomuceno, “Estimating the largest lyapunov exponent based on conditional number,” *Proceeding Series of the Brazi-*

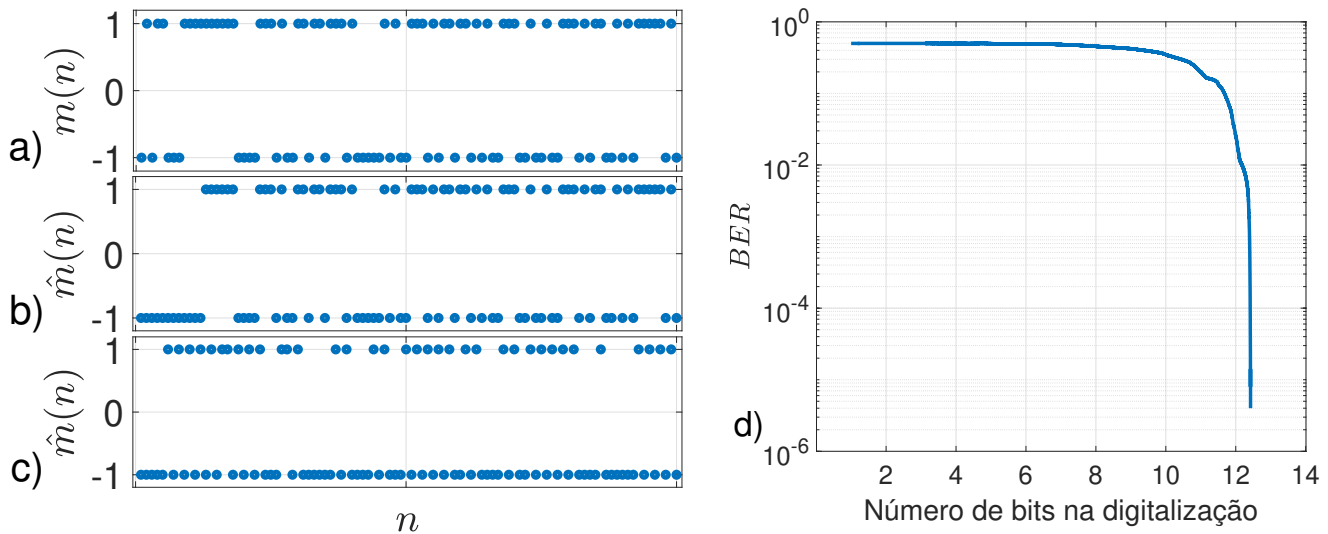


Fig. 2: SCBC com o mapa de Henón bidimensional e perturbação de 8 bits nos coeficientes. (a) Mensagem transmitida; (b) mensagem recebida no receptor ideal; (c) mensagem recebida com perturbação nos coeficientes e (d) exemplo da relação da BER com o número de bits na digitalização.

lian Society of Computational and Applied Mathematics, 2017.

[17] S. Silva, V. Borges, G. Silva, and E. Nepomuceno, “Reliability analysis of the logistic map’s pseudo-orbits through the delta-epsilon limit definition,” *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 2017.

[18] S. Silva, V. Borges, G. Silva, and E. Nepomuceno, “Application of horner’s method to simulation of the polynomial narmax,” *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 2017.

[19] M. Eisencraft, R. D. Fanganiello, and L. A. Baccala, “Synchronization of discrete-time chaotic systems in bandlimited channels,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2009, 2009.

[20] M. Henon, “Numerical study of quadratic area-preserving mappings,” *Quarterly of applied mathematics*, pp. 291–312, 1969.

[21] M. Aziz-Alaoui, C. Robert, and C. Grebogi, “Dynamics of a hénon–lozi-type map,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 12, no. 12, pp. 2323–2341, 2001.

[22] C. W. Wu and L. O. Chua, “A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 3, no. 06, pp. 1619–1627, 1993.

[23] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. Valladares, and C. Zhou, “The synchronization of chaotic systems,” *Physics reports*, vol. 366, no. 1-2, pp. 1–101, 2002.

[24] P. Ravi, “Agarwal, difference equations and inequalities,” *Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, Inc., New York*, 2000.

[25] L. Jouini, A. Ouannas, A.-A. Khennaoui, X. Wang, G. Grassi, and V.-T. Pham, “The fractional form of a new three-dimensional generalized hénon map,” *Advances in Difference Equations*, vol. 2019, no. 1, pp. 1–12, 2019.

[26] N. K. Bose and K. Kim, “Boundary implications for frequency response of interval fir and iir filters,” *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 39, no. 10, pp. 2167–2173, 1991.

[27] V. S. Borges, E. G. Nepomuceno, C. A. Duque, and D. N. Butusov, “Some remarks about entropy of digital filtered signals,” *Entropy*, vol. 22, no. 3, p. 365, 2020.