

# Modelo Estocástico do Algoritmo NLMS para Sinais de Entrada Gaussianos Complexos

Eduardo Vinicius Kuhn e Rui Seara

**Resumo**—Este artigo apresenta a modelagem estocástica de um consagrado algoritmo adaptativo da literatura, o algoritmo NLMS (*normalized least-mean-square*). Considerando um problema de identificação de sistema com planta estacionária e sinal de entrada gaussiano complexo, um modelo preciso obtido analiticamente é aqui derivado. Tal precisão se deve principalmente à forma como o cálculo dos momentos normalizados é efetuado. Resultados de simulação para diferentes cenários de operação são apresentados, mostrando que o modelo proposto prediz satisfatoriamente o comportamento do algoritmo tanto em regime transitório quanto em regime permanente.

**Palavras-chave**—Algoritmo NLMS, filtragem adaptativa, modelagem estocástica.

**Abstract**—This paper presents the stochastic modeling of a well-known adaptive algorithm from the literature, the normalized least-mean-square (NLMS) algorithm. Considering a system identification problem with stationary plant and complex Gaussian input data, an accurate model obtained analytically is derived here. Such accuracy is mainly due to the form how the calculus of the normalized moments is performed. Simulation results for different operation scenarios are presented, showing that the proposed model predicts satisfactorily the algorithm behavior for both transient and steady-state phases.

**Keywords**—NLMS algorithm, adaptive filtering, stochastic modeling.

## I. INTRODUÇÃO

No contexto de filtragem adaptativa [1], [2], a modelagem estocástica de algoritmos visa determinar um modelo matemático, descrevendo de forma mais fiel possível o comportamento do algoritmo sob estudo. Tal modelo, quando alimentado com dados provenientes da aplicação desejada, é capaz de prever o comportamento do sistema no qual o filtro adaptativo está inserido, propiciando assim uma melhor compreensão do funcionamento/conhecimento do algoritmo frente ao cenário de operação considerado. Dessa forma, um modelo que descreva precisamente o comportamento do algoritmo pode ser visto como um agente facilitador ao projetista, principalmente, no que diz respeito à escolha dos valores de parâmetros que controlam o sistema adaptativo. Além disso, baseado nas expressões de modelo, relações de causa e efeito entre os parâmetros do algoritmo e algumas métricas de desempenho podem ser estabelecidas, fornecendo assim diretrizes consistentes ao projeto. Além do mais, uma análise detalhada das expressões que descrevem o comportamento do algoritmo pode revelar possíveis situações indesejadas (anômalas) [3], viabilizando então a concepção de novos algoritmos com melhor desempenho frente ao problema observado ou mesmo a alguma condição específica de operação.

A modelagem de algoritmos adaptativos não é uma tarefa trivial e, apesar dos esforços até então realizados, não existe

Eduardo Vinicius Kuhn e Rui Seara, LINSE - Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, Brasil, E-mails: kuhn@linse.ufsc.br, seara@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

uma teoria unificada de análise para todos os algoritmos encontrados na literatura. Assim, os diversos algoritmos devem ser tratados de forma distinta levando em consideração suas peculiaridades, bem como o tipo de sinais envolvidos (reais ou complexos) e suas características estatísticas (correlacionados ou não-correlacionados) [1]. Devido à característica recursiva dos algoritmos adaptativos, mesmo aqueles relativamente mais simples [tal como o LMS (*least-mean-square*)] apresentam certa complexidade matemática em sua análise estocástica [2]. Eventualmente, visando tornar possível o tratamento matemático, algumas hipóteses simplificativas devem ser utilizadas na derivação do modelo. Essas hipóteses, geralmente, estão relacionadas a condições específicas de operação, tais como passo de adaptação, ordem do filtro, características do sinal de entrada e aproximações estatísticas. Contudo, vale lembrar que existe um forte compromisso entre complexidade matemática, número e validade das hipóteses simplificativas e precisão do modelo estocástico obtido [4].

Em relação à modelagem do algoritmo NLMS (*normalized LMS*), o maior obstáculo reside no cálculo de valores esperados contendo o fator de normalização [4], [5]. Na literatura, tais valores esperados são conhecidos por momentos normalizados ou matrizes de autocorrelação normalizadas [6]. Com respeito à determinação de tais momentos, para o caso de sinal de entrada real, diversas abordagens podem ser encontradas na literatura considerando diferentes tipos de aproximações e, conseqüentemente, resultando em modelos com diferentes níveis de precisão [4]-[11]. Por outro lado, pouco tem sido desenvolvido em se tratando da modelagem do algoritmo NLMS operando com sinais de entrada complexos, podendo-se citar apenas dois recentes artigos [12], [13]. Entretanto, os resultados descritos em tais trabalhos apresentam certas inconsistências. Em [12], os autores afirmam ter uma solução analítica para o cálculo dos requeridos momentos. Contudo, devido à presença da integral exponencial generalizada, inerente ao fator de regularização considerado, tal afirmação não é válida. Em [13], os mesmos autores propõem uma solução para o cálculo da matriz de autocorrelação normalizada (requerida na expressão que descreve o comportamento médio do vetor de coeficientes), desconsiderando agora o parâmetro de regularização. Porém, é possível mostrar que essa solução diverge quando utilizada em filtros de ordem superior a dois [14]. Nesse contexto, o presente trabalho tem por objetivo derivar um modelo estocástico mais preciso (com solução analítica) para o algoritmo NLMS operando com sinal de entrada gaussiano complexo (correlacionado ou não-correlacionado).

## II. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Em aplicações de identificação de sistema, busca-se através do filtro adaptativo obter uma estimativa da resposta ao impulso do sistema desconhecido [2]. Nesse tipo de aplicação (veja Fig. 1), tanto o sistema a ser identificado (planta) quanto o filtro adaptativo são excitados com um mesmo sinal de entrada. O sinal de saída da planta é corrompido por um ruído aditivo de medição  $z(n)$ , resultando no sinal desejado  $d(n)$ . Dessa forma, o sinal de erro pode ser escrito como

$$e(n) = \mathbf{w}_0^H \mathbf{x}(n) - \mathbf{w}^H(n) \mathbf{x}(n) + z(n) \quad (1)$$

onde  $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ \cdots \ x(n-M+1)]^T$  representa o vetor com as amostras mais recentes do sinal de entrada,  $\mathbf{w}_0$ , o vetor de dimensão  $M$  contendo os coeficientes da planta e  $\mathbf{w}(n) = [w_1(n) \ \cdots \ w_M(n)]^T$ , o vetor de coeficientes do filtro adaptativo.

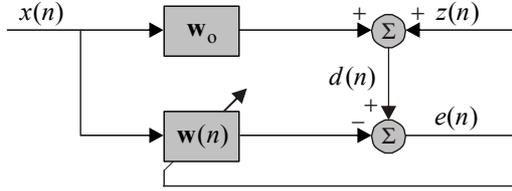


Fig. 1. Diagrama de blocos de um problema de identificação de sistema.

Na aplicação considerada, assume-se que os coeficientes do filtro adaptativo são atualizados através do algoritmo NLMS, cuja equação de adaptação é dada por [2]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \frac{\mathbf{x}(n)e^*(n)}{\varepsilon + \mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n)} \quad (2)$$

onde  $\mu$  denota o passo de adaptação que controla a velocidade de convergência do algoritmo,  $e(n)$ , o sinal de erro obtido de (1) e  $\varepsilon$ , uma constante positiva de valor muito pequeno, introduzida no algoritmo visando evitar divisão por zero e estabilizar a solução quando a potência do sinal de entrada é muito baixa [1], [2], [10].

### III. MODELO ESTOCÁSTICO PROPOSTO

O modelo estocástico proposto é composto por expressões matemáticas descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes, curva de aprendizagem e uma recursão para obter os elementos da diagonal da matriz de covariância do vetor de erro nos coeficientes. Para derivar tais expressões, as seguintes hipóteses simplificativas são estabelecidas [1], [2]:

H1)  $\varepsilon$  é uma constante positiva de valor muito pequeno quando comparada com a potência do sinal de entrada [8], não interferindo no comportamento médio do algoritmo.

H2) O ruído de medição  $z(n)$  é independente de qualquer outro sinal envolvido no processo, tendo média nula e variância  $\sigma_z^2$ .

H3) O vetor de coeficientes  $\mathbf{w}(n)$  pode ser considerado, para uma condição de adaptação lenta (passo de adaptação pequeno), estatisticamente independente do vetor do sinal de entrada  $\mathbf{x}(n)$ .

#### A. Comportamento Médio do Vetor de Coeficientes

Para o problema de identificação de sistema mencionado, substituindo (1) em (2) e tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, obtém-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(n+1)] = E[\mathbf{w}(n)] + \mu E \left[ \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{\varepsilon + \mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n)} \right] \mathbf{w}_0 \\ - \mu E \left[ \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{w}(n)}{\varepsilon + \mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n)} \right] + \mu E \left[ \frac{\mathbf{x}(n)z^*(n)}{\varepsilon + \mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n)} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Agora, levando em conta as Hipóteses H1)-H3) para os termos do lado direito de (3), tem-se

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_1) E[\mathbf{w}(n)] + \mu \mathbf{R}_1 \mathbf{w}_0 \quad (4)$$

sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade e

$$\mathbf{R}_1 = E \left[ \begin{array}{c} \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n) \\ \mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n) \end{array} \right]. \quad (5)$$

Dessa forma, para uma dada condição inicial, o comportamento médio do vetor de coeficientes do filtro adaptativo é completamente caracterizado se a matriz de autocorrelação normalizada  $\mathbf{R}_1$  e o vetor de coeficientes ótimo  $\mathbf{w}_0$  forem conhecidos.

O procedimento para determinar  $\mathbf{R}_1$  [bem como (20) e (21)] não é trivial [3], [4], requerendo o conhecimento da função densidade de probabilidade do sinal de entrada. Particularmente, para o caso de sinais de entrada gaussianos complexos<sup>1</sup> e correlacionados, com vistas no que tem sido apresentado em [3],  $\mathbf{R}_1$  pode ser decomposta como  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{H}\mathbf{Q}^H$  onde  $\mathbf{Q}$  é a matriz de autovetores oriunda da autodecomposição da matriz de autocorrelação do sinal de entrada (i.e.,  $\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^H$  [2]) e  $\mathbf{H}$  é uma matriz diagonal cujos elementos são<sup>2</sup>

$$h_{i,i} = -\frac{1}{G} \left[ \frac{A_{i,i}}{\omega_i} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^M B_{l,i} \log \left( \frac{\omega_l}{\omega_i} \right) \right] \quad (6)$$

com  $\omega_k = -1/\lambda_k$  para  $k=1, 2, \dots, M$ ,

$$G = \prod_{k=1}^M \lambda_k, \quad (7)$$

$$A_{i,i} = \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M (\omega_i - \omega_k)} \quad (8)$$

e

$$B_{l,i} = \frac{A_{l,l}}{(\omega_l - \omega_i)}. \quad (9)$$

#### B. Curva de Aprendizagem

A curva de aprendizagem descreve a evolução do erro quadrático médio (EQM) de um algoritmo adaptativo, sendo usualmente definida como [1], [2]

$$J(n) = E[|e(n)|^2] = E[e(n)e^*(n)]. \quad (10)$$

Para determiná-la, primeiramente, (1) é reescrita em função do vetor de erro nos coeficientes  $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_0$  como

$$e(n) = -\mathbf{v}^H(n)\mathbf{x}(n) + z(n). \quad (11)$$

Então, a partir de (11), determinando o produto  $e(n)e^*(n)$ , tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e considerando a Hipótese H2), obtém-se [2]

$$J(n) = E[z(n)z^*(n)] + E[\mathbf{v}^H(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{v}(n)]. \quad (12)$$

Observa-se que a primeira parcela do lado direito de (12) é função apenas da variância do ruído de medição e representa o EQM mínimo obtido quando  $\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}_0$ . Assim,

$$J_{\min} = E[z(n)z^*(n)] = \sigma_z^2. \quad (13)$$

A segunda parcela corresponde ao EQM em excesso introduzido pelo algoritmo, podendo ser reescrita como [2]

$$J_{\text{ex}}(n) = \text{tr}[\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^H\mathbf{K}(n)\mathbf{Q}] \quad (14)$$

<sup>1</sup> Vale lembrar que a função densidade de probabilidade gaussiana é definida de forma distinta para dados reais ou complexos [15], logo a solução apresentada aqui para (5), (20) e (21) difere da obtida no caso de dados reais.

<sup>2</sup> O resultado de [3] foi aqui reproduzido em um formato alternativo com o intuito de tornar o documento autocontido no que se refere à modelagem do algoritmo NLMS operando com sinais de entrada gaussianos complexos.

com

$$\mathbf{K}(n) = \mathbb{E}[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^H(n)]. \quad (15)$$

Logo, definindo

$$\mathbf{K}'(n) = \mathbf{Q}^H \mathbf{K}(n) \mathbf{Q} \quad (16)$$

e visto que  $\Lambda$  é uma matriz diagonal, (14) resulta em

$$J_{\text{ex}}(n) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{k}'(n) \quad (17)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  denota o vetor contendo os autovalores de  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{k}'(n)$ , o vetor com os elementos da diagonal de  $\mathbf{K}'(n)$ .

Portanto, através de (13) e (17), a curva de aprendizagem do algoritmo NLMS é dada por

$$J(n) = J_{\text{min}} + J_{\text{ex}}(n) \quad (18)$$

sendo completamente caracterizada se a potência do ruído de medição, os autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada e o vetor  $\mathbf{k}'(n)$  forem conhecidos.

### C. Matriz de Covariância do Vetor de Erro nos Coeficientes

Para determinar uma recursão para  $\mathbf{k}'(n)$ , reescreve-se (2) em função de  $\mathbf{v}(n)$ , substitui-se (11) na expressão resultante, determina-se o produto  $\mathbf{v}(n+1)\mathbf{v}^H(n+1)$ , toma-se o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e levando-se em conta as Hipóteses H1)-H3), (5), (13) e (15), obtém-se

$$\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{K}(n) - \mu \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_1 - \mu \mathbf{R}_1 \mathbf{K}(n) + \mu^2 \mathbf{R}_2 + \mu^2 \mathbf{R}_3 J_{\text{min}} \quad (19)$$

com

$$\mathbf{R}_2 = \mathbb{E} \left\{ \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{K}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{[\mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n)]^2} \right\} \quad (20)$$

e

$$\mathbf{R}_3 = \mathbb{E} \left\{ \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{[\mathbf{x}^H(n)\mathbf{x}(n)]^2} \right\}. \quad (21)$$

Então, frente aos resultados apresentados em [3] e nos Apêndices I-II, pré- e pós- multiplicando (19), respectivamente, por  $\mathbf{Q}^H$  e  $\mathbf{Q}$ , e tomando os elementos da diagonal principal da expressão resultante, obtém-se a seguinte recursão para  $\mathbf{k}'(n)$  [4], [6]:

$$\mathbf{k}'(n+1) = \mathbf{B}\mathbf{k}'(n) + \mathbf{g}\mathbf{s} \quad (22)$$

com

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - 2\mu\mathbf{H} + \mu^2(\mathbf{T} + \mathbf{P}) = \begin{cases} 1 - 2\mu h_{i,i} + 2\mu^2 t_{i,i}, & i = j \\ \mu^2 p_{i,j}, & i \neq j \end{cases} \quad (23)$$

e

$$\mathbf{g} = \mu^2 J_{\text{min}} \mathbf{1}. \quad (24)$$

Como condição inicial para a recursão, assumindo que o vetor de coeficientes do filtro adaptativo seja inicializado com zero, a partir de (16), tem-se

$$\mathbf{k}'(0) = \text{diag}(\mathbf{Q}^H \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0^H \mathbf{Q}). \quad (25)$$

Em (22) e (23), considerando que o sinal de entrada seja gaussiano complexo e correlacionado, a matriz  $\mathbf{H}$  é obtida como na Seção III-A, sendo os elementos da matriz diagonal  $\mathbf{T}$  dados por (veja Apêndice I)

$$t_{i,i} = \frac{1}{G} \left[ -\frac{A_{1,i}}{2\omega_i} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^M \frac{B_{l,i}}{(\omega_l - \omega_i)} \left\{ \omega_l \left[ 1 + \log \left( \frac{\omega_l}{\omega_i} \right) \right] - \omega_i \right\} \right], \quad (26)$$

os elementos fora da diagonal da matriz simétrica  $\mathbf{P}$  por

$$p_{i,j} = \frac{1}{G} \left\{ \frac{A_{1,i}}{(\omega_j - \omega_i)} \left\{ \log(-\omega_i) + \frac{2\omega_j[1 - \log(-\omega_j)]}{(\omega_j - \omega_i)} \right\} + B_{j,i} \left\{ \frac{2\omega_j[1 - \log(-\omega_j)]}{(\omega_j - \omega_i)} - \log(-\omega_j) \right\} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i,j}}^M B_{l,i} \left\{ \frac{(\omega_l - \omega_i)(\omega_l + \omega_i - 2\omega_j)\omega_j[1 - \log(-\omega_j)]}{(\omega_j - \omega_i)^2(\omega_l - \omega_j)} + \frac{(\omega_l + \omega_j - 2\omega_i)\omega_i[1 - \log(-\omega_i)]}{(\omega_j - \omega_i)^2} + \frac{\omega_l[1 - \log(-\omega_l)]}{(\omega_l - \omega_j)} \right\} \right\} \quad (27)$$

e os elementos de  $\mathbf{s}$  por (veja Apêndice II)

$$s_i = \frac{-1}{G} \left( A_{1,i} \log(-\omega_i) - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^M B_{l,i} \{ \omega_l [1 - \log(-\omega_l)] - \omega_i [1 - \log(-\omega_i)] \} \right) \quad (28)$$

com  $\omega_k$ ,  $G$ ,  $A_{1,i}$  e  $B_{l,i}$  definidos conforme a Seção III-A.

Finalmente, através de (22)-(24), conhecidas as soluções das matrizes tipo autocorrelação normalizadas [i.e., (6), (26), (27) e (28)] e a condição inicial para  $\mathbf{k}'(n)$  [dada por (25)], é possível prever o comportamento dos elementos da diagonal da matriz de covariância do vetor de erro nos coeficientes e a curva de aprendizagem do algoritmo NLMS dada em (18).

### D. Comentários Adicionais

As expressões de modelo aqui propostas [(4), (18) e (22)] são gerais, válidas tanto para sinais de entrada complexos quanto sinais de entrada reais. No entanto, a solução para as matrizes de autocorrelação normalizadas difere dependendo do tipo do sinal de entrada (real, complexo, correlacionado ou não). Com respeito ao caso de sinal de entrada gaussiano não-correlacionado e complexo, consideram-se as relações:  $\mathbf{H} = (1/M)\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{T} = \{1/[M(M+1)]\}\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{P} = \{1/[M(M+1)]\}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$  e  $\mathbf{s} = \{1/[M(M-1)\sigma_x^2]\}\mathbf{1}$ , onde  $\mathbf{1}$  denota um vetor com elementos unitários. Por outro lado, no caso de dados reais, podem ser usados os resultados descritos em [4], [7] e [8].

## IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, no intuito de atestar a precisão do modelo estocástico proposto, dois exemplos são apresentados considerando um problema de identificação de sistema. Em tais exemplos, o comportamento médio predito pelo modelo é confrontado com os resultados obtidos via simulações de Monte Carlo (MC), considerando 200 realizações independentes. A planta utilizada é obtida do modelo de um canal de comunicações (canal de desvanecimento Rayleigh [1]) e é normalizada de forma que  $\mathbf{w}_0$  tenha norma unitária [4], [9], [10]. As ordens do sistema a ser identificado  $\mathbf{w}_0$  e do filtro adaptativo são assumidas iguais, sendo os coeficientes do filtro adaptativo inicializados com zero [i.e.,  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$ ]. O sinal de entrada do sistema em questão é proveniente de um processo auto-regressivo de segunda ordem AR(2), com equação de diferenças dada por [2]

$$x(n) = -a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) + v(n) \quad (29)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são os coeficientes do processo e  $v(n)$ , um ruído branco gaussiano cuja variância é ajustada de modo que  $x(n)$  tenha variância unitária. O ruído de medição inerente ao ambiente de operação do sistema tem variância  $\sigma_z^2 = 10^{-4}$ .

A. Exemplo 1

Neste caso, considere um filtro adaptativo de comprimento  $M=8$ , passo de adaptação  $\mu=0,1$  e sinal de entrada correlacionado, sendo os coeficientes do processo AR(2) iguais a  $a_1=-0,55$  e  $a_2=0,9$ . Dessa forma, a dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada é  $\chi(\mathbf{R})=115$ .

B. Exemplo 2

Aqui, a ordem do filtro adaptativo é aumentada para  $M=64$ . Nesse cenário, os coeficientes do processo AR(2) são  $a_1=-0,65$  e  $a_2=0,8$ , produzindo uma dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada de  $\chi(\mathbf{R})=155$ . O passo de adaptação é o mesmo do exemplo anterior.

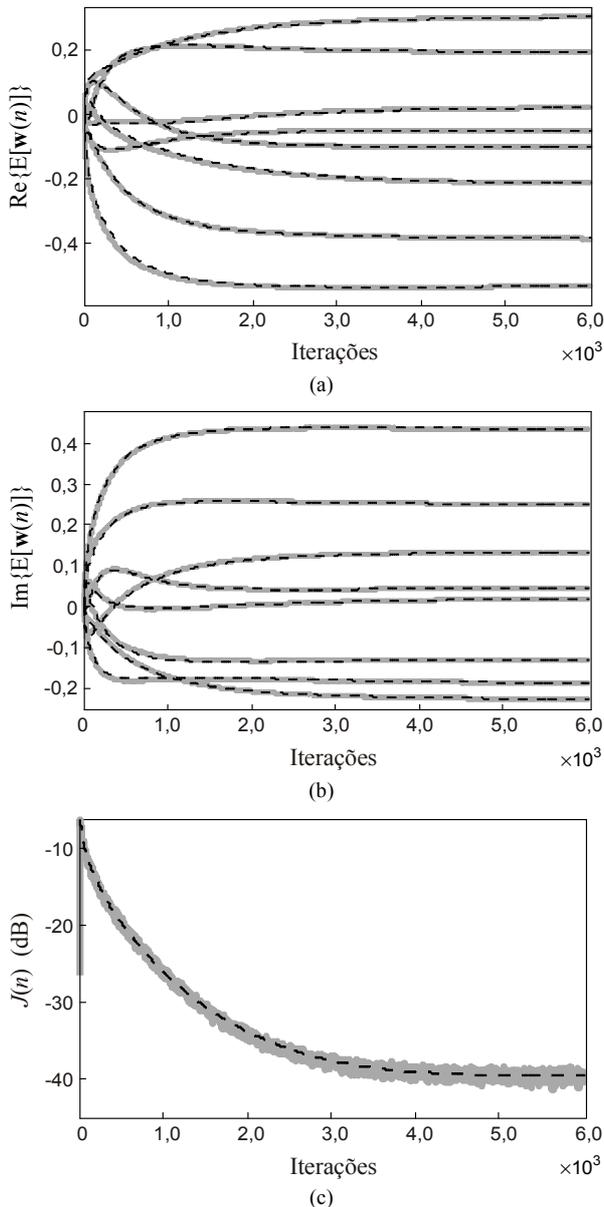


Fig. 2. Exemplo 1. (a)-(b) Comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo. (c) Curva de aprendizagem do algoritmo NLMS. (Linhas cinzas) simulação MC. (Linhas escuras tracejadas) modelo proposto.

As Figs. 2 e 3 apresentam, respectivamente, os resultados obtidos dos Exemplos 1 e 2. Observa-se que o modelo proposto está em concordância com o comportamento obtido via simulação MC, conseguindo capturar fielmente o

desempenho do algoritmo tanto em regime transitório quanto em regime permanente, independentemente da ordem do filtro adaptativo e do grau de correlação do sinal de entrada. Devido à escassez de modelos para o algoritmo NLMS operando com dados complexos, comparações com modelos da literatura não puderam ser feitas.

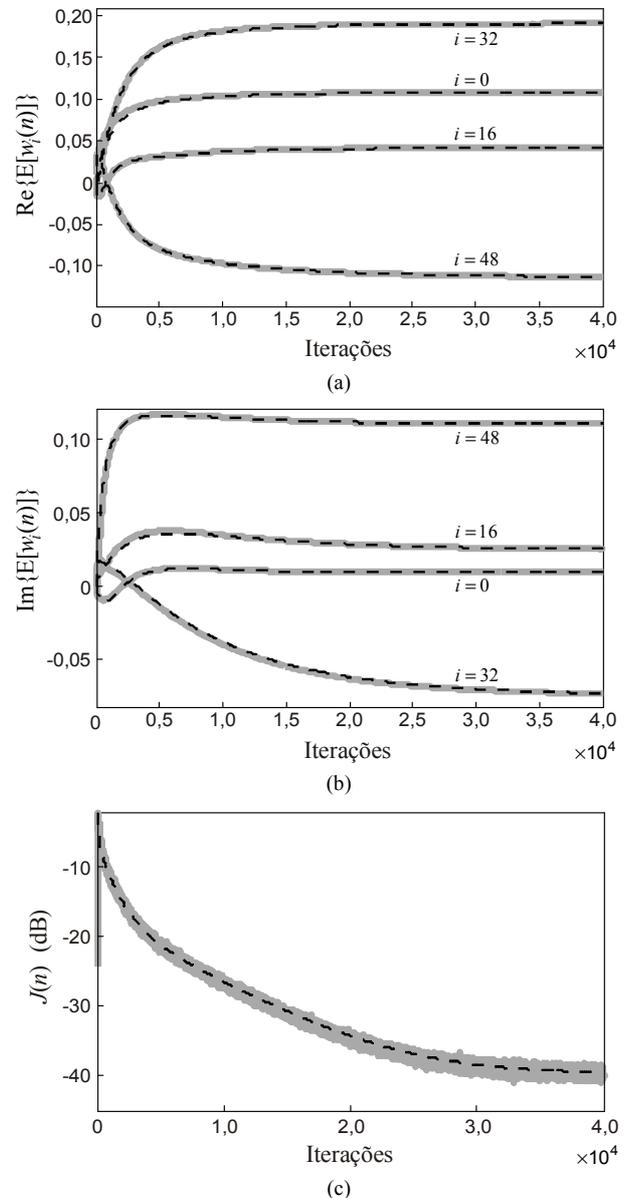


Fig. 3. Exemplo 2. (a)-(b) Comportamento médio de quatro coeficientes do filtro adaptativo. (c) Curva de aprendizagem do algoritmo NLMS. (Linhas cinzas) simulação MC. (Linhas escuras tracejadas) modelo proposto.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, assumindo um número reduzido de hipóteses simplificativas, foi derivado um modelo para o algoritmo NLMS considerando sinal de entrada complexo. A abordagem utilizada no cálculo das matrizes tipo autocorrelação normalizadas para o caso de sinal de entrada gaussiano complexo correlacionado e não-correlacionado não considera qualquer aproximação. Os resultados obtidos através de simulações numéricas ratificam a precisão das expressões propostas, tanto em regime transitório quanto em regime permanente. Por fim, destaca-se que o presente trabalho fornece novas ferramentas para a análise de outros algoritmos adaptativos com sinal de entrada normalizado, possibilitando ainda melhorar a precisão de modelos existentes.

APÊNDICE I  
 DETERMINAÇÃO DE  $\mathbf{R}_2$ 

Neste apêndice, considerando que o sinal de entrada seja complexo e tenha distribuição de probabilidade gaussiana [15], um procedimento para o cálculo de  $\mathbf{R}_2$  é apresentado [3]. Para tal, uma função matricial auxiliar<sup>3</sup> é definida como

$$\mathbf{F}_2(\omega) = \frac{1}{\pi^M \det(\mathbf{R})} \underbrace{\int \cdots \int}_{M \text{ vezes}} \frac{\mathbf{xx}^H \mathbf{K} \mathbf{xx}^H}{(\mathbf{x}^H \mathbf{x})^2} e^{-[\mathbf{x}^H \mathbf{L}^{-1}(\omega) \mathbf{x}]} d\mathbf{x} \quad (30)$$

com

$$\mathbf{L}^{-1}(\omega) = (\mathbf{I} + \omega \mathbf{R}) \mathbf{R}^{-1}. \quad (31)$$

Note que fazendo  $\omega=0$  em (30) retorna-se ao requerido valor esperado, i.e.,  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_2(0)$ .

Então, diferenciando-se duas vezes (30) com respeito à  $\omega$ , usando a definição do momento de quarta ordem de variáveis gaussianas [1], utilizando a autodecomposição de  $\mathbf{R}$ , as propriedades do traço e do determinante, e integrando ambos os lados da expressão resultante duas vezes com respeito à  $\omega$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2(\omega) = \mathbf{Q} & \left( \iint \frac{[\Lambda(\mathbf{I} + \omega \Lambda)^{-1}] \mathbf{K}'(n) [\Lambda(\mathbf{I} + \omega \Lambda)^{-1}]}{\prod_{k=1}^M (1 + \omega \lambda_k)} d\omega \right. \\ & \left. + \iint \frac{[\Lambda(\mathbf{I} + \omega \Lambda)^{-1}] \text{tr} \{ \mathbf{K}'(n) [\Lambda(\mathbf{I} + \omega \Lambda)^{-1}] \}}{\prod_{k=1}^M (1 + \omega \lambda_k)} d\omega \right) \mathbf{Q}^H. \end{aligned} \quad (32)$$

Visto que somente os elementos da diagonal de  $\mathbf{K}'(n)$  são considerados em (22), (32) pode ser reescrita como  $\mathbf{f}'_2(\omega) = (\mathbf{T} + \mathbf{P}) \mathbf{k}'(n)$  com  $\mathbf{f}'_2(\omega)$  denotando os elementos da diagonal de  $\mathbf{Q}^H \mathbf{F}_2(\omega) \mathbf{Q}$ , e  $\mathbf{k}'(n)$ , os elementos da diagonal de  $\mathbf{K}'(n)$ . A matriz diagonal  $\mathbf{T}$  tem seus elementos dados por

$$t_{i,i} = \iint \frac{\lambda_i^2}{(1 + \omega \lambda_i)^2 \prod_{k=1}^M (1 + \omega \lambda_k)} d\omega + C_2 \quad (33)$$

e a matriz  $\mathbf{P}$  por

$$p_{i,j} = \iint \frac{\lambda_i \lambda_j}{(1 + \omega \lambda_i)(1 + \omega \lambda_j) \prod_{k=1}^M (1 + \omega \lambda_k)} d\omega + C_2 \quad (34)$$

onde  $C_2 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbf{F}_2(\omega) = 0$  [veja (30)]. Observe que (34) resulta em (33) para  $i = j$ , i.e., os elementos da diagonal de  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{P}$  são iguais. Finalmente, considerando que (33) e (34) possuem somente raízes reais e distintas [3], [4], realizando a expansão em frações parciais e resolvendo para  $\omega=0$ , obtém-se, respectivamente, (26) e, para  $i \neq j$ , (27).

 APÊNDICE II  
 DETERMINAÇÃO DE  $\mathbf{R}_3$ 

Neste apêndice, similarmente ao Apêndice I, um procedimento para o cálculo de (21) é apresentado. Inicialmente, define-se uma função matricial auxiliar como

$$\mathbf{F}_3(\omega) = \frac{1}{\pi^M \det(\mathbf{R})} \underbrace{\int \cdots \int}_{M \text{ vezes}} \frac{\mathbf{xx}^H}{(\mathbf{x}^H \mathbf{x})^2} e^{-[\mathbf{x}^H \mathbf{L}^{-1}(\omega) \mathbf{x}]} d\mathbf{x} \quad (35)$$

tal que  $\mathbf{R}_3 = \mathbf{F}_3(0)$ . Assim, diferenciando duas vezes (35) com respeito à  $\omega$ , o termo  $(\mathbf{x}^H \mathbf{x})^2$  é eliminado resultando em

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_3(\omega)}{\partial \omega^2} = \frac{\det[\mathbf{L}(\omega)]}{\det(\mathbf{R})} \left\{ \frac{1}{\pi^M \det[\mathbf{L}(\omega)]} \underbrace{\int \cdots \int}_{M \text{ vezes}} \mathbf{xx}^H e^{-[\mathbf{x}^H \mathbf{L}^{-1}(\omega) \mathbf{x}]} d\mathbf{x} \right\}. \quad (36)$$

Em (36), o termo entre chaves representa a correlação cruzada de  $x_i$  com  $x_j^*$ , sendo  $\mathbf{L}(\omega)$  a matriz de autocorrelação [15]. Assim, utilizando as propriedades do determinante e a autodecomposição de  $\mathbf{R}$ , integrando ambos os lados da expressão resultante com respeito à  $\omega$ , pré- e pós-multiplicando, respectivamente, por  $\mathbf{Q}^H$  e  $\mathbf{Q}$ , e tomando os elementos da diagonal, tem-se  $\mathbf{f}'_3(\omega) = \mathbf{s}$ , com

$$s_{i,i} = \iint \frac{\lambda_i}{(1 + \omega \lambda_i) \prod_{k=1}^M (1 + \omega \lambda_k)} d\omega + C_3 \quad (37)$$

para  $C_3 = 0$ . Finalmente, assumindo que  $\mathbf{R}$  não possua autovalores repetidos [3], [4], uma solução analítica para essa integral pode ser obtida conforme segue (28).

## REFERÊNCIAS

- [1] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.
- [2] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.
- [3] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "On the constrained stochastic gradient algorithm: Model, performance, and improved version," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 4, pp. 1304-1315, Apr. 2009.
- [4] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, and R. Seara, "An improved stochastic model of the NLMS algorithm for correlated input data," in *Proc. European Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Poznan, Poland, Sep. 2007, pp. 360-364.
- [5] G. Barrault, M. H. Costa, J. C. M. Bermudez, and A. Lenzi, "A new analytical model for the NLMS algorithm," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Philadelphia, PA, Mar. 2005, vol. 4, pp. 41-44.
- [6] M. Rupp, "The behavior of LMS and NLMS algorithms in the presence of spherically invariant processes," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, no. 3, pp. 1149-1160, Mar. 1993.
- [7] N. J. Bershad, "Analysis of the normalized LMS algorithm with Gaussian inputs," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 34, no. 4, pp. 793-806, Aug. 1986.
- [8] N. J. Bershad, "Behavior of the  $\epsilon$ -normalized LMS algorithm with Gaussian inputs," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 35, no. 5, pp. 636-644, May 1987.
- [9] M. H. Costa and J. C. M. Bermudez, "An improved model for the normalized LMS algorithm with Gaussian inputs and large number of coefficients," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Orlando, FL, May 2002, vol. 2, pp. 1385-1388.
- [10] J. C. M. Bermudez and M. H. Costa, "A statistical analysis of the  $\epsilon$ -NLMS and NLMS algorithms for correlated Gaussian signals," *J. Commun. Inform. Syst.*, vol. 20, no. 2, pp. 7-13, Aug. 2005.
- [11] E. M. Lobato and O. J. Tobias, "Stochastic model for the NLMS algorithm with correlated Gaussian data," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Toulouse, France, May 2006, vol. 3, pp. 760-763.
- [12] T. Y. Al-Naffouri and M. Moinuddin, "Exact performance analysis of the  $\epsilon$ -NLMS algorithm for colored circular Gaussian inputs," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 10, pp. 5080-5090, Oct. 2010.
- [13] T. Y. Al-Naffouri, M. Moinuddin, and M. S. Sohail, "Mean weight behavior of the NLMS algorithm for correlated Gaussian inputs," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 18, no. 1, pp. 7-10, Jan. 2011.
- [14] E. V. Kuhn, "Modelagem Estocástica do Algoritmo NLMS: Revisão e Aprimoramentos," *Dissertação de Mestrado*, Dept. de Eng. Elet., Univ. Fed. de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, 2012.
- [15] C. W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, 1st ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1992.

<sup>3</sup> O índice de tempo  $n$  é omitido por simplicidade de notação.