

# Esquemas de Modulação Não-Lineares Associadas a Superfícies Mínimas

Rodrigo Gusmão Cavalcante e Reginaldo Palazzo Jr.

**Resumo**—Neste trabalho usamos uma interpretação geométrica que associa esquemas de modulações não-lineares a superfícies no espaço Euclidiano para construir e analisar novas modulações não-lineares. Para tanto, uma expressão aproximada para o erro quadrático médio foi derivada e aplicada a espaços de curvatura seccional constante, indicando o uso de espaços hiperbólicos para o projeto de modulações. Além disso, modulações não-lineares associadas a superfícies mínimas foram relacionadas a minimização do erro quadrático médio e uma modulação associada a superfície mínima helicóide foi proposta. Por fim, determinamos uma condição entre a energia média do ruído e os valores das curvaturas média e Gaussiana com o objetivo de diminuir a ocorrência de erro de limiar.

**Palavras-Chave**—Modulação não-linear, superfícies mínimas, curvatura Gaussiana, erro quadrático médio.

**Abstract**—In this paper we use a geometrical interpretation that associates twisted modulation schemes to surfaces in Euclidian space to design and analyze new non-linear modulations. Thus, an approximate expression for the mean-square error was derived and applied to spaces of constant sectional curvature, indicating the use of hyperbolic space for the project of modulations. Moreover, non-linear modulations associated with minimal surfaces were related the minimization of the mean-square error and a modulation associated with the helicoid minimal surface was proposed. Finally, we determine a condition involving the noise average energy and the mean and Gaussian curvatures with the objective of to minimize the threshold error.

**Keywords**—Twisted modulation, minimal surface, Gaussian curvature, mean-square error.

## I. INTRODUÇÃO

Em [3], [6], [8] e em [9] as técnicas de modulações não-lineares foram interpretadas geometricamente como curvas ou superfícies no espaço Euclidiano. Nestes trabalhos, o comprimento da curva e a métrica da superfície foram utilizados para obter uma expressão aproximada para o erro quadrático de sistemas de comunicações.

Neste trabalho faremos uso dessa interpretação geométrica em um sistema de comunicações como o apresentado na Figura 1. Neste caso, consideramos que este sistema transmite um vetor de variáveis aleatórias  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_M]$ ,  $m_i \in (-1, 1)$ , usando uma modulação não-linear através de um canal sujeito a ação de um ruído Gaussiano aditivo branco (AWGN).

Além disso, consideramos um esquema de modulação que transmita o vetor  $\mathbf{m}$ , pelo seguinte sinal modulado

$$s_{\mathbf{m}}(t) = s_1(\mathbf{m})\varphi_1(t) + \dots + s_N(\mathbf{m})\varphi_N(t), \quad (1a)$$

Rodrigo Gusmão Cavalcante e Reginaldo Palazzo Jr., Departamento de Telemática (DT), Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), emails: rgc@dt.fee.unicamp.br e palazzo@dt.fee.unicamp.br.

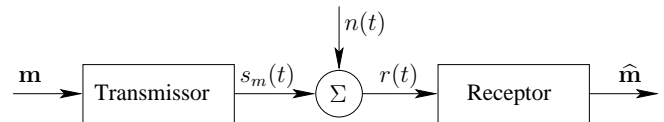


Fig. 1. Exemplo de um diagrama de blocos de sistema de comunicações para a transmissão de um vetor de variáveis aleatórias contínuas.

onde  $\varphi_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , é um conjunto de sinais ortogonais de energia unitária. Geometricamente, esses sinais podem ser interpretados como um conjunto de vetores ortonormais  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , gerando uma base de vetores para o espaço Euclidiano  $N$ -dimensional. Com isso, o sinal modulado (1a) pode ser representado vetorialmente por

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\mathbf{m}} &= s_1(\mathbf{m})\varphi_1 + s_2(\mathbf{m})\varphi_2 + \dots + s_N(\mathbf{m})\varphi_N \\ &= [s_1(\mathbf{m}), s_2(\mathbf{m}), \dots, s_N(\mathbf{m})]. \end{aligned} \quad (1b)$$

Neste caso, observe que geometricamente (1b) representa uma imersão do  $\mathbb{R}^M$  no  $\mathbb{R}^N$ , veja [5], podendo ser interpretada como uma parametrização de uma superfície ( $M = 2$ ,  $N = 3$ ), uma hipersuperfície ( $N > M \geq 2$ ) ou uma curva ( $M = 1$ ) no  $\mathbb{R}^N$ , como previsto em [3]. Com isso, as técnicas de modulação podem ser associadas a espaços mais gerais que o Euclidiano, e suas análises de desempenho devem ser realizadas com o auxílio da geometria diferencial [4], ou mais geralmente, com o auxílio da geometria Riemanniana [5].

Neste trabalho, o parâmetro considerado para medir o desempenho dos sistemas de comunicações considerados é o erro quadrático médio, definido como

$$\bar{\epsilon}^2 \triangleq \frac{1}{M} E [|\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}|^2] = \frac{1}{M} \overline{|\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}|^2}, \quad (2)$$

onde  $|\cdot|$  é a norma de um vetor e  $E[\cdot]$  é o operador esperança, medido conjuntamente para todas as  $\mathbf{m}$  entradas permitidas e todas as possíveis estimativas  $\hat{\mathbf{m}}$  determinadas pelo receptor após a ação do ruído.

Além disso, para um melhor entendimento dos resultados descritos neste trabalho, os desempenhos das modulações propostas serão apresentados em função de gráficos da relação sinal ruído do canal de transmissão (CSNR) versus a relação sinal ruído na saída do receptor (SNR), definidos como

$$\text{CSNR} \triangleq \frac{\bar{E}_{\mathbf{m}}}{\mathcal{N}} \quad \text{e} \quad \text{SNR} \triangleq \frac{\bar{m}^2}{\epsilon^2}, \quad (3)$$

onde  $\bar{m}^2$  é o valor esperado da norma quadrada (energia média) do vetor de variáveis aleatórias  $\mathbf{m}$  de médias nulas,  $\mathcal{N}$  é a energia média de ruído presente no canal de transmissão e  $\bar{E}_{\mathbf{m}}$  é a energia média de transmissão do sinal  $s_{\mathbf{m}}(t)$ , definida

como

$$\bar{E}_m \triangleq E[|\mathbf{s}_m|^2] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t) dt\right], \quad (4)$$

onde o operador esperança, neste caso, é medido para todos os possíveis valores de  $\mathbf{m}$ .

Neste trabalho, as curvas de desempenho (CSNR *versus* SNR) dos sistemas propostos foram comparadas com a curva de um sistema ótimo, denotada pela sigla OPTA e definida em [1] pela seguinte relação

$$\text{SNR} = (1 + \text{CSNR})^{N/M}, \quad (5)$$

onde  $(N/M)$  é a razão entre as dimensões dos sinais modulado e não modulado, respectivamente. Por exemplo, para o caso particular de modulações associadas a superfícies essa razão vale  $3/2$ , pois neste caso  $\mathbf{s}_m \in \mathbb{R}^{N=3}$  e  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{M=2}$ .

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção II apresentamos uma expressão aproximada para o erro quadrático médio e aplicamos essa expressão a espaços de curvatura seccional constante. Nas Seções III e IV modulações não-lineares associadas a superfícies mínimas foram relacionadas a minimização do erro quadrático médio. Na Seção V determinamos uma condição entre a energia média do ruído e os valores das curvaturas média e Gaussiana com o objetivo de diminuir a ocorrência de erro de limiar. Na Seção VI construímos e analisamos o desempenho de uma modulação associada a superfície de uma helicóide. Finalmente na Seção VII as conclusões são apresentadas.

## II. UMA APROXIMAÇÃO PARA O ERRO QUADRÁTICO MÉDIO

Neste momento, considere que o sistema de comunicações esteja sujeito a ação de um ruído AWGN, representado pelo vetor  $\mathbf{n}$ , de energia média  $\mathcal{N}$ , sendo  $\sigma^2 = \mathcal{N}_0/2$  a energia média de ruído por dimensão.

Além disso, considere que quando um receptor de máxima verossimilhança é usado, então a estimativa  $\hat{\mathbf{m}}$  é obtida como sendo o valor de  $\mathbf{m}$  que minimiza  $|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m|$ , isto é, o receptor estima pelo sinal  $\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{m}}}$  mais próximo de  $\mathbf{r}$ . Matematicamente, a estimativa  $\hat{\mathbf{m}}$  deve satisfazer o seguinte sistema de equações

$$\hat{\mathbf{m}} = \min_{\mathbf{m}} |\mathbf{r} - \mathbf{s}_m| \Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{r} - \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{m}}}) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_m}{\partial m_1} \Big|_{\mathbf{m}=\hat{\mathbf{m}}} = 0 \\ \vdots \\ (\mathbf{r} - \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{m}}}) \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_m}{\partial m_M} \Big|_{\mathbf{m}=\hat{\mathbf{m}}} = 0 \end{cases} \Rightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{m}}}) \cdot J_{\hat{\mathbf{m}}} = 0, \quad (6)$$

onde  $J_{\hat{\mathbf{m}}}$  é a matriz Jacobiana de  $\mathbf{s}_m$  no ponto  $\mathbf{m} = \hat{\mathbf{m}}$ , dada por

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{s}_m}{\partial m_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{s}_m}{\partial m_M} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial m_1} & \frac{\partial s_1}{\partial m_2} & \cdots & \frac{\partial s_1}{\partial m_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial s_N}{\partial m_1} & \frac{\partial s_N}{\partial m_2} & \cdots & \frac{\partial s_N}{\partial m_M} \end{bmatrix}.$$

Neste caso, observe que o vetor  $\mathbf{r} - \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{m}}}$  é simultaneamente ortogonal aos vetores tangentes  $\frac{\partial \mathbf{s}_m}{\partial m_i}$ ,  $i = 1, \dots, M$  em  $\mathbf{m} =$

$\hat{\mathbf{m}}$ . O que implica que  $\hat{\mathbf{m}}$  é obtido quando  $\mathbf{r} - \mathbf{s}_{\hat{\mathbf{m}}}$  é normal a  $\mathbf{s}_m$ , veja ilustração na Figura 2.

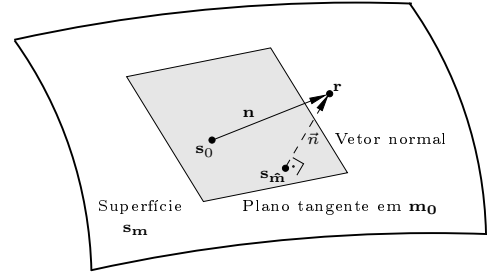


Fig. 2. Exemplo de recepção por máxima verossimilhança de um sistema de comunicações usando modulação não-linear associada a uma superfície.

Quando a energia média de ruído for suficientemente pequena, de maneira que o sinal recebido  $\mathbf{r}$  esteja na vizinhança do sinal enviado  $\mathbf{s}_0$ , então o sinal  $\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{m}}}$  pode ser localmente aproximado por

$$\mathbf{s}_m \approx \mathbf{s}_0 + (\mathbf{m} - \mathbf{m}_0) \cdot J_{\mathbf{m}_0}^T, \quad (7)$$

veja Figura 2 para melhor entendimento. Neste caso particular, observe que  $\mathbf{s}_{\hat{\mathbf{m}}}$  é obtido por uma projeção de  $\mathbf{r}$  no espaço tangente de  $\mathbf{s}_m$  em  $\mathbf{m}_0$ .

Usando a aproximação (7) no sistema de equações (6) é possível determinar uma aproximação para o erro quadrático médio dos sistemas de comunicações que usam a modulação não-linear (1b). Neste caso, como  $J_{\hat{\mathbf{m}}} = J_{\mathbf{m}_0}$  devido a aproximação realizada, então a estimativa  $\hat{\mathbf{m}}$  pode ser obtida da seguinte maneira

$$\begin{aligned} [\mathbf{r} - \mathbf{s}_0 - (\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0) \cdot J_{\mathbf{m}_0}^T] \cdot J_{\mathbf{m}_0} &= 0 \\ \Rightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{s}_0) \cdot J_{\mathbf{m}_0} &= (\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0) \cdot G_{\mathbf{m}_0} \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{m}} &= \mathbf{m}_0 + (\mathbf{r} - \mathbf{s}_0) \cdot J_{\mathbf{m}_0} \cdot G_{\mathbf{m}_0}^{-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $G_{\mathbf{m}_0} = J_{\mathbf{m}_0}^T \cdot J_{\mathbf{m}_0}$  é a matriz métrica ou o tensor métrica Riemanniana de  $\mathbf{s}_m$  em  $\mathbf{m}_0$ , dado por

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1M} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{M1} & g_{M2} & \cdots & g_{MM} \end{bmatrix},$$

onde  $g_{ij} = g_{ji} = \left(\frac{\partial \mathbf{s}_m}{\partial m_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_m}{\partial m_j}\right)$ , para  $i, j = 1, \dots, M$ .

Com o auxílio da Figura 2, note que o ruído do canal de transmissão é dado por  $\mathbf{n} = \mathbf{r} - \mathbf{s}_0$ . Neste caso, com o auxílio de (8) podemos obter uma expressão aproximada para o erro quadrático médio dado que  $\mathbf{m}_0$  tenha sido transmitido, como sendo

$$\bar{\epsilon}^2(\mathbf{m}_0) = \frac{1}{M} (\mathbf{r} - \mathbf{s}_0) \cdot J_{\mathbf{m}_0} \cdot (G_{\mathbf{m}_0}^{-1})^2 \cdot J_{\mathbf{m}_0}^T \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s}_0)^T \quad (9a)$$

$$= \frac{\sigma^2}{M} \sum_{i,j=1}^M g_{ij} \sum_{k=1}^M g_{ik}^{-1} g_{kj}^{-1} = \frac{\sigma^2}{M \det(G)} \sum_{i=1}^M G_{ii} \quad (9b)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2} \frac{g_{11} + g_{22}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}, \quad \text{para } M = 2, \quad (9c)$$

onde  $G_{ii}$ ,  $i = 1, \dots, M$  são os cofatores dos elementos  $g_{ii}$  da diagonal de  $G$  e os elementos  $g_{ij}$  são calculados em  $\mathbf{m}_0$ .

Neste caso, é importante informar que as expressões (9a) e (9c) haviam sido obtidas em [6] para o caso particular de modulações associadas a superfícies ( $M = 2$ ). Contudo, a expressão (9a) não informa claramente alguns pontos relevantes que são facilmente percebidos na expressão (9b), aqui desenvolvida. Por exemplo, pode-se verificar que o  $\overline{\epsilon^2}(\mathbf{m}_0)$  é inversamente proporcional ao quadrado do elemento de volume da variedade Riemanniana associada a  $\mathbf{s}_m$  e diretamente proporcional a soma dos quadrados dos elementos de volume das subvariedades Riemannianas de dimensão  $M - 1$  associadas a  $\mathbf{s}_m$ . Além disso, (9b) é mais adequada para a realização de técnicas de otimização visando a identificação de uma classe de hipersuperfícies que melhor se adequa ao processo de modulação, no caso, as hipersuperfícies que minimizam o  $\overline{\epsilon^2}(\mathbf{m}_0)$ .

Observe que o  $\overline{\epsilon^2}(\mathbf{m}_0)$  calculado por (9b) é função da métrica  $g_{ij}$ , que geralmente depende do valor de  $\mathbf{m}_0$  e da parametrização da superfície associada a modulação. No caso particular de utilizarmos uma parametrização isotérmica, cuja métrica é caracterizada por  $g_{ii} = g$  se  $i = j$  e  $g_{ij} = 0$  caso contrário, então o erro quadrático médio (9b) pode ser simplificado para

$$\overline{\epsilon^2}(\mathbf{m}_0) = \frac{\sigma^2}{g} = \frac{\mathcal{N}_0/2}{g}. \quad (10)$$

Neste momento podemos aplicar a expressão (10) para analisar o  $\overline{\epsilon^2}(\mathbf{m}_0)$  de um esquema de modulação associada a uma variedade Riemanniana  $M$ -dimensional com curvatura seccional constante ( $K$ ), veja [5], cuja métrica pode ser dada por

$$g = \left(1 + \frac{K}{4} \sum_{i=1}^M m_i^2\right)^{-2}. \quad (11)$$

Portanto, da substituição direta de (11) em (10) obtemos que o erro quadrático médio é dado por

$$\overline{\epsilon^2}(\mathbf{m}_0) = \mathcal{N}_0/2 \left(1 + \frac{K}{4} \sum_{i=1}^M m_i^2\right)^2, \quad (12)$$

o qual decresce com a diminuição do valor de  $K$ , veja Figura 3. Tal observação é muito importante, pois afirma que dentre as modulações associadas a espaços de curvatura constantes, aquelas associadas a espaços de curvatura constante negativa (espaços hiperbólicos) produzem um erro quadrático médio menor. Este fato indica que a curvatura deva ser considerada como um parâmetro de projeto relevante quando da proposta de novas técnicas de modulações não-lineares.

### III. PRIMEIRA VARIAÇÃO DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO

Nesta seção utilizamos um método de otimização, no qual foi possível identificar uma classe de superfícies que, quando associadas a esquemas de modulação, podem minimizar o erro quadrático médio. Contudo, nesta análise consideramos apenas modulações associadas a superfícies. Porém, espera-se que um resultado semelhante ao encontrado aqui possa ser generalizado, com o auxílio da geometria Riemanniana, para o caso de modulações associadas a hipersuperfícies.

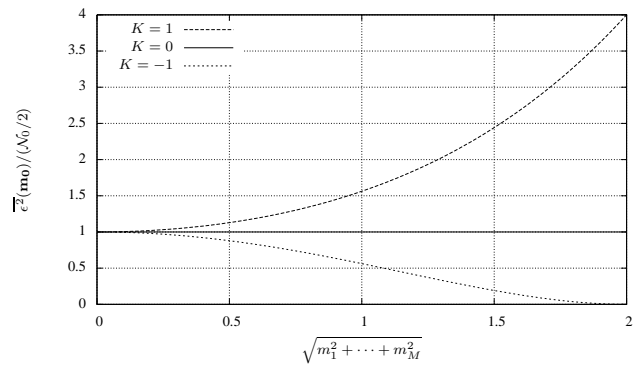


Fig. 3. Erro quadrático médio de modulações associadas a espaços de curvatura seccional constante,  $K = -1, 0$  e  $1$ .

Neste caso, considere que o esquema de modulação em questão esteja associado a uma superfície regular parametrizada,  $X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , na qual os parâmetros a serem transmitidos são  $(u, v)$  e pertencem ao domínio  $D$ . A mudança de notação,  $\mathbf{s}_m = X(u, v)$  e  $\mathbf{m} = [u, v]$ , foi necessária para que alguns resultados da geometria diferencial apresentados em [4] pudessem ser aqui aplicados sem maiores dificuldades.

Com o objetivo de determinar a classe de superfícies associada ao esquema de modulação que minimiza o erro quadrático médio, considere uma função diferenciável  $\eta : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e uma variação normal da superfície  $X(u, v)$  determinada por  $\eta(u, v)$  e caracterizada pela aplicação  $X^t : D \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida como

$$X^t(u, v) = X(u, v) + t\eta(u, v)N(u, v), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (13)$$

onde  $N(u, v)$  é o vetor normal unitário à superfície  $X(u, v)$ . Neste caso, usando (9c) o erro quadrático médio de uma modulação associada a parametrização (13) pode ser escrita da seguinte forma

$$\overline{\epsilon^2}(\mathbf{m}_0) = \frac{\mathcal{N}_0}{4} \frac{E^t + G^t}{E^t G^t - (F^t)^2}, \quad (14)$$

onde  $E^t = (X_u^t \cdot X_u^t)$ ,  $G^t = (X_v^t \cdot X_v^t)$  e  $F^t = (X_u^t \cdot X_v^t)$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X^t(u, v)$ , dados em [4]. Dessa forma, o ponto crítico de (14) é obtido derivando-se  $\overline{\epsilon^2}(\mathbf{m}_0)$  em relação a  $t$  e igualando-a a zero em  $t = 0$ , isto é,

$$-\frac{e + g}{EG - F^2} + \frac{(E + G)(eG - 2fF + gE)}{(EG - F^2)^2} = 0,$$

onde  $e$ ,  $f$  e  $g$  são os coeficientes da segunda forma fundamental de  $X(u, v)$ , veja [4]. Portanto, tal equação é satisfeita quando  $X(u, v)$  for uma parametrização isotérmica ( $E = G$  e  $F = 0$ ) e sua curvatura média ( $H$ ) for igual a zero, isto é,

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{e + g}{2E} = 0 \Rightarrow e = -g. \quad (15)$$

Com isso, um esquema de modulação associado a uma superfície mínima ( $H = 0$ ) parametrizada isotermicamente é um ponto crítico para o erro quadrático médio. Superfícies mínimas parametrizadas isotermicamente podem ser obtidas pela representação de Weierstrass, que usa uma representação integral local para superfícies mínimas em domínios simples-

mente conexos. Caso necessário consulte [2] para obter mais informações sobre essa representação e sobre as superfícies mínimas.

A seguir será determinada sobre quais condições uma superfície mínima é um ponto crítico de mínimo para o erro quadrático médio.

#### IV. SEGUNDA VARIAÇÃO DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO

Em  $t = 0$ , a segunda derivada do erro quadrático médio (14) em relação a  $t$ , com  $H = 0$ ,  $E = G$  e  $F = 0$ , é dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}^2(\mathbf{m}_0)}{\partial t^2} \right|_{t=0} &= -2 \frac{\eta_u^2 + \eta_v^2}{E^2} - 16 \eta^2 \frac{eg - f^2}{E^3} \\ &= -\frac{2}{E} \left( \frac{\eta_u^2 + \eta_v^2}{E} + 8 \eta^2 K \right), \end{aligned} \quad (16)$$

onde  $K$  é a curvatura Gaussiana de  $X(u, v)$  dada por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{eg - f^2}{E^2}. \quad (17)$$

Com isso, note de (16) que a segunda derivada em relação a  $t$  de  $\bar{\epsilon}^2(\mathbf{m}_0)$  pode ser positiva caso a superfície  $X(u, v)$  possua curvatura Gaussiana negativa. Neste caso, as superfícies mínimas se adequam perfeitamente, pois suas curvaturas Gaussianas são sempre negativas, exceto quando a superfície é o plano ( $K = 0$ ), caso da modulação linear.

Entretanto, a condição para que (16) seja positiva, além de depender de  $K$ , depende também da função  $\eta(u, v)$ . Neste caso, é necessário então caracterizar ou restringir as variações normais  $X^t(u, v)$ , de maneira que uma superfície mínima com parâmetros isotérmicos seja um ponto crítico de mínimo do erro quadrático médio. Um caso interessante para a variação  $X^t(u, v)$  ocorre quando  $\eta(u, v)$  é constante, pois  $\eta_u = \eta_v = 0$  e como  $K < 0$ , então a segunda derivada em relação a  $t$  de  $\bar{\epsilon}^2$  é positiva. Além disso, quando  $\eta(u, v)$  ocasionar pequenas variações em  $X^t(u, v)$ , isto é  $\eta_u/\eta$  e  $\eta_v/\eta \ll 1$ , então a superfície mínima parametrizada isotermicamente minimiza o erro quadrático médio. Em outras palavras, sob pequenas perturbações,  $X(u, v)$  é estável quanto a sua minimização do  $\bar{\epsilon}^2(\mathbf{m}_0)$ .

Uma outra maneira de caracterizar a função  $\eta(u, v)$ , é supor que a energia média de transmissão  $\bar{E}_m$  permaneça praticamente constante durante a variação  $X^t(u, v)$ , ou que a mesma seja minimizada para algum valor de  $t$ . Neste caso, considere que o valor médio de  $X(u, v)$  seja igual a origem do sistema de coordenadas, então a energia média de transmissão (4) pode ser dada por

$$\bar{E}_m = \iint_D (X^t \cdot X^t) p_{uv} du dv. \quad (18)$$

Com isso, podemos assumir  $\eta(u, v) = c(X, N)$ , onde  $c$  é uma constante, cujo valor pode ser igual a  $-2/\epsilon$ , para que a variação  $X^t(u, v)$  possa contemplar superfícies com energia média de transmissão maiores ( $-\epsilon < t < 0$ ), igual ( $t = \epsilon$ ) ou menores ( $0 < t < \epsilon$ ) do que a inicial ( $t = 0$ ).

Portanto, os valores de  $\eta_u$  e  $\eta_v$ , necessários para analisar (16), podem ser obtidos da consideração  $\eta(u, v) = c(X, N)$

e de algumas relações descritas em [4], da seguinte forma

$$\eta_u^2 + \eta_v^2 = -c^2 K \left[ (X \cdot X_u)^2 + (X \cdot X_v)^2 \right]. \quad (19)$$

Assim, aplicando (19) em (16) pode-se determinar a seguinte condição para que uma superfície mínima parametrizada isotermicamente seja um ponto crítico de mínimo do erro quadrático médio,

$$\frac{2c^2 K}{E} \left[ \left( X \cdot \frac{X_u}{|X_u|} \right)^2 + \left( X \cdot \frac{X_v}{|X_v|} \right)^2 - 8(X \cdot N)^2 \right] > 0,$$

mas como  $K < 0$  e os vetores  $\frac{X_u}{|X_u|}$ ,  $\frac{X_v}{|X_v|}$  e  $N$  são ortonormais, então essa condição pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{2c^2 K}{E} \left[ (X \cdot X) - 9(X \cdot N)^2 \right] > 0 &\Rightarrow \\ |X|^2 - 9|X|^2 \cos^2(\theta) < 0 &\Rightarrow |\cos(\theta)| > \frac{1}{3}, \end{aligned} \quad (20)$$

onde  $\theta$  é o menor ângulo formado entre os vetores  $X$  e  $N$ .

Portanto, como  $\arccos(1/3) \approx 70.5^\circ$  então pode-se afirmar que mesmo sujeita a variações significativas, desde que  $\eta(u, v) = c(X, N)$ , a superfície mínima  $X(u, v)$  ainda é estável quanto a minimização do  $\bar{\epsilon}^2(\mathbf{m}_0)$ . Por esse motivo, nas próximas seções novos esquemas de modulações sobre superfícies mínimas serão propostos e analisados.

#### V. ANÁLISE DA CURVATURA EM MODULAÇÕES

Nesta seção, mostraremos que tanto a curvatura média ( $H$ ) quanto a curvatura Gaussiana ( $K$ ) podem influenciar na ocorrência de erros de limiar (*threshold*) em modulações não-lineares. O erro de limiar é definido em [3] e está relacionado a forma geométrica da superfície associada à modulação.

Neste caso, quando o ruído é AWGN e o receptor é de máxima verossimilhança, então uma solução para o problema  $\min |\mathbf{r} - X(u, v)|$ , como descrito em (6), deve satisfazer o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} (\mathbf{r} - X) \cdot X_u = 0, \\ (\mathbf{r} - X) \cdot X_v = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Contudo, para que as soluções de (21) sejam pontos críticos de mínimo, então os autovalores da matriz Hessiana do problema  $\min |\mathbf{r} - X(u, v)|$  devem ser positivos. Para tanto, verifique de (21) que o vetor  $(\mathbf{r} - X)$  é ortogonal a  $X_u$  e a  $X_v$ . Isto é,  $(\mathbf{r} - X)$  possui a direção do vetor normal à superfície  $X(u, v)$  e, portanto, pode ser escrito da seguinte maneira  $(\mathbf{r} - X) = hN$ , onde  $h$  é uma constante. Dessa forma, a matriz Hessiana pode ser escrita como

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -he + E & -hf + F \\ -hf + F & -hg + G \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Com isso, podemos obter os autovalores de (22) como sendo as raízes do seguinte polinômio característico

$\det(\mathbf{H} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - 2\lambda E(1 - hH) + E^2(h^2K - 2hH + 1)$ , quando  $E = G$  e  $F = 0$ , cujas raízes são dadas por

$$\lambda = E \left( 1 - hH \pm |h| \sqrt{H^2 - K} \right). \quad (23)$$

Neste caso, a condição necessária para que os autovalores (23) sejam positivos, pode ser expressa por

$$hH + |h|\sqrt{H^2 - K} < 1, \quad (24)$$

que, no caso particular de  $X(u, v)$  ser uma superfície mínima ( $H = 0$ ), pode ser convenientemente reescrita como

$$|h| < \frac{1}{\sqrt{-K}}. \quad (25)$$

Além disso, o parâmetro  $h$  pode ser associado ao ruído de transmissão com o auxílio da Figura 2, da aproximação (7) e da equação (21) da seguinte forma

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= X_0 + \mathbf{n} \\ \hat{X} &= X_0 + (\hat{u} - u_0)X_u + (\hat{v} - v_0)X_v \\ \mathbf{r} &= \hat{X} + hN \end{aligned} \right\} \Rightarrow h = (\mathbf{n} \cdot N). \quad (26)$$

Dessa forma, quando o ruído do canal de transmissão é AWGN, então o parâmetro  $h$  pode ser considerado como uma variável aleatória Gaussiana de média nula e variância  $N_0/2$ . Assim, com o auxílio de (25) e de (26), a ocorrência de erros de limiar pode ser minimizada quando a seguinte condição for satisfeita

$$\frac{N_0}{2} \leq \min \left\{ \frac{1}{-K} \right\}. \quad (27)$$

Com isso, o valor da curvatura Gaussiana deve ser considerado no projeto de esquemas de modulações, principalmente, quando essas modulações são associadas a superfícies mínimas com parametrização isotérmica.

## VI. EXEMPLO DE MODULAÇÃO ASSOCIADA À SUPERFÍCIE MÍNIMA HELICÓIDE

Nas seções anteriores verificamos que as curvaturas média ( $H = 0$ ) e Gaussiana ( $K < 0$ ) caracterizam as superfícies mínimas como uma classe de superfícies de interesse prático para a construção de novas técnicas de modulações não-lineares.

Dentre as infinitas possibilidades de superfícies mínimas, a superfície mínima helicóide foi escolhida por não possuir auto-interseções para evitar a ocorrência de erros de limiar, e por poder aumentar a área da superfície sem necessariamente acrescentar muito o valor da energia média de transmissão.

Para uma melhor análise da influência da parametrização da superfície  $X(u, v)$  no desempenho dos sistemas de comunicações, serão consideradas três diferentes parametrizações para a superfície mínima helicóide, a saber

$$X(u, v) = [u \cos(\pi\beta v), u \sin(\pi\beta v), v], \quad (28a)$$

$$= [\sinh(u) \cos(\pi\beta v), \sinh(u) \sin(\pi\beta v), v], \quad (28b)$$

$$= [\sinh(\pi\beta u) \cos(\pi\beta v), \sinh(\pi\beta u) \sin(\pi\beta v), \pi\beta v], \quad (28c)$$

onde  $\beta$  é um parâmetro da modulação que influencia em seu desempenho. Geometricamente o parâmetro  $\beta$  está relacionado à quantidade de voltas da hélice, como indica os gráficos da superfície helicóide para  $\beta = 1, 2$  e  $3$  na Figura 4. Além disso, quando  $\beta = 0$  em (28a) e (28b), a superfície em questão é o plano e conseqüentemente a modulação associada é a modulação linear. Em outras palavras, quando  $\beta > 0$ , a modulação deixa de ser linear.

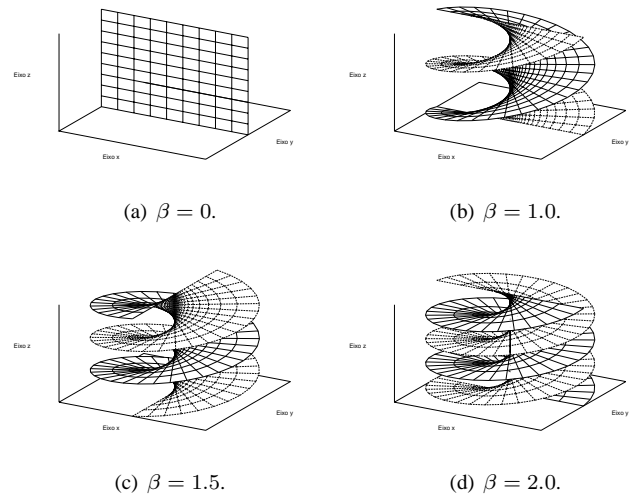


Fig. 4. Superfície mínima helicóide para, para  $\beta = 1, 1.5$  e  $2$ .

Neste caso, observamos que apesar das três parametrizações representarem a mesma superfície, os desempenhos obtidos para cada uma dessas modulações foram diferentes. Tal fato, está relacionado aos seguintes valores da primeira forma fundamental de cada uma dessas parametrizações,

$$E = 1, \quad G = 1 + (\pi\beta u)^2 \quad \text{e} \quad F = 0, \quad (29a)$$

$$E = \cosh^2(u), \quad G = 1 + \sinh^2(u)(\pi\beta)^2 \quad \text{e} \quad F = 0, \quad (29b)$$

$$E = G = (\pi\beta)^2 \cosh^2(\pi\beta u) \quad \text{e} \quad F = 0, \quad (29c)$$

respectivamente. Pois, segundo (9c), o erro quadrático médio decresce da modulação (29a) para a modulação (29b) e dessa para a modulação (29c), como indica a Figura 5.

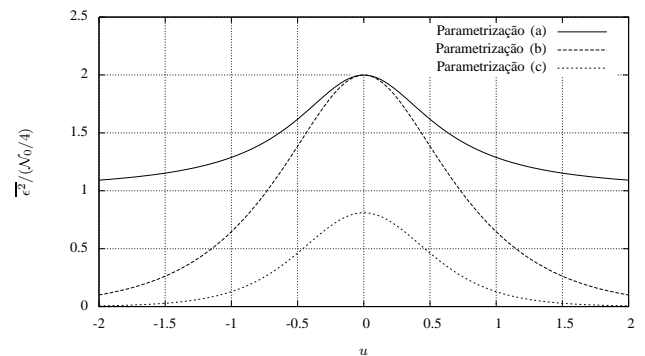


Fig. 5. Curvas do  $\bar{\epsilon}^2$  da modulação associada a superfície mínima helicóide, para cada uma das três parametrizações consideradas quando  $\beta = 0.5$ .

Tal fato pode ser explicado com o auxílio da Seção III, cujo resultado afirma que uma superfície mínima é um ponto crítico de mínimo do erro quadrático médio se estiver parametrizada isotermicamente, veja condição (15). Neste caso, segundo (29), a única parametrização com  $E = G$  e  $F = 0$  é a (28c), e por este motivo foi a que apresentou menor erro quadrático médio.

Além disso, foi realizada uma simulação computacional para determinar as curvas de desempenho (CSNR versus SNR) do sistema de comunicações associado à superfície mínima helicóide, para cada uma das parametrizações de (28).

Tais curvas de desempenho são apresentadas nas Figuras 6, 7 e 8, sendo que, como esperado, o sistema associado à parametrização isotérmica (28c) foi o que apresentou melhor desempenho, veja Figura 9 para melhor comparação. Na simulação computacional empregada, os vetores  $\overline{m}^2$  e  $\mathbf{n}$  foram obtidos usando um gerador de números aleatórios e cada um dos pontos das curvas simuladas foi obtido com o envio de aproximadamente 50 mil sinais aleatórios, o que garantiu uma confiabilidade satisfatória dos resultados encontrados.

Dessa forma, é possível verificar que os resultados obtidos nessa seção via simulação computacional estão de acordo com os resultados teóricos obtidos nas seções anteriores, demonstrando que o projeto geométrico de modulações não-lineares pode ser realizado de maneira eficiente, desde que a superfície associada a modulação satisfaça algumas características geométricas como as aqui apresentadas.

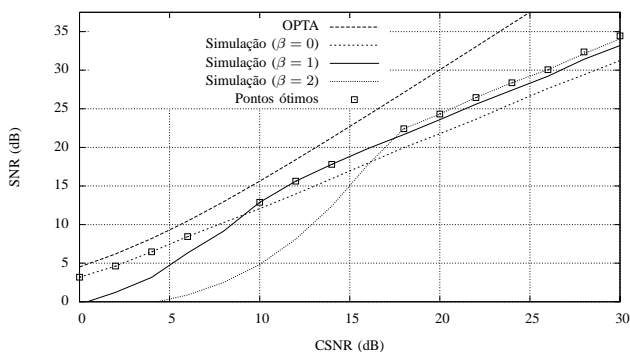


Fig. 6. Curvas de desempenho de uma modulação não-linear associada à superfície mínima helicóide parametrizada por (28a), para  $\beta = 1, 2$  e 3.

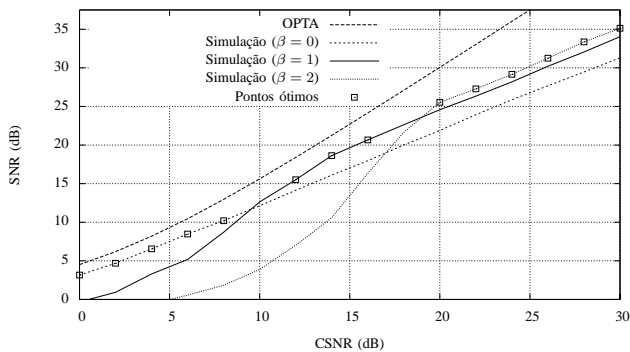


Fig. 7. Curvas de desempenho de uma modulação não-linear associada à superfície mínima helicóide parametrizada por (28b), para  $\beta = 1, 2$  e 3.

### VII. CONCLUSÕES

A interpretação geométrica que associa modulações a superfícies no espaço Euclidiano permitiu o uso de conceitos da geometria diferencial e Riemanniana no contexto de projetos de modulações. Com isso, uma expressão aproximada para o erro quadrático médio foi derivada e aplicada a espaços de curvatura seccional constante, indicando o uso de espaços hiperbólicos para o projeto de modulações. Além disso, verificamos que as modulações não-lineares associadas a superfícies mínimas minimizam o  $\overline{\epsilon}^2$ . Mostramos também que as curvaturas média e Gaussiana influenciam no erro de limiar

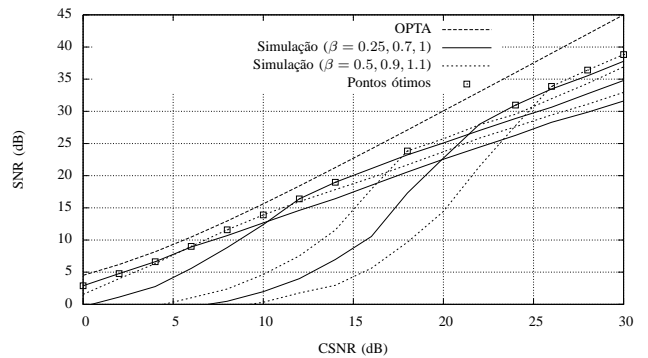


Fig. 8. Curvas de desempenho de uma modulação não-linear associada à superfície mínima helicóide parametrizada por (28c), para  $\beta = 0.25, 0.5, 0.7, 0.9, 1$  e 1.1.

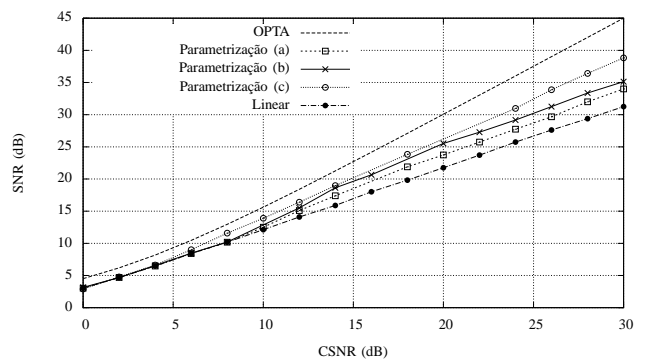


Fig. 9. Comparação entre as curvas de desempenho das três modulações associadas à superfície mínima helicóide.

e relacionamos essas curvaturas a energia média do ruído. Finalmente, concluímos que modulações não-lineares com bons desempenhos podem ser projetadas geometricamente.

### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPESP, ao CNPq e à CAPES pelo suporte financeiro recebido durante o período da realização desta pesquisa.

### REFERÊNCIAS

- [1] C.M. Thomas, C. L. May and G. R. Welty, "Hybride amplitude-and-phase modulation for analog data transmission," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-23, no. 6, pp. 634-645. June 1975.
- [2] J. Lucas M. Barbosa, A. Gervásio Colares, *Minimal Surfaces in  $R^3$* , Lecture Notes in Mathematics, No. 1195, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [3] J.M. Wozencraft and I. M. Jacobs, *Principles of Communication Engineering*, New York: John Wiley & Sons, Inc, 1965.
- [4] M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976.
- [5] M.P. do Carmo, *Riemannian Geometry* 1nd ed. (Birkhäuser, Boston 1992).
- [6] P.A. Floor, and T. A. Ramstad, "Noise analysis for dimension expanding mappings in source-channel coding," *IEEE - Seventh Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, Cannes, France, July, 2-5, 2006.
- [7] R.G. Cavalcante, e R. Palazzo Jr. "Construção e análise de desempenho de constelações de sinais M-PSK em superfícies mínimas", *XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações-SBT'03*, Rio de Janeiro, 2003.
- [8] R.G. Cavalcante, *Uma Análise da Influência da Curvatura do Espaço em Sistemas de Comunicações*, Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Campinas, Brasil, 2008.
- [9] R.G. Cavalcante, e R. Palazzo Jr. "Análise da curvatura de modulações não-lineares associadas a curvas," *XXV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações-SBrT'08*, Rio de Janeiro, 2008.