

Uma Abordagem Analítica da Codificação Turbo

Carolina A. Trigilio, Ivan R. S. Casella

Universidade Federal do ABC

Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas

Resumo– Este artigo apresenta uma análise algébrica do processo de codificação e decodificação turbo, considerando inicialmente apenas uma iteração, para descrever o funcionamento dos algoritmos utilizados e para verificar sua capacidade de correção de erros.

Palavras-chave: turbo, codificação, FEC.

1. Introdução

A codificação turbo é uma estratégia de controle de erros que está sendo cada vez mais utilizada, já que aumenta a confiabilidade da informação que está sendo transferida, permitindo atingir índices de capacidade muito próximos das predições de Shannon [1]. Neste trabalho será apresentada uma metodologia algébrica de codificação e decodificação turbo baseada no algoritmo MAP (Maximum a Priori). O método apresentado será aplicado num sistema acústico de transmissão digital de imagens para reduzir a taxa de erro de bit (BER).

2. Codificação

O processo de codificação turbo utilizado neste artigo para a transmissão da mensagem \mathbf{x}_b , descrito na Figura 1, emprega a concatenação de dois codificadores convolucionais recursivos sistemáticos (RSC) por meio de entrelaçadores (Π), de forma que a seqüência codificada \mathbf{x}_c resultante é suficientemente aleatória para prover taxas de erro relativamente baixas, quando associado à técnicas iterativas de decodificação baseadas em informação suave [2].

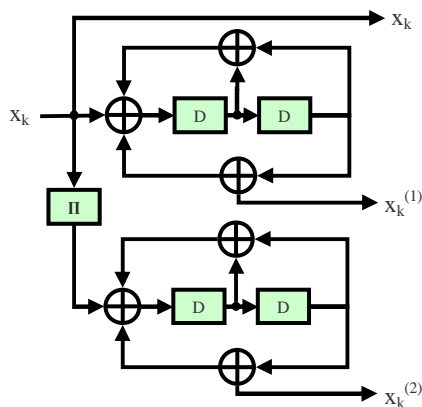


Figura 1- Modelo do codificador turbo de referência.

A seqüência codificada \mathbf{x}_c é composta por N palavras de código dadas por $(x_k, x_k^{(1)}, x_k^{(2)})$, onde o bit de informação no instante k , x_k , pode assumir os valores -1 ou +1 com uma probabilidade *a priori* $P(x_k)$. Associada a esta probabilidade pode-se definir a LLR (Log Likelihood ratio) [3]:

$$L(x_k) = \ln \left(\frac{P(x_k = +1)}{P(x_k = -1)} \right) \quad (1)$$

Considerando que a seqüência \mathbf{x}_c seja transmitida por um canal AWGN (Additive White Gaussian Noise), a seqüência recebida, \mathbf{y}_c , composta por palavras de código corrompidas por ruído representadas por $(y_k, y_k^{(1)}, y_k^{(2)})$, é submetida ao processo de decodificação para recuperar os dados originais.

3. Decodificação

A decodificação pode ser realizada através de uma implementação iterativa do algoritmo MAP [3]. Na Figura 2, é apresentado o modelo de decodificação turbo utilizado nesse trabalho.

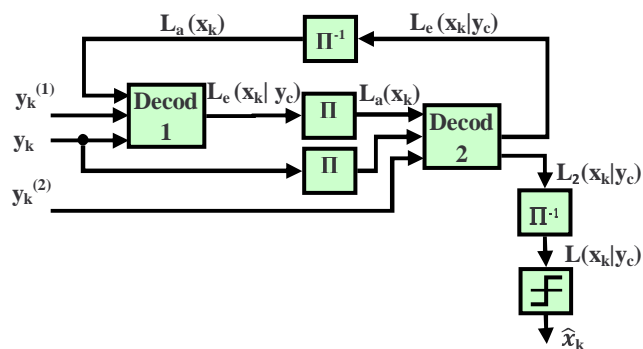


Figura 2- Decodificação Turbo.

No processo de decodificação iterativa é utilizada, além da informação recebida pelo canal, a informação intrínseca *a priori* (API), denominada de $L_a(x_k)$, que é resultante do processo de decodificação anterior. A informação trocada entre os decodificadores, chamada de informação extrínseca e denominada de $L_e(x_k|y_c)$, é a informação fornecida pelo processo de decodificação levando em consideração a seqüência total recebida e a API de todos os outros bits, excluindo a API do bit a ser decodificado [2].

O decodificador utiliza o algoritmo MAP [1] para estimar a seqüência de bits originais \mathbf{x}_b através do cálculo da LLR *a posteriori* $L(x_k|y_c)$, dada por [3]:

$$L(x_k|y_c) = \ln \left(\frac{P(x_k = +1|y_c)}{P(x_k = -1|y_c)} \right) = \ln \left(\frac{\sum_{R1} P(s', s, y_c)}{\sum_{R0} P(s', s, y_c)} \right) \quad (2)$$

Onde, $P(s', s, y_c)$ representa a probabilidade conjunta de no instante $k - 1$ estar no estado da treliça s' , no instante k estar no estado da treliça s e da seqüência recebida ser y_c .

A $P(s', s, y_c)$ pode ser calculada iterativamente, fazendo [3]:

$$P(s', s, y_c) = \alpha_{k-1}(s') \cdot \gamma_k(s', s) \cdot \beta_k(s) \quad (3)$$

Onde,

$$\gamma_k(s', s) = e^{\frac{x_k \cdot L_q(x_k) + 2 \cdot x_k \cdot y_k + 2 \cdot x_k^{(i)} \cdot y_k^{(i)}}{2}}, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

$$\alpha_k(s) = \sum_{s'} \alpha_{k-1}(s') \cdot \gamma(s', s) \quad (5)$$

$$\beta_{k-1}(s') = \sum_s \gamma_k(s', s) \cdot \beta_k(s) \quad (6)$$

4. Resultados Analíticos

Nessa seção será apresentado um exemplo de cálculo analítico do processo de codificação e decodificação turbo empregando o algoritmo MAP.

Considerando o codificador [1 5/7] apresentado na Figura 1, pode-se obter a treliça de estados apresentada na Figura 3:

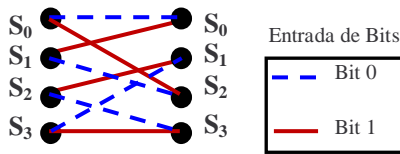


Figura 3- Treliça de Estados do codificador [1 5/7]

Na Tabela 1 são apresentados os estados atuais e futuros e os bits de saída produzidos pelos codificadores 1 e 2:

Tabela 1: Estados e bits de entrada.

Atual	Entrada (x)			
	0		1	
S ₀	S ₀	Y ₁ (00)	S ₂	Y ₅ (11)
S ₁	S ₂	Y ₂ (00)	S ₀	Y ₆ (11)
S ₂	S ₃	Y ₃ (01)	S ₁	Y ₇ (10)
S ₃	S ₁	Y ₄ (01)	S ₃	Y ₈ (10)

Dada a seqüência de informação $\mathbf{x}_b = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]$ com terminação e, considerando que o entrelaçador seja representado por $\mathbf{\Pi} = [7 \ 5 \ 1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 6 \ 0]$, tem-se a seguinte seqüência de transição de estados para o codificador 1:

$$s_0 \xrightarrow{y_5} s_2 \xrightarrow{y_7} s_1 \xrightarrow{y_2} s_2 \xrightarrow{y_3} s_3 \xrightarrow{y_8} s_3 \xrightarrow{y_4} s_1 \xrightarrow{y_6} s_0 \xrightarrow{y_1} s_0$$

De forma semelhante, a seqüência de transição de estados para o codificador 2 é dada por:

$$s_0 \xrightarrow{y_1} s_0 \xrightarrow{y_1} s_0 \xrightarrow{y_5} s_2 \xrightarrow{y_3} s_3 \xrightarrow{y_8} s_3 \xrightarrow{y_4} s_1 \xrightarrow{y_6} s_0 \xrightarrow{y_5} s_2$$

Deste modo, a seqüência codificada \mathbf{x}_c , utilizando uma representação polar (+1 e -1), é dada por:

$$\mathbf{x}_c = [+1+1-1+1-1-1-1-1+1+1+1+1-1-1-1+1+1+1+1-1-1+1]$$

Após a transmissão do código através de um canal AWGN com $N(0, 1)$, a seqüência recebida é dada por:

$$\mathbf{y}_k = [2.96 \ -0.232 \ -0.249 \ 0.83 \ -0.26 \ -0.79 \ 0.43 \ -0.74]$$

$$\mathbf{y}_k^{(1)} = [3.13 \ -1.44 \ -0.17 \ 0.91 \ -0.45 \ 1.27 \ 1.98 \ -0.53]$$

$$\mathbf{y}_k^{(2)} = [-1.70 \ -1.69 \ 1.82 \ 2.04 \ -3.05 \ 1.46 \ 2.10 \ 0.30]$$

A saída do decodificador 1 para a primeira iteração pode ser obtida através das fórmulas de $\alpha_k(s)$, $\beta_k(s')$ e $\gamma_k(s', s)$, representadas nas Tabelas 2, 3 e 4, para $\alpha_0(0) = 1$ e $\beta_8(0) = 1$.

Tabela 2: Valores para $\alpha_k(s)$ para o Decodificador 1.

Tabela de α									
S ₀	1	5.0 e ⁻⁶	7.3 e ⁻⁶	0.27	0.08	0.12	0.12	0.61	0.64
S ₁	0	0.99	2.6 e ⁻⁷	0.64	0.49	0.20	0.08	0.16	0.22
S ₂	0	0	0.91	0.04	0.19	0.35	0.47	0.17	0.05
S ₃	0	0	0.08	0.03	0.22	0.31	0.31	0.05	0.07

Tabela 3: Valores para $\beta_k(s')$ para o Decodificador 1.

Tabela de β									
S ₀	0.29	0.56	0.49	0.62	0.01	8.0 e ⁻³	7.7 e ⁻³	0.92	1
S ₁	5.0 e ⁻⁴	0.22	0.09	0.18	0.38	0.04	1.4 e ⁻³	0	0
S ₂	0.70	0.12	0.31	0.03	0.04	1.6 e ⁻³	0.95	0.07	0
S ₃	6.0 e ⁻⁴	0.08	0.08	0.15	0.55	0.95	0.03	0	0

Tabela 4: Valores para $\gamma_k(s', s)$ para o Decodificador 1.

Tabela de γ							
0.002	5.33	1.53	0.17	2.03	0.62	0.08	3.58
445.0	0.18	0.65	5.71	0.49	1.60	11.1	0.27
0.84	3.35	0.93	0.92	1.20	0.12	0.21	0.81
1.18	0.29	1.07	1.08	0.83	7.87	4.70	1.23
445.0	0.18	0.65	5.71	0.49	1.60	11.1	0.27
0.002	5.33	1.53	0.17	2.03	0.62	0.08	3.58
1.18	0.29	1.07	1.08	0.83	7.87	4.70	1.23
0.84	3.35	0.93	0.92	1.20	0.12	0.21	0.81

A partir dos valores de α , β e γ pode-se calcular as probabilidades $P(s', s, \mathbf{y}_c)$ e a LLR resultante para o primeiro decodificador é dada por:

$$\mathbf{L}_{\text{map1}} = [11.30 \ 3.70 \ 0.39 \ 0.50 \ -0.43 \ -4.36 \ 3.73 \ -3.81]$$

A seqüência de bits decodificada correspondente é dada por:

$$\mathbf{x}_1 = [+1+1+1+1-1-1+1-1]$$

Usando um procedimento semelhante para o segundo decodificador, e considerando $\alpha_0(0) = 1$ e $\beta_8(s) = 0.25$, tem-se:

$$\mathbf{L}_{\text{map2}} = [-11.26 \ -10.98 \ 7.04 \ -5.19 \ 4.84 \ -4.56 \ 5.73 \ 11.89]$$

A seqüência de bits decodificada correspondente é dada por:

$$\mathbf{x}_2 = [-1-1+1-1+1-1+1+1]$$

Após o desembaralhamento e conversão para bits (1 e 0), obtém-se a estimativa da mensagem original transmitida:

$$\hat{\mathbf{x}}_b = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]$$

Pode-se notar que os erros ocorridos em \mathbf{x}_1 nos bits 2, 3 e 4 foram corrigidos na saída \mathbf{x}_2 .

5. Conclusão

Neste artigo foi apresentado um método analítico para a codificação e decodificação turbo. Pôde-se mostrar que a informação recebida, mesmo corrompida, contribui para a correção de erros, pois carrega uma probabilidade associada que aumenta em módulo a cada iteração devido ao entrelaçamento, que reduz a chance de erro no mesmo bit.

Referências Bibliográficas

- [1] Haykin, Simon. Sistemas de Comunicação Analógicos e Digitais, Editora Bookman, 4ª edição, 2004.
- [2] Casella, Ivan R. S. Estruturas Espaço-Temporais de Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas para a Transmissão de Dados de Alta Taxa em Sistemas WCDMA, Teses de Doutorado, EPUSP, 2004.
- [3] Abrantes, Silvio A. do Algoritmo BCJR à Descodificação Turbo, Relatório Técnico, FEUP, 2004.