Uma abordagem unificada para as condições de equalização de canais SISO, SIMO e MIMO

Michele Nazareth da Costa, Ricardo Suyama e João M. T. Romano

***Resumo*— O principal objetivo do presente trabalho é prover uma visão unificada das condições de equalização de canais SISO, SIMO e MIMO num contexto não-supervisionado. Com este fim, reúnem-se alguns resultados um tanto dispersos na literatura, completando-os e provendo-lhes a devida fundamentação teórica. A abordagem se baseia no estudo do que denominamos como as duas limitações inerente ao problema de equalização cega: o estrutural e o de critério. Novos resultados são também obtidos no que diz respeito às relações entre equalização e predição, e ao uso de filtros de erro de predição para equalização de sistemas SIMO que não atendem à igualdade de Bezout.**

***Palavras-Chave*— Equalização cega, SISO, SIMO, MIMO, Predição linear, Estatísticas de ordem 2.**

***Abstract*— The main objective of the present work is to provide an unified vision of equalization conditions for SISO, SIMO and MIMO channels in an unsupervised context. To this end, some results rather disperse in the literature are gathered, providing a correct theoretical foundation. This approach is based on the study of what we call two inherent limitations in the blind equalization problem: the structural and the one due to the criterion. News results are also obtained about the relationships between equalization and prediction, and on the use of the prediction-error filters for equalization of SIMO systems that do not attend Bezout's equality.**

***Keywords*— Blind Equalization, SISO, SIMO, MIMO, Linear Prediction, Second-order statistics.**

I. INTRODUÇÃO

Um objetivo básico de qualquer sistema de comunicação é prover a recuperação do sinal transmitido da maneira mais fiel possível para que a informação recebida seja confiável. Em comunicações digitais, a interferência intersimbólica (IIS) e o ruído são as principais causas de degradação de sinal e um dispositivo usual de contramedida é o equalizador, nas suas diversas formas de implementação [1].

Em caso de ausência de ruído, o equalizador ótimo é aquele que inverte perfeitamente o canal, atingindo a chamada condição de Zero-Forcing (ZF) [2], que pode ser expressa por:

$$w(z)h(z) = z^{-d}, \tag{1}$$

onde $w(z)$ e $h(z)$ são as funções de transferência do equalizador e do canal, respectivamente. É importante notar que a condição admite a recuperação de uma versão do sinal original com atraso d.

Conforme as informações disponíveis no processo de otimização do equalizador, as técnicas utilizadas classificam-se em supervisionadas, ou treinadas, e não-supervisionadas, ou cegas. Os métodos de equalização cega não requerem uma seqüência de treinamento no processo de comunicação e nem um conhecimento a priori do canal. Ao invés disso, utilizam apenas o sinal recebido e alguma informação estatística sobre o sinal transmitido [3].

Duas dificuldades inerentes ao problema de equalização cega serão abordadas neste trabalho. A primeira pode ser classificada de *estrutural*, e refere-se à impossibilidade de inversão perfeita quando tanto canal como equalizador são filtros com resposta ao impulso finita (FIR - *finite impulse response*), ou seja, $w(z)$ e $h(z)$ são polinômios em z, supondo-se assim um sistema a uma entrada e uma saída (SISO - *Single Input Single Output*).

A segunda dificuldade pode ser classificada como do *critério* de otimização e está mais especificamente ligada às características do processamento não-supervisionado, cuja base teórica reside, sobretudo, nos teoremas de Benveniste-Goussat-Rouget [4] e, posteriormente, de Shalvi-Wenstein (SW) [5]. Considerando que tanto o canal quanto o equalizador são filtros lineares e que as amostras do sinal transmitido são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), o teorema SW garante equalização desde que o segundo momento e um momento de ordem superior a dois dos sinais transmitido e recuperado sejam idênticos. Os diversos métodos existentes passam então pelo uso, explícito ou implícito, de estatísticas de ordem superior (EOS).

A partir do início da década de 90, vários trabalhos propuseram-se a superar esses dois problemas pela introdução de métodos de equalização voltados para sistemas SIMO (*Single Input Multiple Output*) e MIMO (*Multiple Input Multiple Output*) [6], [7], [8]. A diversidade inerente a esses esquemas permite flexibilizar a limitação estrutural, obtendo-se, em alguns casos, condição ZF mesmo apenas com sistemas FIR. Permite ainda chegar a soluções ótimas fazendo uso apenas de estatísticas de ordem dois (EO2), superando assim a segunda limitação do processamento cego.

Convém observar que, além do aspecto teórico comentado acima, as estruturas SIMO e MIMO apresentam um interesse prático crescente e possuem diversas vantagens sistêmicas. A diversidade pode ser introduzida tanto no domínio temporal, pelo processo de superamostragem, como espacial, por meio do uso de múltiplas antenas. Ambos os casos recaem numa mesma modelagem matemática que será vista mais adiante.

O principal objetivo deste trabalho é prover uma visão unificada das condições de equalização de canais SISO, SIMO e MIMO, num contexto não-supervisionado, abordando as duas dificuldades mencionadas acima. Novos resultados são também obtidos no que diz respeito às relações entre

Departamento de Microonda e Óptica, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - CP 6101, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, 13083-970, Campinas, SP, Brasil, E-mails: {rsuyama, romano}@dmo.fee.unicamp.br,mncosta@decom.fee.unicamp.br

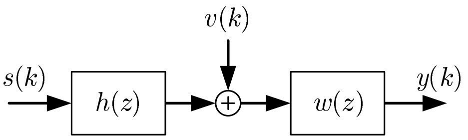

Fig. 1. Diagrama do sistema de comunicação SISO.

equalização e predição, e ao uso de filtros de erro de predição para equalização de sistemas SIMO que não atendem à igualdade de Bezout.

Assim, o trabalho foi estruturado da seguinte forma. Na Seção II são apresentados os resultados relativos a sistemas SISO. Nas Seções III e IV novos conceitos são introduzidos na extensão do problema aos casos de sistemas SIMO e MIMO. Finalmente, na Seção V algumas conclusões e perspectivas para trabalhos futuros são discutidas.

II. EQUALIZAÇÃO DE SISTEMAS SISO

O caso mais simples a ser abordado neste trabalho consiste em canais com apenas uma entrada e uma saída, ilustrado na figura 1. Assume-se que o canal pode ser modelado como um sistema linear definido por $h(z)$, o sinal transmitido é composto por amostras i.i.d. e, para efeito de análise, o ruído é desprezível.

Um primeiro ponto a ser discutido diz respeito às limitações estruturais do problema de equalização. O estudo de tais limitações envolve os conceitos de zeros e pólos do canal, que podem ser definidos de forma imediata a partir das raízes do numerador e denominador de $h(z)$ [9], [10]. Dessa forma, podemos dizer que é possível atingir a condição ZF nas seguintes situações:

- O canal é composto apenas por pólos, e o equalizador é uma estrutura FIR;
- O canal é um sistema de fase mínima (todos seus zeros e pólos se encontram dentro da circunferência de raio unitário), e o equalizador é uma estrutura IIR;

Convém notar que o modelo mais usual em equalização linear assume canais FIR, que correspondem por exemplo a canais com propagação por múltiplos percursos, e equalizadores também FIR, por simplicidade de implementação. Com essas restrições estruturais não é possível atingir a condição ZF.

Ainda assim, é necessário ressaltar que, mesmo na impossibilidade de inversão perfeita do canal, é possível recuperar a informação transmitida por meio de equalizadores com um número suficiente de zeros de modo a aproximar a condição ZF.

Uma vez definida a estrutura do equalizador, a busca de seus parâmetros ótimos se dá conforme algum critério. No contexto não-supervisionado, este critério utiliza necessariamente, de forma implícita ou explícita, estatísticas de ordem superior. Há de fato um estreita relação entre a necessidade de se fazer uso de estatísticas de ordem superior no critério de otimização e a possível característica de fase não-mínima do sinal. Esta relação se torna mais clara ao considerarmos as similaridades entre as operações de *desconvolução*, da qual a equalização é um caso particular, e de *predição*.

Matematicamente, um filtro de erro de predição (FEP)[1]é aquele que fornece em sua saída o sinal de erro de predição dado por:

$$e_{pred}(k) = x(k) - \hat{x}(k), \tag{2}$$

onde $\hat{x}(k)$ representa a saída de um preditor linear que usa amostras passadas $x(k-1), x(k-2), \ldots, x(k-N)$, para estimar o valor de $x(k)$. Seus parâmetros são calculados de maneira a minimizar o erro quadrático médio (EQM) $E\left\{e_{pred}^2\right\}$, ou seja, um critério de otimização que se baseia exclusivamente em EO2 [3]. Além de sua simplicidade, o FEP apresenta as seguintes características:

- O FEP, desde que dotado de um número suficiente de parâmetros, age como um filtro $branqueador$, ou seja, fornece em sua saída um sinal com amostras descorrelacionadas entre si;
- O FEP é um filtro de fase mínima.

A razão para se considerar o uso de um FEP no problema de equalização se relaciona diretamente com estas propriedades. Como o sinal transmitido é, por hipótese, composto por amostras i.i.d., e portanto, descorrelacionado, o sinal a ser recuperado pelo equalizador também deverá apresentar esta mesma característica. Dessa forma, o equalizador deve, a princípio, ser uma estrutura que produza uma saída descorrelacionada, o que ocorre para um filtro de erro de predição de comprimento adequado.

No entanto, recuperar um sinal descorrelacionado não implica a recuperação do sinal transmitido, a menos em dois casos específicos: 1-) O canal é composto apenas por pólos, situação na qual o sinal recebido é um processo autoregressivo, e, dessa forma, o filtro de erro de predição será capaz de identificar perfeitamente os parâmetros do canal; 2-) O canal é um sistema de fase mínima, uma vez que o próprio FEP será um sistema de fase mínima.

Vale ressaltar que o sinal recuperado pelo filtro de erro de predição tenderá a ser igual ao sinal transmitido, a menos de uma ponderação dada pelo primeiro coeficiente h_0 do canal [11].

III. EQUALIZAÇÃO DE SISTEMAS SIMO

O modelo de canal SIMO surge naturalmente como uma extensão do caso SISO quando se considera que o sinal recebido é amostrado com uma taxa P vezes superior à taxa de símbolo. Nesta situação, o sinal recebido pode ser encarado como um conjunto de P seqüências amostradas à taxa de símbolo, cada uma delas associada a um subcanal $h_p(z)$, conforme ilustra a figura 2.

O mesmo modelo também se aplica a cenários de comunicação sem fio, com uma antena de transmissão e múltiplas antenas na recepção [7]. Neste caso o conjunto de polinômios $h_p(z)$ modelam os efeitos de propagação dos canais ligando a antena transmissora a cada uma das antenas na recepção.

Pode-se dizer que grande parte do interesse no modelo SIMO se deve ao fato de que a inversão do sistema FIR

[1]Neste trabalho, o termo filtro de erro de predição se refere apenas a estruturas com preditores progressivos.

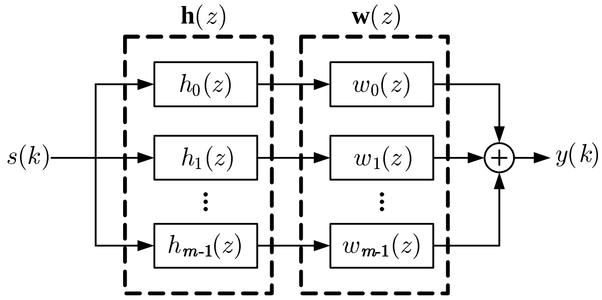

Fig. 2. Modelo SIMO, com m subcanais e equalizadores.

por outras estruturas de mesma natureza passa a ser possível. O resultado fundamental que garante a inversibilidade de sistemas SIMO-FIR é conhecido como *identidade de Bezout*, e é enunciado na forma do seguinte teorema [12].

Teorema 1 (Identidade de Bezout): Sejam $h_p(z)$, $p = 0, \ldots, P-1$ polinômios que não possuam raízes em comum. Então, existem polinômios $w_p(z)$ tais que

$$\sum_{p=0}^{P-1} w_p(z) h_p(z) = z^{-d}. \qquad (3)$$

Dessa forma, de acordo com o Teorema 1, é possível obter uma solução ZF com equalizadores FIR, em claro contraste com o caso SISO. No entanto, a inversão perfeita do canal fica restrita a casos nos quais os subcanais não apresentam zeros em comum.

É interessante notar que a condição de zeros distintos se assemelha ao caso SISO quando o sinal recebido é, essencialmente, um processo autoregressivo [13]. Assim, de maneira análoga, o filtro de erro de predição também deve ser capaz de prover uma solução para o problema de equalização cega de canais SIMO [6]. Neste caso, o FEP é projetado de maneira a minimizar o traço da seguinte matriz de covariância do erro de predição

$$E\left\{\mathbf{e}_{pred}(k)\mathbf{e}_{pred}^H(k)\right\}, \qquad (4)$$

e o vetor de erro de predição será igual a $\mathbf{h}_0 s(k)$, onde $\mathbf{h}_0$ representa um vetor composto pelos coeficientes $h_0(0), \ldots, h_{m-1}(0)$. Novamente, como no caso SISO, o sinal transmitido será recuperado sem atraso de equalização.

Embora grande parte dos trabalhos que exploram exclusivamente EO2 considere que a solução ZF é atingível, é possível que a abordagem utilizando FEP seja efetiva mesmo que a condição de Bezout não seja satisfeita, a exemplo do que ocorre no caso de sistemas SISO de fase mínima. Portanto, é interessante dispor de uma definição para o conceito de zeros de um sistema SIMO (e MIMO), e assim verificar se a mesma idéia é válida para canais SIMO de fase mínima.

Para tal, convém dispor do seguinte teorema, que ajuda a definir os conceitos de zeros e pólos de um sistema SIMO e MIMO:

Teorema 2 (Forma de Smith): Para qualquer matriz polinomial $\mathbf{H}(z)$ com m linhas e n colunas, onde cada elemento da matriz representa um polinômio em z, existem matrizes $\mathbf{Q}(z)$ $(m \times m)$ e $\mathbf{P}(z)$ $(n \times n)$ unimodulares[2], tais que:

$$\mathbf{Q}(z)\mathbf{H}(z)\mathbf{P}(z) = \mathbf{\Gamma}(z), \qquad (5)$$

onde

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \begin{bmatrix} \gamma_0(z) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_1(z) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \gamma_{\rho-1}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

é uma matriz diagonal composta por polinômios mônicos, ρ é o posto normal de colunas de $\mathbf{H}(z)$ [3]. Então, $\mathbf{\Gamma}(z)$ é chamada de forma de Smith de $\mathbf{H}(z)$.

Para ilustrar o teorema 2, considere um canal MIMO com 2 entradas e 2 saídas cuja função de transferência é dada por:

$$H(z) = \begin{bmatrix} z^4 + 3z^3 - z & -z^4 - 2z^3 + z^2 \\ -z^4 - 2z^3 + 3z^2 + 2z & z^4 + z^3 - 3z^2 \end{bmatrix}.$$

Para este caso, definindo:

$$Q(z) = \begin{bmatrix} z-1 & z \\ z-2 & z-1 \end{bmatrix}$$

e

$$P(z) = \begin{bmatrix} z+1 & z \\ z+2 & z+1 \end{bmatrix},$$

observa-se que:

$$Q(z)H(z)P(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix},$$

onde $\rho = 2$, $\gamma_0(z) = z$ e $\gamma_1(z) = z^2$.

Note que, no caso de sistema SIMO $(n = 1)$, a matriz $\mathbf{P}(z)$ torna-se uma constante que pode ser englobada pela matriz $\mathbf{Q}(z)$, e a forma de Smith pode ser expressa por:

$$\mathbf{Q}(z)\,\mathbf{h}(z) = \begin{bmatrix} \gamma(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

onde $\gamma(z)$ será um polinômio cujas raízes correspondem exatamente aos zeros em comum dos subcanais do sistema. Dessa forma, é possível definir o que vem a ser os zeros do sistema SIMO:

Definição 1 (Zeros de transmissão): As raízes de $\gamma(z)$ são chamadas de zeros de transmissão de $\mathbf{h}(z)$ [13], [14].

Assim, um sistema SIMO definido pelo vetor de polinômios $\mathbf{h}(z)$ é dito de fase mínima se todos as raízes de $\gamma(z)$ estiverem localizadas no interior da circunferência de raio

[2]Define-se matriz unimodular como aquela que possui determinante igual a uma constante não nula.

[3]Define-se posto normal de colunas como o maior valor de $rank(\mathbf{H}(z))$ para algum z.

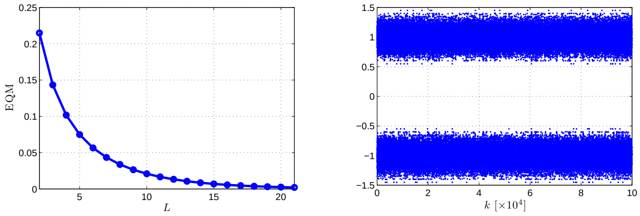

Fig. 3. Canal SIMO de fase mínima - Variação do erro quadrático médio entre a saída do FEP e o sinal desejado em função da ordem L do FEP, e o sinal recuperado quando $L = 10$.

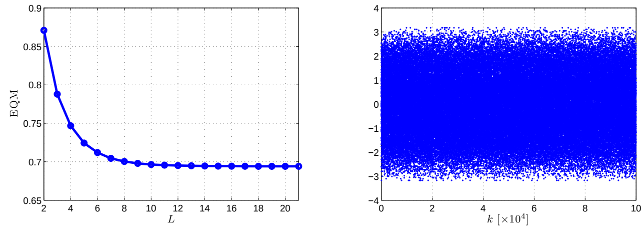

Fig. 4. Canal SIMO de fase máxima - Variação do erro quadrático médio entre a saída do FEP e o sinal desejado em função da ordem L do FEP, e o sinal recuperado quando $L = 10$.

unitário (CRU). É importante notar que um sistema SIMO de fase mínima pode, a princípio, apresentar subcanais com zeros fora da CRU, desde que os zeros em comum estejam dentro da CRU.

A partir desta definição, pode-se ampliar as condições nas quais a equalização ZF de um canal SIMO é viável [13]:

Teorema 3 (Equalizabilidade de sistemas SIMO): Se um sistema SIMO tem m saídas com função de transferência polinomial $\mathbf{h}(z)$ e tendo a forma dada por (7), então:

- A função de transferência $\mathbf{h}(z)$ é perfeitamente equalizável se e somente se $\mathbf{h}(z)$ for de fase mínima, i.e., os zeros de $\gamma(z)$ se encontram dentro da CRU;
- A função de transferência $\mathbf{h}(z)$ é perfeitamente equalizável por meio de estruturas FIR se e somente se $\gamma(z) = z^{-d}$ para algum $d > 0$, i. e., as funções $h_p(z)$ possuem zeros em comum apenas no infinito.

Portanto, de acordo com o Teorema 3, se o canal possuir zeros em comum, este só será equalizável se os zeros em comum estiverem localizados dentro da CRU. Mesmo assim, a equalização perfeita somente será obtida se o equalizador apresentar uma estrutura IIR, condição similar à encontrada no caso SISO. Assim, de maneira análoga aos canais SISO de fase mínima, ainda será possível recuperar o sinal transmitido mesmo que não se obtenha a condição ZF.

A fim de ilustrar a possibilidade de equalização, mesmo que não perfeita, de canais com zeros em comum, apresentamos nas figuras 3 e 4 resultados obtidos utilizando o filtro de erro de predição em duas situações distintas: um canal de fase mínima e um de fase máxima.

No primeiro caso, o sistema SIMO é composto por 2 subcanais, cada um com 2 zeros, sendo um zero em comum em $-0,9$. Na figura 3 é traçado o erro quadrático médio (EQM) entre o sinal na saída do FEP e a resposta desejada, i.e., o sinal transmitido, em função do comprimento do FEP. Conforme pode-se observar, o erro decai com o aumento na ordem do preditor, tendendo a zero para ordens acima de 20. É mostrado também a saída do FEP para $L = 10$, mostrando que o sinal recuperado assemelha-se a um sinal BPSK $(+1, -1)$.

No segundo caso, o sistema apresenta zeros em comum em $-1,3$, e observa-se que o aumento na ordem do FEP não faz o erro quadrático médio tender a zero. Isto mostra que o FEP não será capaz de equalizar o sistema de fase não mínima, evidenciando uma limitação inerente ao uso de critérios baseados exclusivamente em EO2.

Em seqüência, estendemos nossa análise a um modelo com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), no qual os sinais transmitido e recebido serão tratados como vetores da mesma forma como as funções de transferência do canal e filtro serão tratadas como matrizes polinomiais.

IV. EQUALIZAÇÃO DE SISTEMAS MIMO

A figura 5 ilustra o problema de equalização MIMO, ressaltando as dimensões das matrizes envolvidas. Considera-se que o número de sinais transmitidos n é menor ou igual que o número de sensores m.

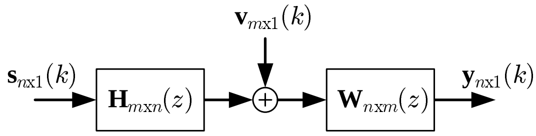

Fig. 5. Modelo MIMO, com n fontes e m sensores.

Enquanto que nos casos SISO e SIMO procura-se recuperar um único sinal de interesse, no caso MIMO, o objetivo do equalizador é recuperar a informação proveniente de diferentes fontes. Dessa forma, o próprio conceito de condição ZF deve ser revisto.

De maneira geral, pode-se dizer que um canal MIMO $\mathbf{H}(z)$ foi perfeitamente equalizado por um filtro $\mathbf{W}(z)$ se

$$\mathbf{W}(z)\mathbf{H}(z) = \mathbf{D}\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}(z), \qquad (8)$$

onde $\mathbf{D}$ e $\mathbf{P}$ representam, respectivamente, uma matriz diagonal não-nula e uma matriz de permutação, e $\mathbf{\Lambda}(z)$ denota uma matriz diagonal composta por monômios mônicos z^l. Em outras palavras, diz-se que a condição ZF foi atingida se os sinais na saída do equalizador representarem uma cópia dos sinais transmitidos, a menos de um possível atraso, um fator de escala e uma possível permutação na ordem na qual os sinais são recuperados.

A existência de tais equalizadores, a exemplo do que ocorre no caso SIMO, depende das características do canal. Para sistemas MIMO, uma condição que garante a inversibilidade do canal é dada pelo seguinte teorema [15]:

Teorema 4 (Extensão da Identidade de Bezout): Uma condição necessária e suficiente para que um sistema definido pela matriz polinomial $\mathbf{H}(z)$ seja perfeitamente inversível por estruturas FIR é que o maior divisor comum de todos os menores $n \times n$ de $\mathbf{H}(z)$ seja dado por um monômio não nulo $\Delta_H(z) = z^{-d}$, para $d \geq 0$. Esta condição é equivalente a ter o posto segundo colunas de $\mathbf{H}(z)$ completo, i.e., igual a n, para todo $z \in \mathbb{C}$ não nulo.

Note que a condição expressa no teorema 4 equivale à condição enunciada na identidade de Bezout (teorema 1) para o caso SIMO, onde $n = 1$.

De maneira similar ao caso SIMO, é possível ampliar o número de canais para os quais o equalizador ZF é factível caso estruturas IIR sejam consideradas para o projeto do filtro. Neste contexto, podemos enunciar o teorema sobre a equalizabilidade de estruturas MIMO [13]:

Teorema 5 (Equalizabilidade de sistemas MIMO): Considere um sistema MIMO $m \times n$ com função de transferência polinomial $\mathbf{H}(z)$. Considerando a forma de Smith associada a matriz $\mathbf{H}(z)$ dada por (6), temos que:

- a função de transferência $\mathbf{H}(z)$ é perfeitamente equalizável se e somente se $\mathbf{H}(z)$ for de fase mínima, ou seja, todas raízes de $\gamma_i(z)$ se encontram dentro da CRU;
- $\mathbf{H}(z)$ é perfeitamente equalizável por uma estrutura FIR se e somente se $\gamma_i(z) = z^{-d_i}$ para algum $d_i \geq 0$.

O teorema garante que nestas condições existe um sistema FIR que inverte perfeitamente o canal, mas não menciona nada a respeito de como obtê-lo, tampouco se o filtro de erro de predição seria efetivo neste caso. No entanto, é de se esperar que o uso de um FEP sofra de limitações adicionais, uma vez que o equalizador deve recuperar não mais um sinal, mas um conjunto de sinais.

De fato, o uso de FEP permite, na melhor das hipóteses, recuperar um vetor de sinais que será dado por

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}(0)\mathbf{s}(k). \tag{9}$$

Isto indica que o vetor de sinais recuperado será, na melhor das hipóteses, uma mistura linear das fontes, e a separação completa dos sinais dependerá, necessariamente[4], do uso de EOS.

Note, porém, que o vetor de sinais $\mathbf{y}(k)$ contém apenas amostras das fontes no instante k, indicando o equalizador baseado no FEP tende a recuperar os sinais sem atraso de equalização. Por outro lado, o teorema 4 garante a existência de um equalizador ZF FIR, não necessariamente uma solução ZF com atraso de equalização nulo. Portanto, fica claro que a abordagem utilizando FEP será válida somente se o canal admitir uma solução ZF com atraso nulo, o que ocorre para canais ditos *irredutíveis*:

Definição 2 (Sistema irredutível): A função de transferência $\mathbf{H}_I(z)$ é dita *irredutível* se o posto segundo colunas de $\mathbf{H}_I(\lambda)$ é igual a n para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Em outras palavras, $\gamma_i(z) = constante$ para todo i.

Para estes canais, o erro de predição tenderá a ser igual a (9). Nos demais casos, a limitação do uso de FEP é melhor compreendida considerando-se o teorema de *fatoração irredutível-paraunitária* [15]:

Teorema 6 (Fatorização Paraunitária-Irredutível): Seja qualquer sistema perfeitamente equalizável $\mathbf{H}(z)$ com $m > n$, e seja $\Delta_H(z) = z^{-l}$, onde $\Delta_H(z)$ é maior divisor comum mônico de todos $n \times n$ menores de $\mathbf{H}(z)$. Então, $\mathbf{H}(z)$ pode ser fatorado da seguinte forma:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{H}_I(z)\mathbf{H}_P(z), \tag{10}$$

onde $\mathbf{H}_I(z)$ é um fator irredutível de $\mathbf{H}(z)$ e $\mathbf{H}_P(z)$ é um *fator paraunitário* de $\mathbf{H}(z)$, i.e.:

$$\mathbf{H}_P(e^{-jw})\mathbf{H}_P^H(e^{-jw}) = \mathbf{I}, \tag{11}$$

para todo w .

Dessa forma, qualquer sistema FIR perfeitamente equalizável pode ser decomposto em um fator irredutível e outro paraunitário. Assim, de maneira geral, pode-se dizer que, para todo canal perfeitamente equalizável, o FEP é capaz de reduzir o sistema a um filtro paraunitário. Note que um FEP $\mathbf{W}(z)$ age como um filtro branqueador, ou seja

$$\mathbf{W}(z)\mathbf{H}(z) = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{H}}_P(z), \tag{12}$$

onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal não-singular $(n \times n)$ e $\tilde{\mathbf{H}}_P(z)$ é uma matriz paraunitária.

Pode-se concluir então que para recuperar os sinais transmitidos de um canal MIMO se faz necessário o uso de EOS do sinal observado na saída do canal, diferentemente como nos casos SISO e SIMO, onde as EO2 proporcionam informação suficiente para se equalizar canais em algumas situações. O fato crucial que diferencia as abordagens é a existência de mais do que um sinal fonte a ser recuperado.

V. Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho foram analisadas as condições necessárias e suficientes de equalização para sistemas SISO, SIMO e MIMO, bem como as limitações do uso de EO2 na solução dos problemas. Para tal se fez uso do teorema de Bezout, e, a fim de estender os conceitos de zeros e sistemas de fase mínima a sistemas SIMO e MIMO, da forma de Smith de matrizes polinomiais.

Para sistemas SISO, o canal só será perfeitamente equalizável se o mesmo for composto apenas por pólos ou for um canal de fase mínima. Neste segundo caso o equalizador deverá, necessariamente, apresentar uma estrutura IIR. No entanto, vimos que mesmo na impossibilidade de equalização ZF, é possível recuperar a informação transmitida utilizando-se equalizadores que aproximam a solução ZF. Neste contexto, o filtro de erro de predição representa uma possível solução, desde que o canal seja de fase mínima.

No caso dos sistemas SIMO e MIMO, o canal só será equalizável perfeitamente se a função de transferência do canal possuir zeros no infinito ou o sistema apresentar a característica de fase mínima. Se nos restringirmos a equalizadores com estrutura FIR, somente canais com zeros no infinito serão perfeitamente equalizáveis. Porém, no caso SIMO, a exemplo do que ocorre em sistemas SISO, mesmo quando o sistema

[4]Visto que as fontes são i.i.d. Caso as fontes possuam espectro distintos, ou sejam processos não estacionários, é possível derivar métodos de separação baseados exclusivamente em EO2.

não for perfeitamente inversível, ainda é possível utilizar FEP para recuperar a informação transmitida.

Já no caso de sistemas MIMO, a informação contida nas EO2 não será, em geral, suficiente para atingir a solução ZF. Neste caso, o FEP pode servir como uma etapa de pré-processamento dos dados, reduzindo o problema a um equivalente, no qual o canal é um sistema paraunitário. Após esta etapa, EOS serão necessárias para se atingir a solução final do problema.

Esta última observação nos leva a conceber, como uma proposta interessante e imediata de trabalho futuro, a extensão da idéia da cascata entre equalizadores cegos de amplitude e de fase aplicados ao caso SISO em [16] ao caso MIMO. De fato, no caso MIMO trata-se de recuperar os sinais num contexto de mistura convolutiva, o que poderia ser obtido por uma associação entre a matriz FEP e uma matriz paraunitária. A busca de métodos de otimização dos parâmetros dessas matrizes, seja num contexto adaptativo ou por blocos de dados, abre interessantes perspectivas de investigação

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, Capes e à FAPESP pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

[1] S. H. U. Qureshi, "Adaptive Equalization", *Proceedings of the IEEE*, vol. 73, no. 9, 1985.

[2] R. W. Lucky, "Techniques for adaptive equalization of digital communication", *Bell System Tech. J.*, v. 45, pp. 255–286, 1966.

[3] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4ª ed., Prentice Hall, 2002.

[4] A. Benveniste, M. Goursat e G. Ruget, "Robust Identification of a Nonminimum Phase System: Blind Adjustment of a Linear Equalizer in Data Communications", *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-25, pp. 385–399, 1980.

[5] O. Shalvi e E. Weinstein, "New Criteria for Blind Deconvolution of Nonminimum Phase Systems (Channels)", *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 36, pp. 312–321, 1990.

[6] L. Tong, G. Xu e T. Kailath, "Blind identification and equalization based on second-order statistics: A Time Domain Approach", *IEEE Trans. on Information Theory*, v. 40, no. 2, março de 1994.

[7] C. B. Papadias, Methods for Blind Equalization and Identification of Linear Channels, Tese de Doutorado, École Nationale Supérieure des Télécommunications (França), 1995.

[8] V. U. Reddy, C. B. Papadias e A. J. Paulraj, "Blind Identifiability of Certain Classes of Multipath Channels from Second-Order Statistics Using Antenna Arrays", *IEEE Signal Processing Letters*, 4(5), pp. 138–141, 1997.

[9] A. V. Oppenheim, R. W. Buck e J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, 2ª ed., Prentice Hall, 1999.

[10] P. S. R. Diniz, E. A. Barros da Silva, S. L. Netto, *Processamento Digital De Sinais: Projeto e Análise de Sistemas*, Bookman Editora, 2004.

[11] M. G. Bellanger, *Adaptative Digital filters*, 2ª ed., Marcel Dekker, 2001.

[12] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall, 1980.

[13] E. Bai e Z. Ding, "Zero-Forcing Equalizability of FIR and IIR Multichannel Systems with and without Perfect Measurements", *IEEE Trans. on Communications*, v. 48, no. 1, janeiro de 2000.

[14] F. M. Callier e C. A. Desoer, *Multivariable Feedback Systems*, New York, Springer-Verlag, 1982.

[15] Y. Inouye, R. W. Liu, "A System-Theoretic Foundation for Blind Equalization of an FIR MIMO Channel System", *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, v. 49, no. 4, abril de 2002.

[16] C. A. F. Rocha, J. M. T. Romano, Self Learning Deconvolution Using a Cascade of Magnitude and Phase Equalizer, Proc. IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems, pp. 255–258, Rio de Janeiro, 1995.