

# Probabilidade de Erro Bit em Receptor MRC com Modulação QAM sob Desvanecimento Generalizado: Parte I

Wamberto J. L. Queiroz, Marcelo S. Alencar e Francisco Madeiro

**Resumo**—Este artigo apresenta um tratamento matemático unificado para a avaliação da probabilidade de erro de bit dos esquemas de modulação M-PAM, M-QAM e R-QAM sob desvanecimento generalizado. As expressões obtidas para a BEP são escritas em termos da função geratriz de momentos da SNR por bit para cada ramo do receptor utilizado. Essa função geratriz de momentos varia de acordo com o tipo de desvanecimento considerado. São assumidos um receptor com razão máxima de combinação e codificação Gray para os bits modulados.

**Palavras-Chave**—Receptor MRC, desvanecimento generalizado, M-PAM, M-QAM, R-QAM.

**Abstract**—This article presents a unified mathematical treatment to the evaluation of the bit error probability (BEP) of the M-PAM, M-QAM and R-QAM modulation schemes, subject to generalized fading. The expressions obtained for the BEP are written in terms of the moment generating function of the signal-to-noise ratio per bit for each branch of the used receiver. That moment generating function varies in accordance with the type of fading considered. A maximum combining ratio receiver and Gray encoding for the modulated bits are assumed.

**Keywords**—MRC receiver, generalized fading, M-PAM, M-QAM, R-QAM.

## I. INTRODUÇÃO

A maioria dos sistemas de comunicações sem fio modernos tem seus sinais de informação constantemente submetidos a diferentes formas de desvanecimento, capazes de degradar seriamente a qualidade dos enlaces, caso soluções apropriadas não sejam adotadas. Uma das técnicas propostas para diminuir os efeitos do desvanecimento é a recepção com diversidade espacial, obtida pelo uso de arranjos de elementos de antenas igualmente espaçados, associados a um receptor que combina diversas réplicas recebidas de um mesmo sinal e maximiza sua relação sinal-ruído (SNR - *Signal to Noise Ratio*) de saída.

Essa estrutura de recepção, conhecida como receptor com razão máxima de combinação (MRC - *Maximal Ratio Combiner*), tem sido proposta por vários autores, associada a esquemas de modulação coerente em ambientes com desvanecimento Rayleigh e Nakagami [1]–[3]. Uma análise unificada da probabilidade de erro de símbolo (SEP - *Symbol Error Probability*) de esquemas de modulação coerente, sob diferentes formas de desvanecimento, foi apresentada em [4],

contendo inclusive expressões para o esquema M-QAM (*M-ary Quadrature Amplitude Modulation*).

Antes de 2002, qualquer avaliação do efeito do desvanecimento nos esquemas M-QAM, M-PAM (*M-ary Pulse Amplitude Modulation*) e R-QAM (*Rectangular Quadrature Amplitude Modulation*) só podia ser feita por meio das aproximações obtidas, até então, para a probabilidade de erro de bit desses esquemas sob o ruído aditivo gaussiano branco (AWGN - *Additive White Gaussian Noise*). Em 2002 uma importante contribuição obtida por K. Cho e D. Yoon [5] forneceu uma expressão generalizada para o cálculo da probabilidade de erro de bit (BEP - *Bit Error Probability*) para os esquemas M-QAM (quadrado) e R-QAM (retangular) sob ação do ruído AWGN e mapeamento por código Gray para as seqüências de bits. A partir desse resultado de Cho e Yoon, pode-se obter expressões mais gerais para a BEP dos esquemas de modulação citados, sob diferentes formas de desvanecimento, que englobem as contribuições fornecidas por meio de aproximações para a BEP dos esquemas M-QAM sob ruído AWGN.

Algumas dimensões de constelação M-QAM e R-QAM têm sido bastante utilizadas em implantações práticas de sistemas de comunicações por permitirem considerável aumento da taxa de transmissão sem aumento da largura de faixa ocupada. Devido a essa característica, as pesquisas que visam avaliar o desempenho de esquemas QAM em modelos de transmissão sem fio continuam despertando interesse. Nas referências [6] e [7], por exemplo, são apresentadas expressões para a probabilidade de erro de símbolo (SEP - *Symbol Error Probability*) do sistema QAM retangular em desvanecimento Nakagami. A expressão mostrada em [6] foi obtida a partir de uma expressão obtida em [8] para a SEP do QAM retangular sob ruído AWGN. Um dos termos da expressão de [8] contém um produto de duas funções  $Q(x)$  e complica a avaliação da SEP sob a fdp do desvanecimento. A vantagem das expressões de Cho e Yoon é que a BEP sob ruído gaussiano é escrita como uma soma de funções  $\text{erfc}(x)$  e no presente trabalho essas funções são reescritas e expressas no intervalo de integração  $[0, \pi/2]$ , que diminui consideravelmente o processo de avaliação numérica.

As aplicações dos esquemas de modulação QAM vão desde alguns modems com transmissão síncrona, que usam constelações 16-QAM, 64-QAM e 256-QAM, aos padrões de televisão digital DVB-T (*Digital Video Broadcasting-Terrestrial*), ISDB-T (*Integrated Services Digital Broadcasting-Terrestrial*) e ISDTV (*Integrated Services Digital TV*). No padrão ISDB-T os dados são codificados e arrançados em

Wamberto José Lira Queiroz, Universidade Federal do Ceará, Sobral, Brasil, wamberto@ufc.br. Marcelo Sampaio de Alencar, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Brasil, malencar@dee.ufcg.edu.br. Francisco Madeiro, Universidade de Pernambuco, Recife, Brasil, francisco-madeiro@yahoo.com.br. Os autores também estão com o Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (Iecom), Campina Grande, Brasil.

blocos de 188 bytes, chamados de MPEG2 TSP (*Transport Stream Packet*), são enviados para um segmentador e em seguida são arranjados em um, dois ou três blocos de codificação. Esses blocos são chamados de camadas e seus dados passam por moduladores e podem ser mapeados em símbolos das constelações 16-QAM ou 64-QAM.

No presente artigo, as expressões da BEP sob ruído AWGN obtidas em [5],  $P(E|\gamma)$ , são usadas para que se possa obter as novas expressões de BEP sob diferentes formas de desvanecimento por meio do cálculo da média

$$P_b = \int_0^{\infty} P_b(E|\gamma) p_{\gamma}(\gamma; \bar{\gamma}) d\gamma, \quad (1)$$

em que  $p_{\gamma}(\gamma; \bar{\gamma})$  é a função densidade de probabilidade (fdp) univariada da relação sinal-ruído (SNR) instantânea e  $\bar{\gamma}$  denota a SNR média. A avaliação dessa integral é feita, para os diferentes casos de desvanecimento considerados, expressando a função erro complementar  $\text{erfc}(x)$ , dada por

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad (2)$$

na forma

$$\text{erfc}(x) = 2Q(\sqrt{2}x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{\sin^2 v}\right) dv, \quad x \geq 0 \quad (3)$$

e usando a função geratriz de momentos que aparece em todos os casos analisados. Em (3) a função  $Q(x)$  representa a probabilidade de que uma variável aleatória gaussiana de média nula e variância unitária tenha valor maior que  $x$ . Antes de prosseguir com a avaliação da integral dada em (1), a próxima seção apresenta o modelo do canal de transmissão e uma breve discussão sobre diferentes formas de desvanecimento que podem ser considerados.

## II. MODELO DO CANAL E DO RECEPTOR

No modelo de ambiente de propagação considerado, o sinal transmitido  $s(t)$  é enviado por meio de  $N$  subcanais com desvanecimento plano. Cada um desses subcanais forma um enlace estabelecido com uma das  $N$  entradas de um receptor MRC, como mostrado na Fig. 1. Em cada um dos enlaces, o sinal transmitido sofre sucessivas variações de amplitude e fase, causadas pelos obstáculos que se encontram em seu percurso entre as antenas transmissora e receptora. Essas variações de amplitude e fase são comumente conhecidas como desvanecimento e são representadas, no  $k$ -ésimo enlace, por  $\alpha_k e^{-j\theta_k}$ .

Adicionalmente às variações de amplitude e fase, a propagação por múltiplos percursos provoca atrasos no sinal transmitido, os quais são denotados, para o  $k$ -ésimo enlace, por  $\tau_k$ . Devido à natureza da propagação em ambientes urbanos, é razoável supor que os parâmetros  $\alpha_k$ ,  $\theta_k$  e  $\tau_k$  podem ser modelados por variáveis aleatórias mutuamente independentes [4].

Após sofrer o efeito do desvanecimento no  $k$ -ésimo enlace, o sinal sofre, na entrada do receptor, o efeito do ruído aditivo, geralmente de natureza térmica. Esse ruído AWGN é modelado, na entrada de cada ramo do receptor, por uma variável aleatória

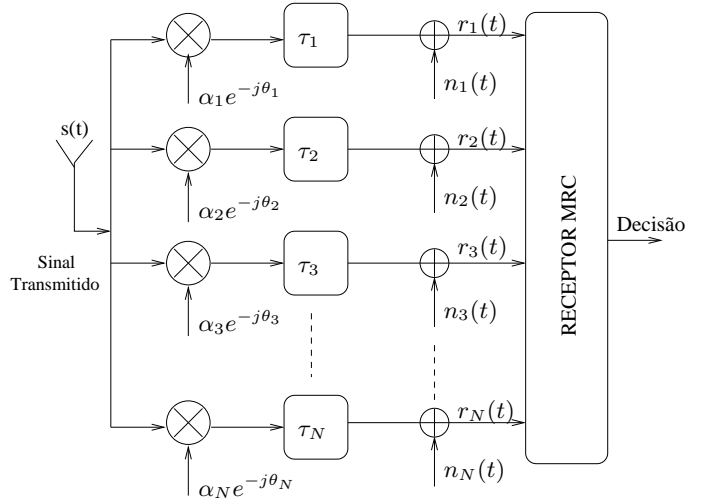


Fig. 1. Sistema de recepção coerente com diversidade.

gaussiana com densidade espectral de potência bilateral representada por  $N_0/2$  (W/Hz). Essas variáveis que modelam o ruído aditivo são consideradas mutuamente independentes nos  $N$  ramos do receptor e independentes das variáveis aleatórias que modelam o efeito do desvanecimento.

O sinal transmitido, representado por  $s(t)$ , pode ser escrito como

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} S_i e^{-j\omega_c t} P_{T_s}(t - iT_s), \quad (4)$$

em que  $\omega_c$  é a frequência da portadora,  $P_{T_s}(\cdot)$  é um pulso retangular de duração  $T_s$  e  $S_i$  é o  $i$ -ésimo símbolo transmitido resultante do mapeamento de blocos de  $K$  bits em uma das  $M = 2^K$  possíveis formas de onda a serem transmitidas. Admitindo que o receptor MRC tem perfeito conhecimento das atenuações e dos deslocamentos de fase no  $k$ -ésimo subcanal de transmissão, e que os símbolos são equi-prováveis, pode-se escrever a razão sinal-ruído na saída do receptor MRC,  $\gamma$ , como

$$\gamma = \frac{E_s}{N_0} \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 = \log_2(M) \frac{E_b}{N_0} \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^N \gamma_k, \quad (5)$$

em que  $\gamma_k = \log_2(M) \frac{E_b}{N_0} \alpha_k^2$  é a relação sinal-ruído por bit para cada ramo do receptor MRC.

A avaliação da integral dada em (1) pode ser realizada, a partir do resultado apresentado em (5), calculando a fdp da variável aleatória  $\gamma$ . Como a variável  $\gamma$  é uma soma ponderada de  $N$  variáveis independentes,  $\alpha_k^2$ , que dependem diretamente do tipo de desvanecimento presente no canal, é necessário antes calcular a fdp da  $k$ -ésima variável  $\alpha_k^2$  para o tipo de desvanecimento analisado.

## III. CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT

No caso de uma recepção multicanal, por meio de um receptor MRC com  $N$  ramos, a fdp  $p_{\gamma}(\gamma; \bar{\gamma})$  em (1) passa a ser uma fdp multivariada representada por  $p_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ . Desse modo, a BEP mostrada

em (1) passa a ser escrita como

$$P_b = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty P_b(E|\gamma) \cdot p_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) d\gamma_1 d\gamma_2 \cdots d\gamma_N. \quad (6)$$

Como as variáveis  $\gamma_k$  são consideradas estatisticamente independentes, (6) pode ser simplificada para

$$P_b = \prod_{k=1}^N \int_0^\infty P_b(E|\gamma) p_{\gamma_k}(\gamma_k; \bar{\gamma}_k) d\gamma_k. \quad (7)$$

A avaliação da integral em (7) para os esquemas de modulação M-PAM, M-QAM e R-QAM segue a partir das expressões obtidas por Cho e Yoon para ruído AWGN.

#### A. Probabilidade de Erro para a modulação M-PAM

No caso do esquema M-PAM, a probabilidade de erro de bit  $P(E|\gamma)$  sob ruído gaussiano aditivo foi obtida por [5] e é dada por

$$P_b(E|\gamma) = \frac{1}{\log_2(M)} \sum_{j=1}^{\log_2(M)} P_b(j), \quad (8)$$

em que a probabilidade de que o  $j$ -ésimo bit esteja em erro é dada por

$$P_b(j) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{(1-2^{-j})M-1} \left\{ w(i, j, M) \cdot \operatorname{erfc} \left( (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2(M) \gamma}{(M^2-1)}} \right) \right\} \quad (9)$$

e os coeficientes  $w(i, j, M)$  são dados por

$$w(i, j, M) = (-1)^{\lfloor \frac{i2^{j-1}}{M} \rfloor} \cdot \left( 2^{j-1} - \left\lfloor \frac{i \cdot 2^{j-1}}{M} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right). \quad (10)$$

Substituindo (8) e (9) em (7), tem-se, para um receptor com  $N$  ramos e desvanecimento independente,

$$P_b = \frac{1}{\log_2(M)} \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \sum_{j=1}^{\log_2(M)} P_b(j) \times \prod_{k=1}^N p_{\gamma_k}(\gamma_k; \bar{\gamma}_k) d\gamma_1 d\gamma_2 \cdots d\gamma_N. \quad (11)$$

Substituindo a expressão de  $P_b(j)$ , (9), em (11), tem-se

$$P_b = \frac{1}{M \log_2(M)} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \sum_{j=1}^{\log_2(M)} \sum_{i=0}^{(1-2^{-j})M-1} w(i, j, M) \cdot \operatorname{erfc} \left( (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2(M) \gamma_k}{(M^2-1)}} \right) \cdot \prod_{k=1}^N p_{\gamma_k}(\gamma_k; \bar{\gamma}_k) d\gamma_1 d\gamma_2 \cdots d\gamma_N. \quad (12)$$

Intercalando as integrais com os somatórios em (12), pode-se reescrever a expressão da probabilidade de erro na forma

$$P_b = \frac{1}{M \log_2(M)} \sum_{j=1}^{\log_2(M)} \sum_{i=0}^{(1-2^{-j})M-1} w(i, j, M) \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \operatorname{erfc} \left( (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2(M) \gamma_k}{(M^2-1)}} \right) \cdot \prod_{k=1}^N p_{\gamma_k}(\gamma_k; \bar{\gamma}_k) d\gamma_1 d\gamma_2 \cdots d\gamma_N. \quad (13)$$

Como as variáveis  $\gamma_k$  são independentes, a integral múltipla em (13) pode ser reescrita como um produto de  $N$  integrais. Desse modo,  $P_b$  pode ser reescrita como

$$P_b = \frac{1}{M \log_2(M)} \sum_{j=1}^{\log_2(M)} \sum_{i=0}^{(1-2^{-j})M-1} w(i, j, M) \cdot \prod_{k=1}^N \left[ \int_0^\infty \operatorname{erfc} \left( (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2(M) \gamma_k}{(M^2-1)}} \right) \cdot p_{\gamma_k}(\gamma_k; \bar{\gamma}_k) d\gamma_k \right]. \quad (14)$$

Fazendo  $a_i(M) = \frac{3(2i+1)^2 \log_2(M)}{(M^2-1)}$  e usando a representação de  $\operatorname{erfc}(x)$  dada em (3), pode-se reescrever  $P_b$  na forma

$$P_b = \frac{1}{M \log_2(M)} \sum_{j=1}^{\log_2(M)} \sum_{i=0}^{(1-2^{-j})M-1} w(i, j, M) \times \prod_{k=1}^N \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \exp \left( -\frac{a_i(M) \gamma_k}{\sin^2(v)} \right) p_{\gamma_k}(\gamma_k; \bar{\gamma}_k) d\gamma_k dv \right]. \quad (15)$$

Comparando a integral imprópria interna em (15) com a função geratriz de momentos (MGF – *Moment Generating Function*) de uma variável aleatória  $X$  positiva, dada por

$$M_X(s) = \int_0^\infty e^{sx} p_X(x) dx, \quad (16)$$

percebe-se que essa integral é a MGF da variável  $\gamma_k$  avaliada em  $s = -\frac{a_i(M)}{\sin^2(v)}$ . Como a fdp de  $\gamma_k$  também está escrita em função da SNR média por bit, a MGF de  $\gamma_k$  é denotada por  $M_{\gamma_k} \left( -\frac{a_i(M)}{\sin^2(v)}; \bar{\gamma}_k \right)$ . Desse modo, a BEP do esquema M-PAM pode ser escrita em termos da MGF como

$$P_b = \frac{1}{M \log_2(M)} \sum_{j=1}^{\log_2(M)} \sum_{i=0}^{(1-2^{-j})M-1} w(i, j, M) \times \prod_{k=1}^N \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{\gamma_k} \left( -\frac{a_i(M)}{\sin^2(v)}; \bar{\gamma}_k \right) dv \right]. \quad (17)$$

Assumindo que o ruído é identicamente distribuído nos  $N$  subcanais e que a SNR média por bit na entrada dos  $k$  ramos do receptor MRC,  $\bar{\gamma}_k$ , é a mesma em todos os ramos e vale  $\bar{\gamma}$ , a probabilidade de erro de bit dada em (17) pode ser reescrita

como

$$P_b = \frac{1}{M \log_2(M)} \sum_{j=1}^{\log_2(M)} \sum_{i=0}^{(1-2^{-j})M-1} w(i, j, M) \times \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\gamma \left( -\frac{a_i(M)}{\sin^2(v)}; \bar{\gamma} \right) dv \right]^N. \quad (18)$$

### B. Probabilidade de Erro para a Modulação M-QAM

Em relação à modulação M-QAM, a expressão obtida em [5] para o cálculo da probabilidade de erro de bit sob ruído AWGN, condicionada à SNR,  $P(E|\gamma)$ , é dada por

$$P_b(E|\gamma) = \frac{1}{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{j=1}^{\log_2 \sqrt{M}} P_b(j), \quad (19)$$

em que a probabilidade de erro do  $j$ -ésimo bit,  $P_b(j)$ , é dada por

$$P_b(j) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-j})\sqrt{M}-1} \left\{ w(i, j, M) \times \operatorname{erfc} \left( (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \gamma}{2(M-1)}} \right) \right\} \quad (20)$$

e os pesos  $w(i, j, M)$  são dados por

$$w(i, j, M) = (-1)^{\lfloor \frac{i \cdot 2^{j-1}}{\sqrt{M}} \rfloor} \cdot \left( 2^{j-1} - \left\lfloor \frac{i \cdot 2^{j-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right). \quad (21)$$

A partir desses resultados, a BEP para a modulação M-QAM sob o efeito do desvanecimento, para o  $k$ -ésimo ramo do receptor é obtida por meio da integral

$$P_b = \frac{1}{\sqrt{M} \log_2(\sqrt{M})} \sum_{j=1}^{\log_2(\sqrt{M})} \sum_{i=0}^{(1-2^{-j})\sqrt{M}-1} w(i, j, M) \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \operatorname{erfc} \left( (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2(M) \gamma_k}{2(M-1)}} \right) \cdot \prod_{k=1}^N p_{\gamma_k}(\gamma_k; \bar{\gamma}_k) d\gamma_1 d\gamma_2 \cdots d\gamma_k. \quad (22)$$

Fazendo  $a_i(M) = \frac{3(2i+1)^2 \log_2(M)}{2(M-1)}$  e usando a expressão de  $\operatorname{erfc}(x)$  apresentada em (3), tem-se

$$P_b = \frac{1}{\sqrt{M} \log_2(\sqrt{M})} \sum_{j=1}^{\log_2(\sqrt{M})} \sum_{i=0}^{(1-2^{-j})\sqrt{M}-1} w(i, j, M) \cdot \prod_{k=1}^N \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \exp \left( -\frac{a_i(M) \gamma_k}{\sin^2 v} \right) p_{\gamma_k}(\gamma_k; \bar{\gamma}_k) d\gamma_k dv \right]. \quad (23)$$

Em termos da função geratriz de momentos,  $P_b$  pode ser reescrita como

$$P_b = \frac{1}{\sqrt{M} \log_2(\sqrt{M})} \sum_{j=1}^{\log_2(\sqrt{M})} \sum_{i=0}^{(1-2^{-j})\sqrt{M}-1} w(i, j, M) \cdot \prod_{k=1}^N \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{\gamma_k} \left( -\frac{a_i(M)}{\sin^2 v}; \bar{\gamma}_k \right) dv \right]. \quad (24)$$

Se for assumido que o desvanecimento é identicamente distribuído e que a SNR média por bit é a mesma em todos os ramos do receptor MRC, a expressão de  $P_b$  passa a ser escrita como

$$P_b = \frac{1}{\sqrt{M} \log_2(\sqrt{M})} \sum_{j=1}^{\log_2(\sqrt{M})} \sum_{i=0}^{(1-2^{-j})\sqrt{M}-1} w(i, j, M) \times \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\gamma \left( -\frac{a_i(M)}{\sin^2 v}; \bar{\gamma} \right) dv \right]^N. \quad (25)$$

### IV. PROBABILIDADE DE ERRO PARA O ESQUEMA R-QAM

Em relação ao esquema R-QAM, também denotado  $I \times J$ -QAM, a expressão para a probabilidade de erro de bit sob ruído gaussiano branco e mapeamento Gray nos bits da constelação com  $I \times J$  símbolos, dada a SNR  $\gamma$ ,  $P(E|\gamma)$ , é dada por

$$P_b(E|\gamma) = \frac{1}{\log_2(I \cdot J)} \left( \sum_{l=1}^{\log_2 I} P_I(l) + \sum_{n=1}^{\log_2 J} P_J(n) \right), \quad (26)$$

em que as probabilidades  $P_I(l)$  e  $P_J(j)$  são dadas respectivamente por

$$P_I(l) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{(1-2^{-l})I-1} \left\{ w(i, l, I) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{a_i(I, J) \gamma} \right) \right\} \\ P_J(n) = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{(1-2^{-n})J-1} \left\{ w(j, n, J) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{a_j(I, J) \gamma} \right) \right\} \quad (27)$$

e os pesos  $w(i, l, I)$  e  $w(j, n, J)$  podem ser obtidos, a partir de (10), substituindo os índices  $i, l, I$  e  $j, n, J$ , nesta mesma ordem, nos índices  $i, j, M$ . Os termos  $a_i(I, J)$  e  $a_j(I, J)$  são obtidos a partir da equação

$$a_i(I, J) = \frac{3(2i+1)^2 \log_2(I \cdot J)}{I^2 + J^2 - 2}. \quad (28)$$

A avaliação da probabilidade de erro de bit do esquema R-QAM pode ser realizada de modo similar ao utilizado para os esquemas de modulação M-PAM e M-QAM. Para facilitar o desenvolvimento, pode-se separar (26) em duas equações, denotadas por  $P_{b_I}(E|\gamma)$  e  $P_{b_J}(E|\gamma)$ . Substituindo

as expressões  $P_I(l)$  e  $P_J(n)$  nessas expressões, obtém-se

$$\begin{aligned}
 P_{b_I}(E|\gamma) &= \frac{1}{I \log_2(I \cdot J)} \sum_{l=1}^{\log_2 I (1-2^{-l})I-1} \sum_{i=0}^{I-1} w(i, l, I) \\
 &\quad \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{a_i(I, J) \gamma} \right), \\
 P_{b_J}(E|\gamma) &= \frac{1}{J \log_2(I \cdot J)} \sum_{n=1}^{\log_2 J (1-2^{-n})J-1} \sum_{j=0}^{J-1} w(j, n, J) \\
 &\quad \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{a_j(I, J) \gamma} \right).
 \end{aligned} \tag{29}$$

A média das expressões  $P_{b_I}(E|\gamma_k)$  e  $P_{b_J}(E|\gamma_k)$ , a partir da integral dada em (6), sob consideração de desvanecimento independente nos  $N$  ramos do receptor MRC, considerando a forma alternativa da função  $\operatorname{erfc}(x)$  dada em (3), leva às expressões

$$\begin{aligned}
 P_{b_I} &= \frac{1}{I \log_2(I \cdot J)} \sum_{l=1}^{\log_2 I (1-2^{-l})I-1} \sum_{i=0}^{I-1} w(i, l, I) \\
 &\quad \cdot \prod_{k=1}^N \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{\gamma_k} \left( -\frac{a_i(I, J)}{\sin^2 v}; \bar{\gamma}_k \right) dv \right] \\
 P_{b_J} &= \frac{1}{J \log_2(I \cdot J)} \sum_{n=1}^{\log_2 J (1-2^{-n})J-1} \sum_{j=0}^{J-1} w(j, n, J) \\
 &\quad \cdot \prod_{k=1}^N \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{\gamma_k} \left( -\frac{a_j(I, J)}{\sin^2 v}; \bar{\gamma}_k \right) dv \right].
 \end{aligned} \tag{30}$$

Considerando que o desvanecimento seja identicamente distribuído nos  $N$  subcanais do modelo de sistema de comunicação considerado, as novas expressões de  $P_{b_I}$  e  $P_{b_J}$  passam a ser escritas como

$$\begin{aligned}
 P_{b_I} &= \frac{1}{I \log_2(I \cdot J)} \sum_{l=1}^{\log_2 I (1-2^{-l})I-1} \sum_{i=0}^{I-1} w(i, l, I) \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{\gamma} \left( -\frac{a_i(I, J)}{\sin^2 v}; \bar{\gamma} \right) dv \right]^N \\
 P_{b_J} &= \frac{1}{J \log_2(I \cdot J)} \sum_{n=1}^{\log_2 J (1-2^{-n})J-1} \sum_{j=0}^{J-1} w(j, n, J) \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{\gamma} \left( -\frac{a_j(I, J)}{\sin^2 v}; \bar{\gamma} \right) dv \right]^N.
 \end{aligned} \tag{31}$$

A probabilidade de erro resultante  $P_b$  é então obtida pela soma das probabilidades  $P_{b_I}$  e  $P_{b_J}$ . Como se pode perceber pelas equações obtidas para os três esquemas de modulação, as expressões de BEP são dadas todas em termos da função geratriz de momentos da SNR instantânea  $\gamma$ . Essa função varia, de acordo com a fdp de  $\gamma$ , para cada distribuição de desvanecimento considerada. Algumas distribuições comumente usadas em ambientes móveis e que podem ser empregadas no estudo feito nesse artigo são as distribuições Rayleigh, Hoyt, Rice, Nakagami e sombreado Log-Normal.

## V. CONCLUSÃO

Neste trabalho foram apresentadas expressões exatas para o cálculo da probabilidade de erro de bits de um modelo de sistema de comunicação multicanal, usando os esquemas de modulação M-PAM, M-QAM e R-QAM sob desvanecimento generalizado. Na abordagem utilizada, a expressão da função erro complementar foi reescrita em termos de uma integral definida no intervalo  $[0, \pi/2]$ . As expressões obtidas para a BEP, por ramo do receptor, em função da SNR média por ramo,  $\bar{\gamma}_k$ , foram expressas em termos da integral da MGF da SNR instantânea,  $M_{\gamma}(t; \bar{\gamma})$ , no intervalo  $[0, \pi/2]$ . A vantagem dessa abordagem é que ela pode ser aplicada a qualquer tipo de desvanecimento, e as integrais, mesmo que não forneçam expressões exatas, podem ser avaliadas numericamente.

## REFERÊNCIAS

- [1] C. Kim, Y. Kim, G. Jeong, and H. Lee. BER analysis of QAM with MRC space diversity in Rayleigh fading channels. In *Proc. IEEE Int. Symp. Personal, Indoor and Mobile Communications (PIMRC'95)*, pages 482–485, Toronto, ON, Canada, September 1995.
- [2] J. Lu, T. T. Tjhung, and C. C. Chai. Error probability performance of L-branch diversity reception of MQAM in Rayleigh fading. *IEEE Transactions on Communications*, 46:179–181, February 1998.
- [3] G. Femenias and I. Furió. Dual MRC diversity reception of TCM-MPSK signals over Nakagami fading channels. *Electronics Letters*, 32:1752–1754, September 1996.
- [4] M. S. Alouini and A. J. Goldsmith. A unified approach for calculating error rates of linearly modulated signals over generalized fading channels. *IEEE Transactions on Communications*, 47(9):1324–1334, September 1999.
- [5] K. Cho and D. Yoon. On the general BER expression of one and two dimensional amplitude modulations. *IEEE Transactions on Communications*, 50(7):1074–1080, 2002.
- [6] G. K. Karagiannidis. On the symbol error probability of general order rectangular QAM in Nakagami-m fading. *IEEE Communications Letters*, 10(11):745–747, November 2006.
- [7] N. C. Beaulieu and Y. Chen. Closed-form expressions for the exact symbol error probability of 32-Cross-QAM in AWGN and in slow Nakagami fading. *IEEE Communications Letters*, 11(4):310–312, April 2007.
- [8] N. C. Beaulieu. A useful integral for wireless communication theory and its applications to rectangular signaling constellation error rates. *IEEE Transactions Communications*, 54(5):802–805, May 2006.
- [9] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, New York, 3 edition, 1995.
- [10] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover publications, Inc., New York, 1970.
- [11] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. CA Academic, 5th ed., San Diego, 1994.
- [12] J. Lu, K. B. Lefaief, J. C. Chuang, and M. L. Liou. M-PSK and M-QAM BER computation using signal-space concepts. *IEEE Transactions on Communications*, 47(2):181–184, 1999.
- [13] L. L. Yang and L. Hanzo. A recursive algorithm for error probability evaluation of M-QAM. *IEEE Communications Letters*, 4(10):304–306, 2000.
- [14] P. M. Fortune, L. Hanzo, and R. Steele. On the computation of 16-QAM and 64-QAM performance in Rayleigh-fading channels. *IEICE Transactions on Communications*, E75B(6):466–475, 1992.
- [15] M. G. Shayesteh and A. Aghamohammadi. On the error probability of linearity of modulated signals on frequency-flat Ricean, Rayleigh and AWGN channels. *IEEE Transactions on Communications*, 43(2):1454–1466, 1995.
- [16] K. Pomorski. Gauss-Hermite approximation formula. *Computer Physics Communications*, 174(3):181–186, February 2006.
- [17] A. Conti, M. Z. Win, and M. Chiani. Slow adaptive M-QAM with diversity in fast fading and shadowing. *IEEE Transactions Communications*, 55(5):895–905, May 2007.