

# Desempenho de Códigos Convolucionais Não-Unicamente Decodificáveis no Canal Aditivo com Dois Usuários Binários

Maria de Lourdes M.G. Alcoforado, Valdemar C. da Rocha Jr. e Márcio J. de Carvalho Lima

**Resumo**—Este artigo apresenta resultados de simulações computacionais sobre o canal aditivo para dois usuários binários (2-BAC) em presença de ruído branco gaussiano aditivo, com uso de códigos convolucionais não unicamente decodificáveis. O desempenho de diferentes códigos convolucionais usados na construção proposta é comparado em duas situações distintas, quais sejam a decodificação iterativa turbo e a decodificação não-iterativa.

**Palavras-Chave**—Códigos convolucionais, canal aditivo com dois usuários binários, códigos turbo, decodificação iterativa.

**Abstract**—This paper presents simulation results for pairs of convolutional codes, not uniquely decodable, over the 2-user binary adder channel in the presence of additive white Gaussian noise. The performance of different convolutional codes used in this construction is compared for two distinct decoding situations, namely iterative turbo decoding and non-iterative decoding.

**Keywords**—Convolutional codes, 2-user binary adder channel, turbo codes, iterative decoder.

## I. INTRODUÇÃO

O Canal aditivo com dois usuários binários (2-BAC) é um dos modelos mais simples de canais de acesso múltiplo [1]. O canal 2-BAC é sem memória e aceita em cada intervalo de tempo duas entradas binárias, uma para cada usuário. Salvo aviso em contrário, considera-se que as entradas do 2-BAC, para cada usuário, pertencem ao alfabeto  $\{0, 1\}$  e que, na ausência de ruído, a saída do 2-BAC é dada pela soma aritmética das entradas e seus símbolos pertencem ao alfabeto  $\{0, 1, 2\}$ . No caso ruidoso a saída do 2-BAC é descrita por uma distribuição de probabilidade condicional [1], [2].

Em 2004 foi apresentada uma técnica de construção de códigos de treliça para o canal aditivo com dois usuários binários [3]-[6], a partir da introdução de uma condição de decodibilidade única para códigos convolucionais [7] no 2-BAC. Um par de códigos de bloco, unicamente decodificáveis para o 2-BAC, foi usado numa concatenação em série com códigos convolucionais como um filtro para eliminar aqueles caminhos através da treliça do 2-BAC que levariam a ambigüidade no decodificador. Em 2005 foram apresentados resultados de simulação computacional fazendo uso da construção [8] em que cada usuário tem associado a ele um codificador

de bloco concatenado com um codificador turbo [9], [10]. Especificamente, cada usuário tem associado um codificador de bloco concatenado em série com dois codificadores convolucionais, dispostos em concatenação paralela, com um entrelaçador entre eles. Os códigos de bloco usados, sendo unicamente decodificáveis para o 2-BAC e servindo como entrada para os codificadores convolucionais de cada usuário, fazem com que na saída do codificador turbo resultem códigos unicamente decodificáveis para o 2-BAC. Esta construção permite que os codificadores convolucionais associados a um dos usuários sejam idênticos aos codificadores convolucionais associados ao outro usuário. Ainda em 2005, foram apresentados resultados de simulação computacional usando construção semelhante porém, com a concatenação de um codificador de bloco com códigos de bloco turbo [11], ao invés de códigos convolucionais, na geração do código turbo.

Em 2005 [12] e 2007 [13] foram encontrados novos códigos unicamente decodificáveis para o canal 2-BAC e para o canal aditivo com  $t$  usuários ( $t$ -BAC) com  $3 \leq t \leq 5$ , respectivamente. Estes códigos levaram a um incremento da mais alta taxa de transmissão conhecida para códigos unicamente decodificáveis em tais canais.

Em 2009 [14] são apresentados resultados de simulações computacionais quando códigos de verificação de paridade de baixa densidade (LDPC), unicamente decodificáveis, são empregados no canal 2-BAC. Este procedimento sendo estendido para canais 3-BAC.

O objetivo desse artigo é o uso de códigos convolucionais não necessariamente unicamente decodificáveis para dois usuários, sem ser feito o uso da concatenação serial introduzida em [5], [6]. A eficiência desse método é ilustrada através de exemplo computacional, em que são feitas simulações usando o algoritmo BCJR para dois usuários com e sem o uso da decodificação iterativa.

Na Seção II são descritos os detalhes do codificador empregado. Na Seção III são revistos os principais aspectos do canal 2-BAC ruidoso e é introduzida uma nova descrição da treliça para o 2-BAC consistindo de duas tabelas. A Seção IV descreve detalhes do decodificador iterativo empregado e o artigo é finalizado na Seção V com a apresentação de resultados de simulação em computador e alguns comentários.

## II. O CODIFICADOR

Considere um par de códigos  $(C_1, C_2)$  associados respectivamente aos usuários 1 e 2 e dispostos conforme ilustrado na Figura 1.

Maria de Lourdes M.G. Alcoforado, Núcleo de Pesquisas em Telecomunicações - NPT, Departamento de Engenharia Elétrica, Escola Politécnica de Pernambuco, Recife, PE, Brasil, E-mail: mlmga@upe.poli.br, Valdemar C. da Rocha Jr. e Márcio J. de Carvalho Lima, Grupo de Pesquisa em Comunicações - CODEC, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Caixa Postal 7800, 50711-970, Recife, PE, Brasil, E-mail: vcr@ufpe.br, marcio.lima@ee.ufpe.br.

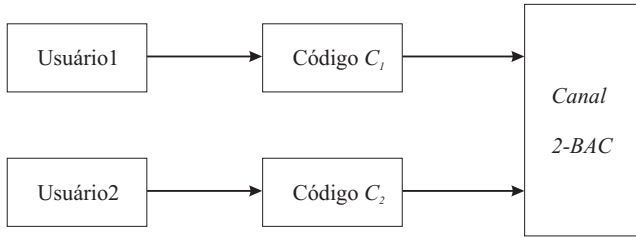


Fig. 1. Modelo de construção de código para o 2-BAC.

Suponha que o codificador para  $C_1$  utiliza o esquema de concatenação paralela introduzido em [9], [10]. Desta forma, o codificador para  $C_1$  é formado pela concatenação paralela de dois códigos convolucionais recursivos componentes,  $C_1^-$  e  $C_1^+$ , não necessariamente iguais. As entradas de ambos os codificadores componentes utilizam os mesmos bits de informação  $u_k$ , mas em uma ordem diferente, devido à presença do entrelaçador. Similarmente, o codificador para  $C_2$  é formado pela concatenação paralela de dois códigos convolucionais recursivos componentes,  $C_2^-$  e  $C_2^+$ , não necessariamente iguais. As entradas de ambos os codificadores componentes utilizam os mesmos bits de informação  $d_k$ , mas em uma ordem diferente, devido à presença do entrelaçador, que deve ser idêntico ao entrelaçador utilizado para  $C_1$ . A taxa de transmissão de  $C_1$  deve ser igual à taxa de transmissão de  $C_2$ . Considere, sem perda de generalidade, que cada codificador recursivo sistemático tem taxa de transmissão assintótica  $1/n$  e  $M$  estados, para ambos usuários. A seqüência de símbolos de informação para o usuário 1, denotada por  $\mathbf{u}$ , é representada por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1^N = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_N\},$$

e a seqüência de símbolos de informação para o usuário 2, denotada por  $\mathbf{d}$ , é representada por:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1^N = \{d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_N\}.$$

A seqüência de palavras-código associadas ao usuário 1, denotada por  $\mathbf{v}$ , é representada por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1^N = \{v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, v_N\},$$

e a seqüência de palavras-código associadas ao usuário 2, denotada por  $\mathbf{w}$ , é representada por:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1^N = \{w_1, w_2, \dots, w_k, \dots, w_N\},$$

em que

$$\mathbf{v}_k = (v_k^{(0)}, v_k^{(1)}, \dots, v_k^{(n-1)}) = (u_k, v_k^{(1)}, \dots, v_k^{(n-1)}),$$

$1 \leq k \leq N$ , denota a saída associada a cada símbolo de informação do usuário 1 e similarmente,

$$\mathbf{w}_k = (w_k^{(0)}, w_k^{(1)}, \dots, w_k^{(n-1)}) = (d_k, w_k^{(1)}, \dots, w_k^{(n-1)})$$

$1 \leq k \leq N$ , denota a saída associada a cada símbolo de informação do usuário 2. Os símbolos  $v_k^{(0)}$  e  $w_k^{(0)}$  denotam as saídas sistemáticas dos codificadores para o usuário 1 e para o usuário 2, respectivamente.

*Exemplo 1:* Sejam  $C_1^-$  e  $C_1^+$  dois codificadores convolucionais idênticos recursivos sistemáticos com taxa  $1/2$  e matriz

geradora polinomial dada em (1). De modo semelhante, sejam  $C_2^-$  e  $C_2^+$  dois codificadores convolucionais idênticos recursivos sistemáticos com taxa  $1/2$  e matriz geradora polinomial dada em (2).

$$G_1(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$G_2(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{D+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Os codificadores associados ao usuário 1 e ao usuário 2 estão representados nas figuras 2 e 3, respectivamente.

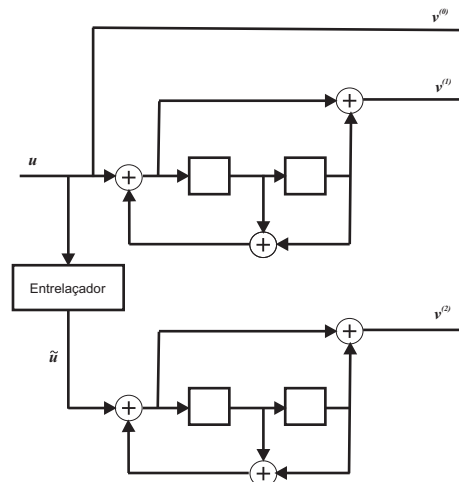


Fig. 2. Codificador turbo para o código  $C_1$ , formado pela concatenação paralela de dois códigos convolucionais recursivos componentes,  $C_1^- = C_1^+$ , com matrizes geradoras polinomiais dadas por  $G_1(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ .

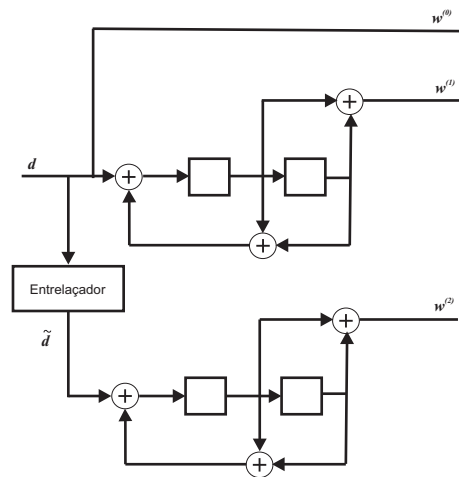


Fig. 3. Codificador turbo para o código  $C_2$ , formado pela concatenação paralela de dois códigos convolucionais recursivos componentes,  $C_2^- = C_2^+$ , com matrizes geradoras polinomiais dadas por  $G_2(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{D+D^2}{1+D+D^2} \end{bmatrix}$ .

### III. O CANAL 2-BAC RUIDOSO

As seqüências de palavras-código  $\mathbf{v}_1^N$  e  $\mathbf{w}_1^N$  são as entradas para um canal aditivo ruidoso com dois usuários binários,

sem memória. O ruído aqui considerado é o ruído branco gaussiano aditivo. É feito uso da construção de Peterson e Costello [4], [5] de uma treliça para o 2-BAC, a partir das treliças individuais de cada usuário, denominada *treliça para dois usuários*.

A seqüência de sub-blocos na treliça para dois usuários é dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1^N = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_N\},$$

em que  $\mathbf{x}_k = (x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n-1)})$ . A variável aleatória  $x_k^{(j)}$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , no instante de tempo  $k$ , é definida por meio da seguinte igualdade

$$x_k^{(j)} = (2v_k^{(j)} - 1) + (2w_k^{(j)} - 1), \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (3)$$

A saída do canal representa a seqüência recebida

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1^N = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k, \dots, \mathbf{r}_N\},$$

em que  $\mathbf{r}_k = (r_k^{(0)}, r_k^{(1)}, \dots, r_k^{(n-1)})$ . A variável aleatória  $r_k^{(j)}$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , no instante de tempo  $k$ , é definida pela seguinte igualdade

$$r_k^{(j)} = x_k^{(j)} + q_k^{(j)} \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (4)$$

em que os valores  $q_k^{(j)}$  representam amostras independentes de ruído com a mesma variância  $\sigma^2$  e média zero.

*Exemplo 2:* Considere novamente a situação dada no *Exemplo 1*. A Figura 4 apresenta parte da treliça para dois usuários, contendo apenas ramos ligando os estados, no instante de tempo anterior ( $S_{k-1}$ ) e ( $S_{k-1}$ ) = (1111), aos respectivos estados no instante de tempo atual, ( $S_k$ ). A identificação próxima a cada ramo, indica o par de símbolos de entrada ( $u_k, d_k$ ), seguidos pela saída do canal 2-BAC sem ruído ( $\mathbf{x}_k$ ), isto é  $(u_k, d_k)/\mathbf{x}_k$ . Por questões de simplicidade e melhor visualização, a treliça completa para dois usuários será representada pelas Tabelas I e II. Na Tabela I o conteúdo de cada célula corresponde à saída do canal 2-BAC sem ruído  $\mathbf{x}_k$ , quando o estado no instante de tempo anterior ( $S_{k-1}$ ) corresponde ao rótulo da linha e o rótulo da coluna corresponde ao par de entrada dos dois usuários ( $u_k, d_k$ ). Similarmente, na Tabela II o conteúdo de cada célula corresponde ao estado atual da treliça ( $S_k$ ), quando o estado anterior ( $S_{k-1}$ ) corresponde ao rótulo da linha e o rótulo da coluna corresponde ao par de entrada dos dois usuários ( $u_k, d_k$ ). Por exemplo, como pode ser visto nas Tabelas I e II, se ( $S_{k-1}$ ) = (0110) e ( $u_k, d_k$ ) = (1, 0), então  $\mathbf{x}_k = (1, 2)$  e ( $S_k$ ) = (0011). Se ( $S_{k-1}$ ) = (1111) e ( $u_k, d_k$ ) = (0, 1), então  $\mathbf{x}_k = (1, 1)$  e ( $S_k$ ) = (0111).

#### IV. O DECODIFICADOR

O decodificador utilizado, conforme ilustrado na Figura 5, emprega a decodificação iterativa [15] para detectar os pares de símbolos de informação binários mais prováveis: ( $u_k, d_k$ ). O algoritmo iterativo empregado faz uso da técnica conhecida como BCJR [16], adaptado para uso no 2-BAC [5], fazendo uso da treliça para dois usuários. São calculadas as razões de log-verossimilhança  $\Lambda_1(u_k, d_k)$ ,  $\Lambda_2(u_k, d_k)$  e  $\Lambda_3(u_k, d_k)$  associadas ao par dos símbolos de informação

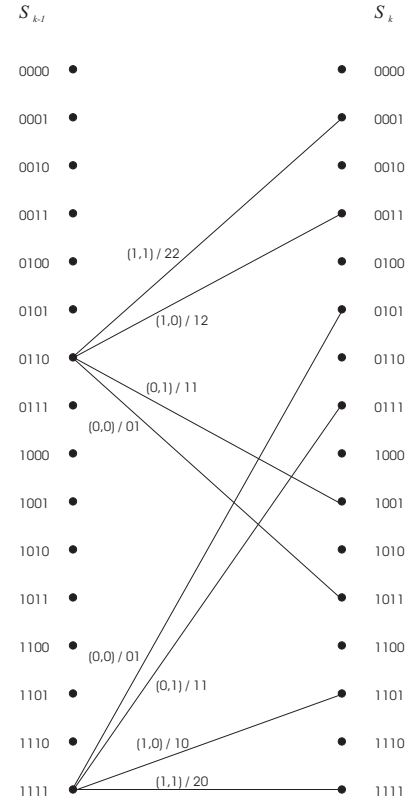


Fig. 4. Ramos da treliça para dois usuários ligando os estados, no instante de tempo anterior ( $S_{k-1}$ ) = (0110) e ( $S_{k-1}$ ) = (1111), aos respectivos estados no instante de tempo atual, ( $S_k$ ). Como exemplo, se ( $S_{k-1}$ ) = (0110) e ( $S_k$ ) = (0011), então  $(u_k, d_k)/\mathbf{x}_k = (1, 0)/12$ .

( $u_k, d_k$ ), relativos ao usuário 1 e ao usuário 2, respectivamente, em que

$$\Lambda_1(u_k, d_k) = \log \frac{\mathbf{P}\{u_k = 1, d_k = 0 | \mathbf{r}\}}{\mathbf{P}\{u_k = 0, d_k = 0 | \mathbf{r}\}}, \quad (5)$$

$$\Lambda_2(u_k, d_k) = \log \frac{\mathbf{P}\{u_k = 1, d_k = 1 | \mathbf{r}\}}{\mathbf{P}\{u_k = 0, d_k = 0 | \mathbf{r}\}}, \quad (6)$$

$$\Lambda_3(u_k, d_k) = \log \frac{\mathbf{P}\{u_k = 0, d_k = 1 | \mathbf{r}\}}{\mathbf{P}\{u_k = 0, d_k = 0 | \mathbf{r}\}}, \quad (7)$$

e  $\mathbf{P}\{u_k = i, d_k = s | \mathbf{r}\}$ ,  $i \in \{0, 1\}$ ,  $s \in \{0, 1\}$  denota a probabilidade *a posteriori* do par dos símbolos de informação ( $u_k, d_k$ ).

O decodificador utilizado opera da seguinte forma. Na entrada do primeiro decodificador BCJR, denotado por DEC1 na Figura 5, chegam as seqüências recebidas  $\mathbf{r}^{(0)} = \{r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, \dots, r_N^{(0)}\}$  e  $\mathbf{r}^{(1)} = \{r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, \dots, r_N^{(1)}\}$ , em que  $r_k^{(j)}$  foi definido em (4). DEC1 então produz as saídas suaves ( $\Lambda_{1,1}(u_k, d_k)$ ,  $\Lambda_{2,1}(u_k, d_k)$ ,  $\Lambda_{3,1}(u_k, d_k)$ ), que são entrelaçadas e usadas para produzir estimativas das probabilidades *a priori* dos pares de seqüências de informação para o segundo decodificador BCJR, denotado por DEC2 na Figura 5. A notação  $\Lambda_{1,1}(u_k, d_k)$ ,  $\Lambda_{2,1}(u_k, d_k)$ ,  $\Lambda_{3,1}(u_k, d_k)$  é usada para indicar as saídas suaves  $\Lambda_1(u_k, d_k)$ ,  $\Lambda_2(u_k, d_k)$  e  $\Lambda_3(u_k, d_k)$  respectivamente, associadas com DEC1.

Na entrada do decodificador DEC2 chegam as seqüências recebidas  $\tilde{\mathbf{r}}^{(0)}$  e  $\mathbf{r}^{(2)} = \{r_1^{(2)}, r_2^{(2)}, \dots, r_N^{(2)}\}$ . A seqüência  $\tilde{\mathbf{r}}^{(0)}$  corresponde à seqüência  $\mathbf{r}^{(0)}$  entrelaçada. O decodificador

TABELA I  
SUB-BLOCOS DE SAÍDA DA TRELIÇA PARA 2 USUÁRIOS.

		$(u_k, d_k)$			
		(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)
$S_{k-1}$	0000	00	11	21	10
	0001	01	12	22	11
	0010	01	12	22	11
	0011	00	11	21	10
	0100	00	11	21	10
	0101	01	12	22	11
	0110	01	12	22	11
	0111	00	11	21	10
	1000	01	10	20	11
	1001	02	11	21	12
	1010	02	11	21	12
	1011	01	10	20	11
	1100	01	10	20	11
	1101	02	11	21	12
	1110	02	11	21	12
	1111	01	10	20	11

TABELA II  
ESTADOS DA TRELIÇA PARA 2 USUÁRIOS.

		$(u_k, d_k)$			
		(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)
$S_{k-1}$	0000	0000	1000	1010	0010
	0001	0010	1010	1000	0000
	0010	0011	1011	1001	0001
	0011	0001	1001	1011	0011
	0100	1000	0000	0010	1010
	0101	1010	0010	0000	1000
	0110	1011	0011	0001	1001
	0111	1001	0001	0011	1011
	1000	1100	0100	0110	1110
	1001	1110	0110	0100	1100
	1010	1111	0111	0101	1101
	1011	1101	0101	0111	1111
	1100	0100	1100	1110	0110
	1101	0110	1110	1100	0100
	1110	0111	1111	1101	0101
	1111	0101	1101	1111	0111

DEC2 também produz saídas suaves  $\Lambda_1(u_k, d_k)$ ,  $\Lambda_2(u_k, d_k)$  e  $\Lambda_3(u_k, d_k)$ , denotadas por  $(\Lambda_{1,2}(u_k, d_k), \Lambda_{2,2}(u_k, d_k)$  e  $\Lambda_{3,2}(u_k, d_k))$ , respectivamente, para indicar que estão associadas com DEC2. Estas saídas suaves são usadas para melhorar a estimativa das probabilidades *a priori* dos pares de seqüências  $(u_k, d_k)$  de informação na entrada do decodificador DEC1.

O decodificador DEC2 estima as razões de log-verossimilhança  $\Lambda_{1,2}(u_k, d_k)$ ,  $\Lambda_{2,2}(u_k, d_k)$  e  $\Lambda_{3,2}(u_k, d_k)$ . Os valores  $\Lambda_{1,2e}(u_k, d_k)$ ,  $\Lambda_{2,2e}(u_k, d_k)$  e  $\Lambda_{3,2e}(u_k, d_k)$  representam a informação extrínseca para o decodificador DEC2. Tais valores dependem da informação redundante suprida pelos codificadores  $C_1^1$  e  $C_2^1$ . A informação extrínseca do decodificador DEC2 é usada como estimativa das probabilidades *a priori* para o decodificador DEC1. Os valores  $\hat{\Lambda}_{1,2e}(u_k, d_k)$ ,  $\hat{\Lambda}_{2,2e}(u_k, d_k)$  e  $\hat{\Lambda}_{3,2e}(u_k, d_k)$  correspondem, respectivamente, aos valores de  $\Lambda_{1,2e}(u_k, d_k)$ ,  $\Lambda_{2,2e}(u_k, d_k)$  e  $\Lambda_{3,2e}(u_k, d_k)$  desentrelaçados, descrito em [17].

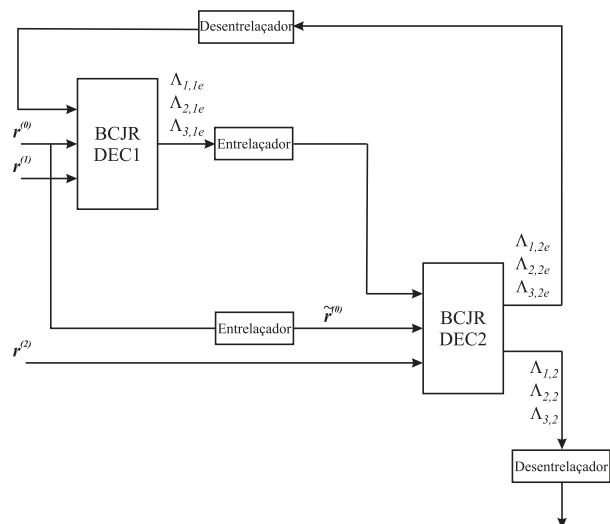


Fig. 5. Decodificador que utiliza o princípio da decodificação iterativa, formado por dois decodificadores componentes concatenados em série.

## V. RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

É considerada para simulação a situação em que os códigos para o usuário 1 e para o usuário 2 são distintos, como indicado no *Exemplo 1*. O entrelaçador utilizado é o de Berrou e Glavieux [9], [10] com comprimento de bloco de 512. As curvas obtidas, relacionando a probabilidade de erro por bit e a relação sinal ruído para o usuário 1 e para o usuário 2 são ilustradas nas Figuras 6 e 7, respectivamente. Verifica-se que esta construção mostra uma melhoria de desempenho com uso de decodificação iterativa, onde pode ser observado um ganho de cerca de 3dB para uma probabilidade de erro por bit de aproximadamente  $10^{-2}$  com o uso de 4 iterações, em relação ao caso sem turbo, para ambos os usuários.

A situação investigada para o 2-BAC neste artigo não faz uso da concatenação em série mencionada em [8]. Para cada usuário são usados codificadores convolucionais distintos, com ou sem a utilização da estrutura turbo (iteraões). A vantagem dessa construção advém da possibilidade de separar os dois usuários na recepção, fazendo uso no decodificador do algoritmo iterativo denominado BCJR [16], aplicado sobre a treliça para o 2-BAC do código resultante.

A utilização de dois códigos convolucionais iguais para os dois usuários só é possível quando é utilizada a construção serial descrita em [8], pois nestes casos as razões de log-verossimilhança  $\Lambda_1(u_k, d_k)$  e  $\Lambda_3(u_k, d_k)$  são iguais, ou de outra forma  $P\{u_k = 1, d_k = 0|r\} = P\{u_k = 0, d_k = 1|r\}$ , não permitindo a separação dos símbolos enviados por cada usuário através do algoritmo BCJR. Sendo necessário o uso da propriedade de decodibilidade única dos códigos de bloco.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho recebeu apoio parcial da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), projetos 306612/2007-0, 555046/2008-7 e 141346/2008-6.

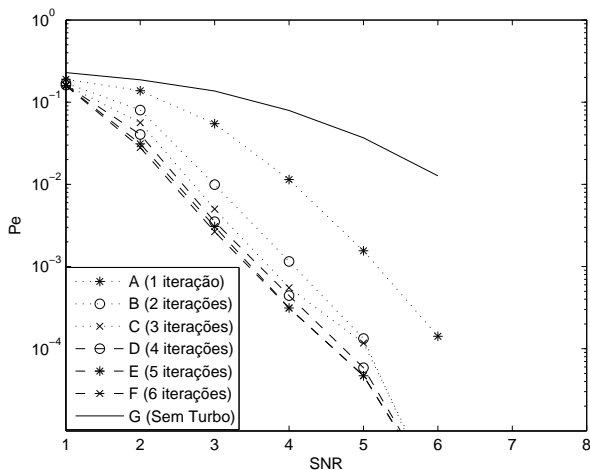


Fig. 6. Curvas relacionadas ao usuário 1. Os codificadores para  $C_1^- = C_1^+$  têm matrizes geradoras polinomiais  $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & 1+D^2 \\ 1+D+D^2 & \end{bmatrix}$  e os codificadores para  $C_2^- = C_2^+$  têm matrizes geradoras polinomiais  $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & D+D^2 \\ 1+D+D^2 & \end{bmatrix}$ .

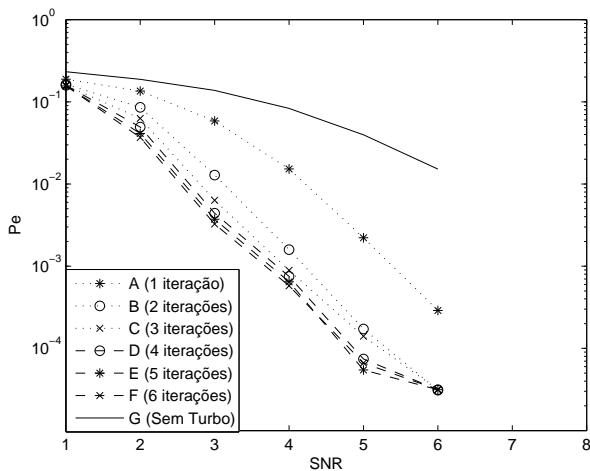


Fig. 7. Curvas relacionadas ao usuário 2. Os codificadores para  $C_1^- = C_1^+$  têm matrizes geradoras polinomiais  $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & 1+D^2 \\ 1+D+D^2 & \end{bmatrix}$  e os codificadores para  $C_2^- = C_2^+$  têm matrizes geradoras polinomiais  $G(D) = \begin{bmatrix} 1 & D+D^2 \\ 1+D+D^2 & \end{bmatrix}$ .

REFERÊNCIAS

[1] T. Kasami and Shu Lin, "Coding for a multiple-access channel", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 22, Number 2, pp.129-137, March 1976.  
 [2] C. E. Shannon, "Two-way communication channels", in *Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.*, vol. 1, pp.611-644, 1961. Reprinted in *Key Papers in the Development of Information Theory.*, D. Slepian, Ed. New York, IEEE Press, pp.339-372, 1974.  
 [3] V. C. da Rocha Jr. and M. L. M. G. Alcoforado, "Trellis code construction for the 2-user binary adder channel", in the Proceedings of 11<sup>th</sup> *International Conference on Telecommunications*, 1-5 August 2004, Fortaleza, Ceará, Brazil. Editors J. Neuman and P. Dini, Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, Germany, v. 3124, pp. 122-127, 2004.  
 [4] R. Peterson and D. J. Costello, Jr., "Binary convolutional codes for a multiple-access channel", *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 25, no. 1, pp. 101-105, 1979.  
 [5] M. L. M. G. Alcoforado e V. C. da Rocha Jr, "Construção de códigos de treliça para o canal aditivo com dois usuários binários". *XXI Simpósio*

*Brasileiro de Telecomunicações*, Belém, Pará, Brazil, 6-9 de Setembro de 2004.  
 [6] V. C. da Rocha Jr. and M. L. M. G. Alcoforado, "Uniquely decodable trellis codes for the two user binary adder channel", *International Symposium on Information Theory and its Applications*, 10-13 October 2004, Parma, Italy.  
 [7] S. Lin and D. Costello Jr., *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*, 2nd Edition, Prentice-Hall, USA, 2004.  
 [8] M. L. M. G. Alcoforado, V. C. da Rocha Jr. and G. Markarian "Turbo convolutional codes for the binary adder channel" *VIII International Symposium on Communication Theory and Applications*, Julho, Ambleside, UK, pp. 142-147, 2005.  
 [9] C. Berrou, A. Glavieux and P. Thitimajshima, "Near Shannon limit, error-correcting coding and decoding: turbo codes", *IEEE International Conference on Communications (ICC'93)*, vol. 2/3, pp. 1064-1071, 1993.  
 [10] C. Berrou and Alain Glavieux, "Near optimum error correcting coding and decoding: turbo-codes", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no.10, pp. 1261-1271, 1996.  
 [11] M. L. M. G. Alcoforado, V. C. da Rocha Jr. and G. Markarian "Turbo block codes for the binary adder channel" *2005 IEEE International Symposium on Information Theory*, Adelaide, Australia, pp. 1883-1887, 2005.  
 [12] M. Mattas and P. R. J. Ostergard, "A new bound for the zero-error capacity region of the two-user binary adder channel", *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 51, pp. 3289-3291, 2005.  
 [13] L. Kiviluoto and P. R. J. Ostergard, "New uniquely decodable codes for the t-user binary adder channel with  $3 \leq t \leq 5$ ", *IEEE Trans. on Info. Theory*, vol. 53, pp. 1219-1220, 2007.  
 [14] H.V. Beltrão Neto and V. C. da Rocha Jr., "Iterative decoding results for the gaussian multiuser binary adder channel", *Tenth International Symposium on Communication Theory and Applications, Ambleside, 2009*, Ambleside, UK, pp. 1-6, 2009.  
 [15] J. Hagenauer, "Iterative decoding of binary block and convolutional codes", *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 42, no. 2, pp. 429-445, 1996.  
 [16] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek and J. Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 20, pp. 284-287, 1974.  
 [17] Alcoforado, M. de L. M. G., *Codificação Iterativa para o Canal Aditivo com Dois Usuários Binários*. Recife, 2005. Tese em Engenharia Elétrica - Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco.