

Combinação Convexa de Filtros H_2 e H_∞ para Equalização Adaptativa

Fabiano de S. Chaves, João M. T. Romano e João C. M. Mota

Resumo—Neste trabalho, os critérios de otimização H_2 e H_∞ são brevemente discutidos e a utilização dos filtros H_2 e H_∞ resultantes é avaliada no contexto da equalização adaptativa de canal. A complementaridade dos critérios, com o primeiro apresentando desempenho médio superior e o segundo sendo apropriado em situações de “pior caso”, sugere uma combinação de suas características. Portanto, uma combinação convexa entre os filtros é realizada, a qual resulta em uma estrutura que apresenta desempenho em termos de erro quadrático médio no mínimo igual (e em algumas condições superior) ao desempenho individual do melhor dos dois filtros.

Palavras-Chave—Equalização adaptativa, filtragem H_2 , filtragem H_∞ , combinação convexa.

Abstract—In this work, H_2 and H_∞ optimization criteria are briefly discussed and the employment of the resulting H_2 and H_∞ filters is evaluated in the context of adaptive channel equalization. The criteria complementarity, with the first criterion presenting better mean performance and the second one being appropriate for “worst case” situations, suggests a combination of their characteristics. Therefore, a convex combination of the H_2 and H_∞ filters is carried out, which leads to a structure that performs in terms of mean-square error as well as (and in some conditions better than) the best individual filter.

Keywords—Adaptive equalization, H_2 filtering, H_∞ filtering, convex combination.

I. INTRODUÇÃO

Os sistemas de comunicação atuais caracterizam-se por requisitos de qualidade cada vez mais restritos, como altas taxas de transmissão de dados. A combinação desfavorável entre as altas taxas de transmissão de sinais e o tempo de dispersão dos canais resulta no surgimento da Interferência Entre Símbolos (IES), um dos maiores limitantes do desempenho de tais sistemas. A IES é responsável pela degradação dos sinais transmitidos, cuja recuperação no receptor pode ser bastante comprometida.

A equalização adaptativa de canal é uma técnica clássica de combate à IES [1]. Em geral, equalizadores adaptativos funcionam satisfatoriamente no caso de variações nas características dos canais, além de apresentarem baixa complexidade computacional. Algoritmos para um ajuste automático e iterativo dos coeficientes de um equalizador são obtidos de acordo com um critério de otimização, tais como a minimização do pico de distorção ou a minimização do erro quadrático médio na saída do equalizador [2].

Fabiano de S. Chaves e João M. T. Romano, Laboratório de Processamento de Sinais para Comunicações (DSPCom), FEEC/UNICAMP, Campinas, Brasil, E-mails: fabiano@decom.fee.unicamp.br, romano@dmo.fee.unicamp.br.

João C. M. Mota, Grupo de Pesquisa em Telecomunicações Sem Fio (GTel), DETI/UFC, Fortaleza, Brasil, E-mail: mota@gtel.ufc.br.

Fabiano de S. Chaves possui bolsa FAPESP/Doutorado.

A representação do problema de filtragem no espaço de estados proporciona uma relação estreita com a teoria de controle e estimação. A importância desta conexão reside na possibilidade de aplicação de resultados e abordagens comuns na área de controle e estimação ao problema de filtragem adaptativa [3], [4], [5]. Neste sentido, destacam-se duas vertentes: a estimação H_2 e a estimação H_∞ .

A estimação H_2 , cujos critérios de otimização são quadráticos, tem como solução ótima o filtro de Kalman. Algoritmos adaptativos consagrados como o RLS (*Recursive Least Squares*) são hoje reconhecidos como casos particulares do filtro de Kalman [3]. A otimalidade do filtro de Kalman pressupõe que os ruídos que compõem o modelo no espaço de estados são gaussianos e com propriedades estatísticas conhecidas. Assim, a dependência do modelo pode comprometer a robustez dos algoritmos.

Como alternativa ao critério H_2 convencional, a estimação H_∞ busca a otimização do desempenho de “pior caso”. Na estimação H_∞ , o objetivo é minimizar a máxima transferência de energia das perturbações presentes no modelo no espaço de estados para os erros de estimação. Este problema *minimax* pode ser formulado como um jogo não-cooperativo de soma-zero entre o estimador e a “natureza”, cuja solução corresponde ao filtro H_∞ [6]. Diferentemente da filtragem H_2 , na qual as perturbações são consideradas variáveis aleatórias com estatísticas conhecidas, na filtragem H_∞ nenhuma suposição sobre as propriedades estatísticas das perturbações é necessária. A otimização do desempenho de “pior caso” faz do filtro H_∞ uma solução robusta para o problema de estimação ou filtragem, que pode ser uma boa alternativa ao filtro de Kalman em problemas nos quais as incertezas quanto ao modelo adotado são significativas. Tais situações podem ocorrer, por exemplo, devido a fenômenos de difícil modelagem, como a interferência assíncrona em sistemas de múltiplo acesso sem fio e o ruído impulsivo presente em sistemas DSL (*Digital Subscriber Line*) e PLC (*Power Line Communications*). Entretanto, o filtro H_∞ é muito conservador, de maneira que seu desempenho médio é normalmente inferior ao do filtro H_2 .

A complementaridade dos filtros H_2 e H_∞ motivam estudos sobre a reunião das melhores propriedades de cada filtro. Diferentes estratégias para a obtenção de soluções de compromisso entre os dois critérios são encontradas no contexto da teoria de controle misto H_2/H_∞ [7], [8]. Porém, tais soluções requerem a resolução de pares de equações de Riccati acopladas, uma tarefa reconhecidamente dispendiosa. Além disso, as abordagens do problema via controle misto H_2/H_∞ são desenvolvidas para sistemas invariantes no tempo.

Recentemente, a combinação convexa de dois filtros

transversais adaptativos quaisquer foi proposta como uma maneira conceitualmente simples de explorar as características individuais dos filtros. Um resultado importante é a garantia de que, no estado permanente, o desempenho deste método é igual ou superior ao desempenho individual do melhor filtro [9]. Este procedimento tem sido utilizado no contexto da equalização não-supervisionada, em que filtros com diferentes características de convergência e de desempenho em estado permanente são combinados [10], [11].

Neste trabalho, nós propomos a exploração das propriedades complementares dos filtros H_2 e H_∞ no processo de equalização adaptativa supervisionada por meio de uma combinação convexa entre eles. Um algoritmo de gradiente estocástico é utilizado para a adaptação da combinação, de maneira que o erro de toda a estrutura seja minimizado, como em [9], [10], [11]. Simulações computacionais no âmbito de um sistema de comunicação sujeito à interferência assíncrona evidenciam os ganhos do equalizador combinado H_2/H_∞ . A Seção II é destinada à representação do problema no espaço de estados. Na Seção III, a estimação H_2 e a estimação H_∞ são brevemente revisitadas e os filtros H_2 e H_∞ têm suas equações descritas. O método de adaptação da combinação H_2/H_∞ é apresentado na Seção IV. As simulações computacionais e seus resultados são discutidos na Seção V. Finalmente, as conclusões do trabalho encontram-se na Seção VI.

II. EQUALIZAÇÃO ADAPTATIVA NO ESPAÇO DE ESTADOS

Um modelo simplificado em diagrama de blocos de um sistema de comunicação em banda básica é ilustrado na Fig. 1. O sinal $d(k)$ é transmitido no instante k através de um canal desconhecido, modelado por um filtro FIR (*Finite Impulse Response*) $\mathbf{h}(k)$ e pelo ruído gaussiano branco aditivo $\eta(k)$. O sinal recebido $u(k)$ é uma versão distorcida de $d(k)$, que passa por um equalizador FIR de comprimento M , cuja saída é dada por $y(k) = \mathbf{u}^H(k)\mathbf{w}(k)$, em que $(\cdot)^H$ denota o complexo conjugado transposto de (\cdot) ; $\mathbf{u}(k) = [u(k) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-M+1)]^T$ e $\mathbf{w}(k) = [w_0(k) \ w_1(k) \ \dots \ w_{M-1}(k)]^T$ são os vetores de entrada e de coeficientes do equalizador, respectivamente.

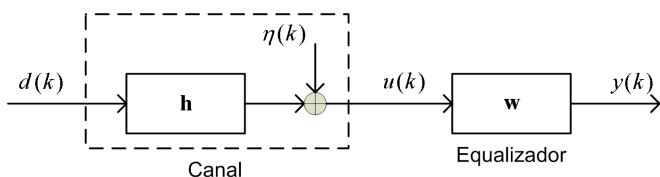


Fig. 1. Sistema de comunicação em banda básica.

A abordagem do problema da equalização de canal no espaço de estados exige a definição das equações de processo e de medida, que são modelos dinâmicos para o vetor de estados a ser estimado e para o sinal de referência. O vetor de coeficientes do equalizador ótimo, $\mathbf{w}_o(k)$, é o vetor de estados a ser estimado. As equações dinâmicas da resposta ao impulso do equalizador ótimo são bem representadas por um processo de Markov de primeira ordem [12]:

$$\mathbf{w}_o(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{w}_o(k) + \mathbf{q}(k), \quad (1)$$

em que $\mathbf{A}(k)$ é a matriz de transição de estados, $\mathbf{q}(k)$ é um vetor aleatório de média zero, chamado de ruído ou perturbação do processo, e o estado inicial $\mathbf{w}_o(0)$ é desconhecido. A equação de processo (1) é geral o bastante para representar processos não-estacionários. O sinal de referência ou desejado, $d(k)$, segue o modelo de regressão linear abaixo:

$$d(k) = \mathbf{u}^H(k)\mathbf{w}_o(k) + r(k), \quad (2)$$

em que $r(k)$ é o ruído de medida, que resulta do ruído aditivo na entrada do equalizador e da imprecisão do modelo (devido ao número finito de coeficientes do filtro). O sinal de referência é usado para gerar o sinal de erro do equalizador, $e(k) = d(k) - y(k)$, que serve como entrada para os algoritmos de adaptação do vetor $\mathbf{w}(k)$.

III. FILTRAGEM H_2 E FILTRAGEM H_∞

Na teoria de filtragem H_2 , supõe-se que as perturbações $\mathbf{w}_o(0)$, $\mathbf{q}(k)$ e $r(k)$ são variáveis aleatórias independentes, de média zero e com estatísticas de segunda ordem conhecidas, respectivamente $\mathbb{E}\{\mathbf{w}_o(0)\mathbf{w}_o^H(0)\} = \mathbf{\Pi}_0$, $\mathbb{E}\{\mathbf{q}(k)\mathbf{q}^H(k)\} = \mathbf{Q}(k)$ e $\mathbb{E}\{r(k)r^*(k)\} = R(k)$, sendo $\mathbb{E}\{\cdot\}$ o operador esperança matemática ou valor esperado e $(\cdot)^*$ o conjugado de (\cdot) . As soluções para o problema exposto são derivadas do critério de minimização do Erro Quadrático Médio (EQM). Formalmente, busca-se um estimador linear que minimiza o valor esperado da energia do erro filtrado acumulado:

$$\min_{\mathbf{w}(k)} \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=0}^k [\mathbf{w}_o(i) - \mathbf{w}(i)]^H [\mathbf{w}_o(i) - \mathbf{w}(i)] \right\}. \quad (3)$$

A solução para este problema é o filtro de Kalman, que tem suas equações resumidas na Tabela I, na qual $\mathbf{g}(k)$ representa o ganho de Kalman.

TABELA I
EQUAÇÕES RECURSIVAS DO FILTRO DE KALMAN.

Filtro de Kalman
$\mathbf{g}(k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{u}(k) [\mathbf{u}^H(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{u}(k) + R(k)]^{-1}$
$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{w}(k) + \mathbf{g}(k+1) [d(k+1) - \mathbf{u}^H(k+1)\mathbf{A}(k)\mathbf{w}(k)]$, $\mathbf{w}(-1) = 0$
$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{A}(k)[\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{u}^H(k)]\mathbf{P}(k)\mathbf{A}^H(k) + \mathbf{Q}(k)$, $\mathbf{P}(0) = \mathbf{\Pi}_0$

Como mencionado acima, os ruídos envolvidos são variáveis aleatórias independentes, de média zero e com estatísticas de segunda ordem conhecidas. Portanto, quando os ruídos são gaussianos, eles são completamente caracterizados em termos estatísticos, e o filtro de Kalman é o estimador ótimo para o problema descrito em (1), (2) e (3). O algoritmo RLS, bastante empregado no problema de equalização adaptativa, é um caso especial do filtro de Kalman [3], em que $\mathbf{A}(k) = \beta^{-1/2}\mathbf{I}$, $\mathbf{q}(k) = 0$ e $R(k) = 1$, sendo $0 \ll \beta \leq 1$ o fator de esquecimento. Neste trabalho, o equalizador H_2 considerado tem seus coeficientes adaptados pelo algoritmo RLS.

Diferentemente da filtragem H_2 , na qual as perturbações são consideradas variáveis aleatórias gaussianas com estatísticas

conhecidas, na filtragem H_∞ não são feitas suposições sobre as perturbações $\mathbf{w}_o(0)$, $\mathbf{q}(k)$ e $r(k)$. Além disso, enquanto na filtragem H_2 o interesse reside na estimação de $\mathbf{w}_o(k)$, com o erro de estimação definido como $\tilde{\mathbf{w}}(k) = \mathbf{w}_o(k) - \mathbf{w}(k)$, a filtragem H_∞ permite a estimação de uma combinação linear dos estados, neste caso, o próprio sinal de saída do equalizador ótimo, $\mathbf{z}_o(k) = \mathbf{u}^H(k)\mathbf{w}_o(k)$.

A filtragem H_∞ está diretamente relacionada à robustez, pois é concebida no cenário de “pior caso” em termos do ganho de energia das perturbações para o erro filtrado, ou seja:

$$\max_{\mathbf{w}_o(0), \{\mathbf{q}\}, \{r\}} \frac{\sum_{k=0}^N \|\mathbf{z}_o(k) - \mathbf{z}(k)\|^2}{\|\tilde{\mathbf{w}}(0)\|_{\Pi_0}^2 + \sum_{k=0}^N \left(\|\mathbf{q}(k)\|_{\mathbf{Q}^{-1}}^2 + \|r(k)\|_{R^{-1}}^2 \right)}, \quad (4)$$

sendo $\|\cdot\|$ a norma euclidiana ponderada, tal que $\|\mathbf{q}(k)\|_{\mathbf{Q}^{-1}}^2 = \mathbf{q}(k)^H \mathbf{Q}^{-1}(k) \mathbf{q}(k)$; $\tilde{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{w}_o(0) - \mathbf{w}(0)$ e $\mathbf{z}(k) = \mathbf{u}^H(k)\mathbf{w}(k)$. Neste caso, as matrizes de ponderação $\mathbf{Q}(k)$ e as variáveis de ponderação $R(k)$ são escolhas arbitrárias, já que não se faz qualquer suposição sobre as características das perturbações.

O objetivo na filtragem H_∞ é minimizar o ganho de energia no “pior caso”. Apenas em poucas situações é possível minimizar tal ganho de energia explicitamente. Com isso, é comum que seja considerado o seguinte problema subótimo parametrizado em γ [4]:

$$\max_{\mathbf{w}_o(0), \{\mathbf{q}\}, \{r\}} \frac{\sum_{k=0}^N \|\mathbf{z}_o(k) - \mathbf{z}(k)\|^2}{\|\tilde{\mathbf{w}}(0)\|_{\Pi_0}^2 + \sum_{k=0}^N \left(\|\mathbf{q}(k)\|_{\mathbf{Q}^{-1}}^2 + \|r(k)\|_{R^{-1}}^2 \right)} < \gamma^2, \quad (5)$$

no qual γ^2 é o limitante superior do ganho de energia. Dessa forma, quanto menor o valor de γ^2 , mais restritivo é o filtro com relação ao ganho de energia das perturbações para o erro filtrado. Em outras palavras, o parâmetro γ é o responsável pelo nível de robustez do filtro H_∞ .

Uma das abordagens utilizadas para a resolução do problema exposto tem por base a teoria dos jogos [5]. Para isso, a equação (5) é reescrita de maneira a evidenciar os dois jogadores do problema *minimax*:

$$\min_{\{\mathbf{z}\}} \max_{\mathbf{w}_o(0), \{\mathbf{q}\}, \{r\}} \left\{ \sum_{k=0}^N \|\mathbf{z}_o(k) - \mathbf{z}(k)\|^2 - \gamma^2 \left(\|\tilde{\mathbf{w}}(0)\|_{\Pi_0}^2 + \sum_{k=0}^N \left(\|\mathbf{q}(k)\|_{\mathbf{Q}^{-1}}^2 + \|r(k)\|_{R^{-1}}^2 \right) \right) \right\}. \quad (6)$$

Há, portanto, uma diferença fundamental de filosofia entre os filtros de Kalman e H_∞ . No filtro de Kalman, supõe-

se que a natureza é indiferente. A função densidade de probabilidade do ruído é conhecida e o filtro é definido com o uso deste conhecimento, resultando em uma estimação de estados estatisticamente ótima. Na filtragem H_∞ , a natureza é suposta “perversa” no sentido de degradar ao máximo a estimação dos estados, de onde vem a idéia de abordagem de “pior caso”. Na prática, ambas suposições são improváveis, sendo comum uma situação intermediária. Apesar da diferença de filosofia entre os dois filtros, suas equações são bastante similares. Além disso, sabe-se que o filtro H_∞ tende ao filtro de Kalman com o aumento do valor do seu parâmetro γ [5]. A Tabela II resume as equações do filtro H_∞ , nas quais $\bar{\mathbf{g}}(k)$ é o ganho do filtro H_∞ , em analogia ao ganho de Kalman.

TABELA II
EQUAÇÕES RECURSIVAS DO FILTRO H_∞ .

Filtro H_∞
$\mathbf{z}(k) = \mathbf{u}^H(k)\mathbf{w}(k)$
$\bar{\mathbf{g}}(k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{u}(k) [\mathbf{u}^H(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{u}(k) + R(k)]^{-1}$
$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{w}(k) + \bar{\mathbf{g}}(k+1) [d(k+1) - \mathbf{u}^H(k+1)\mathbf{A}(k)\mathbf{w}(k)]$, $\mathbf{w}(-1) = 0$
$\mathbf{P}_{k+1}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k)\boldsymbol{\Omega}^{-1}(k)\mathbf{A}^H(k) + \mathbf{Q}(k)$, $\mathbf{P}(0) = \Pi_0$
$\boldsymbol{\Omega}(k) = \mathbf{I} + (\mathbf{u}(k)R^{-1}(k)\mathbf{u}^H(k) - \gamma^{-2}\mathbf{u}(k)\mathbf{u}^H(k))\mathbf{P}(k)$

A aplicação da filtragem H_∞ ao problema da equalização adaptativa, como mostrado na Tabela II, requer que a matriz $\boldsymbol{\Omega}(k)$ seja definida positiva para todo k . Logo, da última equação desta tabela, obtém-se uma condição suficiente para a existência de uma família de filtros H_∞ (cada valor de γ resulta em um filtro):

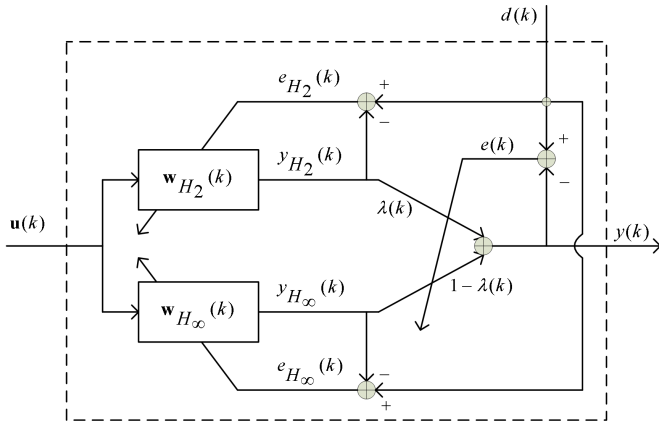
$$\gamma^{-2} \leq R^{-1}(k) \Rightarrow \gamma \geq 1, \text{ se } R(k) = 1. \quad (7)$$

A escolha $R(k) = 1$ é razoável e está em concordância com o parâmetro equivalente do algoritmo RLS. Como mencionado anteriormente, o parâmetro γ^2 é o limitante superior do ganho de energia das perturbações para o erro de estimação. Portanto, de acordo com (7), pode-se garantir a existência do filtro H_∞ que não amplifica a energia do erro de estimação devido às perturbações ($\gamma = 1$). Este é o equalizador H_∞ considerado neste trabalho.

O uso do filtro H_∞ se torna interessante em casos nos quais as imperfeições ou incertezas nos modelos adotados são significativas, situações em que se verifica degradação de desempenho das técnicas convencionais de filtragem. Por outro lado, o desempenho dos métodos convencionais de filtragem se mostra superior no tocante ao comportamento médio dos sistemas. A próxima seção trata de uma solução de compromisso entre os critérios H_2 e H_∞ .

IV. COMBINAÇÃO DOS CRITÉRIOS H_2 E H_∞

Nesta seção, um esquema de combinação entre os critérios H_2 e H_∞ é apresentado. Na verdade, é realizada uma combinação convexa entre os filtros transversais H_2 e H_∞ adaptativos, que operam independentemente ajustando seus coeficientes de acordo com seus respectivos erros $e_{H_2}(k)$ e $e_{H_\infty}(k)$ na saída, como ilustra a Fig. 2.


 Fig. 2. Combinação convexa adaptativa dos filtros H_2 e H_∞ .

A estrutura da Combinação H_2/H_∞ está também representada na Fig. 2. O sinal na saída desta estrutura, $y(k)$ é a combinação convexa entre os sinais nas saídas dos filtros H_2 e H_∞ , respectivamente, $y_{H_2}(k)$ e $y_{H_\infty}(k)$:

$$y(k) = \lambda(k)y_{H_2}(k) + [1 - \lambda(k)]y_{H_\infty}(k), \quad (8)$$

em que $\lambda(k)$ é a ponderação da combinação, $y_{H_2}(k) = \mathbf{u}^H(k)\mathbf{w}_{H_2}(k)$ e $y_{H_\infty}(k) = \mathbf{u}^H(k)\mathbf{w}_{H_\infty}(k)$, com $\mathbf{w}_{H_2}(k)$ e $\mathbf{w}_{H_\infty}(k)$ correspondendo aos vetores de coeficientes dos filtros e $\mathbf{u}(k)$ sendo o vetor de entrada comum a ambos os filtros. Dessa forma, a Combinação H_2/H_∞ também pode ser vista como um filtro transversal com o seguinte vetor de coeficientes:

$$\mathbf{w}(k) = \lambda(k)\mathbf{w}_{H_2}(k) + [1 - \lambda(k)]\mathbf{w}_{H_\infty}(k). \quad (9)$$

O objetivo na adaptação da ponderação $\lambda(k)$ é a minimização do erro quadrático da estrutura, $|e(k)|^2 = |d(k) - y(k)|^2$. A combinação convexa tem como restrição $0 \leq \lambda(k) \leq 1$, que é satisfeita ao se definir $\lambda(k)$ como uma função sigmóide na variável auxiliar $\alpha(k)$ [9]:

$$\lambda(k) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha(k)}}. \quad (10)$$

A adaptação da variável $\alpha(k)$ é, então, realizada por meio do método do gradiente:

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial |e(k)|^2}{\partial \alpha(k)}, \quad (11)$$

em que μ é o fator de passo. A derivada parcial na equação acima equivale a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial |e(k)|^2}{\partial \alpha(k)} &= \frac{\partial |e(k)|^2}{\partial \lambda(k)} \frac{\partial \lambda(k)}{\partial \alpha(k)} \\ &= \frac{\partial |e(k)|^2}{\partial \lambda(k)} \lambda(k)[1 - \lambda(k)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Usando (8), podemos reescrever o erro $e(k)$ em função de $\lambda(k)$, isto é,

$$e(k) = d(k) - \lambda(k)y_{H_2}(k) - [1 - \lambda(k)]y_{H_\infty}(k), \quad (13)$$

de onde se chega à expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial |e(k)|^2}{\partial \lambda(k)} &= \frac{\partial e^*(k)e(k)}{\partial \lambda(k)} \\ &= \frac{\partial e^*(k)}{\partial \lambda(k)} e(k) + \frac{\partial e(k)}{\partial \lambda(k)} e^*(k) \\ &= -2\text{Re} \{ e(k)[y_{H_2}(k) - y_{H_\infty}(k)]^* \}. \end{aligned} \quad (14)$$

Portanto, usando (12) e (14) em (11), obtém-se o algoritmo de adaptação da variável $\alpha(k)$:

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) + \mu \text{Re} \{ e(k)[y_{H_2}(k) - y_{H_\infty}(k)]^* \} \lambda(k)[1 - \lambda(k)]. \quad (15)$$

Conseqüentemente, (10) e (15) definem a adaptação da ponderação $\lambda(k)$ de forma a minimizar o erro quadrático da estrutura de combinação dos filtros.

V. SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Nesta seção, simulações computacionais são realizadas com o objetivo de avaliar o desempenho dos equalizadores H_2 , H_∞ e da Combinação H_2/H_∞ quando submetidos a situações em que o modelo no espaço de estados (ver Seção II) pode não representar bem a dinâmica das variáveis envolvidas ou apresentar incertezas significativas quanto às estatísticas das perturbações. Para isso, considera-se um sistema de comunicação sujeito à interferência assíncrona, característica própria de sistemas de comunicação sem fio, em que os intervalos de utilização simultânea de um canal por mais de um usuário podem ser aleatórios.

O ambiente de simulação consiste, portanto, em um modelo simplificado de um sistema de comunicação TDMA (*Time Division Multiple Access*), em que a modulação empregada é a BPSK (*Binary Phase Shift Keying*) e o equalizador é linear e de ordem 7. O canal adotado é o típico urbano (TU) [13], com 5 componentes separadas entre si por um atraso equivalente ao tempo de símbolo. Cada realização ou experimento compreende uma seqüência de 20.000 símbolos.

Como a atenção está voltada para os efeitos da mudança brusca de operação dos filtros devido à interferência assíncrona, em todas as simulações foi adotada uma Relação Sinal-Ruído (RSR) alta, de 40 dB. A natureza aleatória da interferência assíncrona sugere uma modelagem estatística tanto para os intervalos de tempo em que ela é observada como para a sua intensidade. Entretanto, com o objetivo de facilitar a avaliação do comportamento dos filtros nós consideramos que a interferência se faz presente durante um intervalo fixo de tempo, entre os intervalos de símbolo $k = 5.000$ e $k = 10.000$. Além disso, consideramos uma interferência com a mesma potência do sinal de interesse, isto é, a Relação Sinal-Interferência (RSI) é de 0 dB. Os resultados apresentados a seguir são extraídos de 1.000 experimentos. A Tabela III reúne os principais parâmetros de simulação.

A Fig. 3 ilustra a evolução temporal do Erro Quadrático Médio (EQM) para os equalizadores H_2 , H_∞ e Combinação H_2/H_∞ , além da média da ponderação λ da combinação. Neste caso, o canal é constante e o fator de esquecimento

TABELA III
PRINCIPAIS PARÂMETROS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS.

Parâmetro	Valor
Tempo de símbolo	3,692 μ s
Seqüência transmitida	20.000 símbolos
Modelo de canal	TU, com 5 coeficientes [13]
RSR	40 dB
RSI	0 dB
Intervalo de duração da interferência	entre os símbolos 5.000 e 10.000
Ordem do equalizador	7 coeficientes
Modulação	BPSK
Número de realizações	1.000 seqüências transmitidas

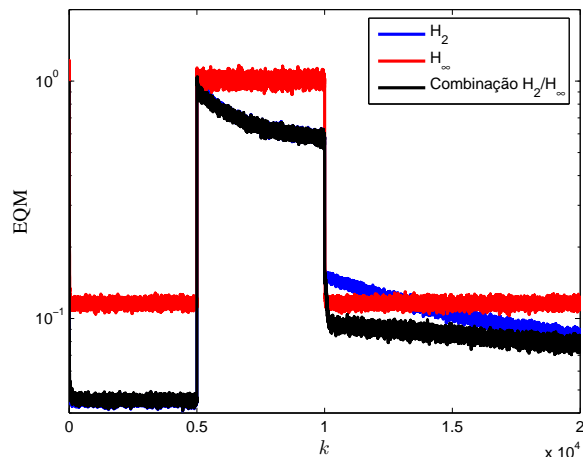
do equalizador H_2 é $\beta = 1$. As curvas de EQM na Fig. 3(a) confirmam as já discutidas características dos filtros H_2 e H_∞ :

- 1) O filtro H_∞ é muito conservador, o que justifica a clara superioridade do filtro H_2 em termos de EQM no estado permanente;
- 2) O filtro H_∞ é praticamente insensível a mudanças bruscas nas características do sistema sobre o qual ele opera. Esta característica de robustez é ilustrada pelo retorno rápido do EQM após o desaparecimento da interferência (a partir de $k = 10.000$) ao nível alcançado antes do surgimento da interferência;
- 3) A complementaridade dos filtros também fica evidente a partir de $k = 10.000$. Durante um intervalo de pelo menos 3.000 símbolos logo após a segunda variação brusca no sistema, o desempenho do filtro H_∞ em termos de EQM é superior ao do filtro H_2 devido ao retorno lento deste último ao nível de EQM anterior ao surgimento da interferência. Esta situação se inverte após $k = 13.000$.

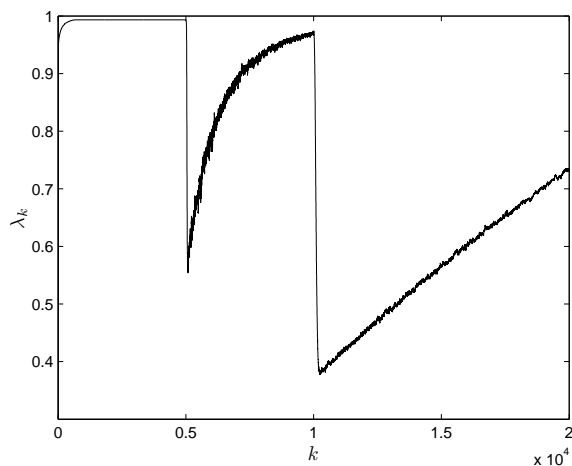
A Combinação H_2/H_∞ consegue reunir as melhores propriedades de cada filtro. Em concordância com [9], observa-se que, no estado permanente, o desempenho da combinação convexa entre os dois filtros é igual ou superior ao desempenho do melhor deles. A curva da média da evolução temporal da ponderação λ na Fig. 3(b) permite identificar as contribuições individuais dos filtros na Combinação H_2/H_∞ . Percebe-se claramente que o filtro H_∞ é acionado na ocorrência de perturbações (surgimento e desaparecimento da interferência) que não são bem representadas no modelo no espaço de estados, do qual o filtro H_2 é dependente. À medida que o filtro H_2 se aproxima de seu estado permanente, sua contribuição na combinação dos filtros aumenta, ou seja, $\lambda \rightarrow 1$.

Duas questões surgem da análise das curvas da Fig. 3. A primeira diz respeito à necessidade da utilização do filtro H_∞ , que contribui efetivamente na Combinação H_2/H_∞ apenas durante a convergência do filtro H_2 . Será o filtro H_∞ útil apenas no caso de variações bruscas nas condições de operação do sistema? A outra questão é relativa ao aumento da velocidade de convergência da Combinação H_2/H_∞ , que pode ser resolvida com o uso de um fator de esquecimento $0 \ll \beta < 1$ para o filtro H_2 . Quanto à primeira questão, é importante ressaltar que os resultados da Fig. 3 foram obtidos para um canal específico. Logo, eles não são estatisticamente representativos para deles se extrair uma conclusão.

Com o objetivo de obter resultados mais representativos, realizamos novamente as simulações computacionais com o



(a) Erro Quadrático Médio (EQM).



(b) Média da ponderação λ da combinação.

Fig. 3. Evolução temporal do EQM e da média da ponderação λ da combinação para os equalizadores H_2 , H_∞ e Combinação H_2/H_∞ .

canal TU, mas considerando em cada experimento um fator de desvanecimento para cada coeficiente do canal. A Fig. 4 ilustra os resultados. Para o equalizador H_2 configurado com $\beta = 1$, a evolução temporal do EQM dos equalizadores H_2 , H_∞ e Combinação H_2/H_∞ e a média da ponderação λ da combinação são exibidas em Fig. 4(a) e Fig. 4(c), respectivamente. As mesmas curvas são mostradas nas Figs. 4(b) e 4(d) para o equalizador H_2 configurado com $\beta = 0,9995$. Simulações computacionais com valores menores de β revelaram problemas de estabilidade do filtro H_2 .

Da mesma forma que para o canal específico na Fig. 3, os resultados observados na Fig. 4 confirmam as características dos filtros H_2 e H_∞ . Entretanto, estes últimos resultados nos permitem afirmar que o filtro H_∞ não é útil apenas no caso de variações bruscas nas condições de operação do sistema, pois a média de λ para $0 < k \leq 5.000$, intervalo em que não há variação nas condições de operação do sistema, se mostra em torno de 0,9. Evidentemente, a maior contribuição do filtro H_∞ se dá mesmo naquelas situações de variações bruscas. A Fig. 4 também confirma que usar um filtro H_2 com maior capacidade de rastreamento de variações nas condições de operação ($\beta < 1$) aumenta bastante a velocidade de

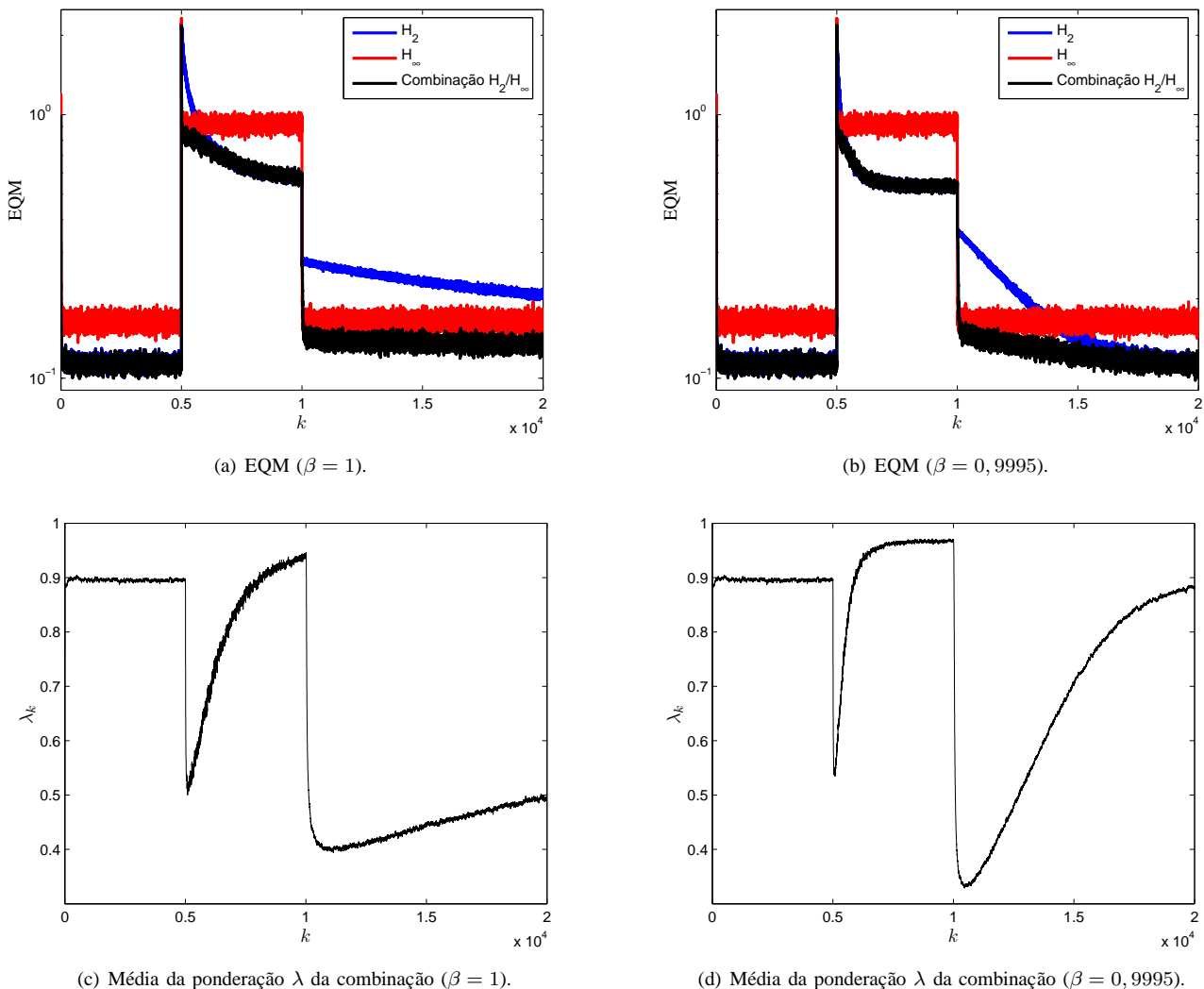


Fig. 4. Evolução temporal do EQM e da média da ponderação λ da combinação para os equalizadores H_2 , H_∞ e Combinação H_2/H_∞ .

convergência da Combinação H_2/H_∞ e, pelo menos nos testes realizados, não apresenta prejuízos com relação ao nível de EQM em estado permanente.

VI. CONCLUSÕES

Devido à complementaridade dos filtros H_2 e H_∞ , melhor desempenho médio do filtro H_2 , melhor desempenho de “piores caso” do filtro H_∞ , a reunião das melhores propriedades de cada filtro em uma única estrutura se torna atrativa. Neste trabalho, uma combinação convexa entre os dois filtros é realizada com este objetivo. No contexto de equalização adaptativa supervisionada, o desempenho da Combinação H_2/H_∞ se mostra igual ou superior ao desempenho individual do melhor filtro, reunindo assim as características de precisão e robustez. Uma maneira diferente de realizar a combinação dos critérios fica como perspectiva para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- [1] S. U. H. Qureshi, “Adaptive equalization,” *Proc. IEEE*, v. 53, pp. 1349–1387, Sep. 1985.
- [2] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 4^a edição. McGraw-Hill, 2001.
- [3] A. H. Sayed e T. Kailath, “A state space approach to adaptive RLS filtering,” *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 11, no. 3, pp. 18–60, Jul. 1994.
- [4] B. Hassibi, A. H. Sayed e T. Kailath, *Indefinite-Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to H_2 and H_∞ Theories*. SIAM, 1999.
- [5] D. Simon, *Optimal State Estimation*. John Wiley & Sons, 2006.
- [6] U. Shaked e Y. Theodor, “ H_∞ -optimal estimation: A tutorial,” *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, v. 2, pp. 2278–2286, Dec. 1992.
- [7] D. J. N. Limebeer, B. D. O. Anderson e B. Hendel, “A nash game approach to mixed H_2/H_∞ control,” *IEEE Trans. Automatic Control*, v. 39, no. 1, pp. 69–82, Jan. 1994.
- [8] P. P. Khargonekar e M. A. Rotea, “Mixed H_2/H_∞ control: A convex optimization approach,” *IEEE Trans. Automatic Control*, v. 36, no. 7, pp. 824–837, Jul. 1991.
- [9] J. Arenas-García, A. R. Figueiras-Vidal e A. H. Sayed, “Mean-square performance of a convex combination of two adaptive filters,” *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 54, no. 3, pp. 1078–1090, Mar. 2006.
- [10] M. T. M. Silva e V. H. Nascimento, “Convex combination of blind adaptive equalizers with different tracking capabilities,” *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, v. 3, pp. 457–460, Apr. 2007.
- [11] M. T. M. Silva e J. Mendes-Filho, “Convex combinations of adaptive algorithms for blind equalization of QAM signals,” *Proc. Brazilian Telecommunications Symposium*, pp. 1–6, Sep. 2007.
- [12] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4^a edição. Prentice Hall, 2001.
- [13] 3GPP, “Digital cellular telecommunications system (phase 2+): Radio transmission and reception,” 3rd Generation Partnership Project (3GPP), Technical Report TS 45005, Jul. 2001.