

Emparelhamentos Generalizados casos III e VI Associados a Tesselação $\{12g - 6, 3\}$

Mercio B. Faria e Reginaldo Palazzo Jr

Resumo— Sabe-se que códigos ótimos no sentido de mínima probabilidade de erro estão relacionados a empacotamentos de esferas com densidade máxima. Como a tesselação $\{12g - 6, 3\}$ é a que fornece empacotamentos de esferas com a maior densidade possível, estamos interessados em investigar os emparelhamentos das arestas de polígonos hiperbólicos com $12g - 6$ arestas que estejam associados à tesselação $\{12g - 6, 3\}$ no intuito de identificar a estrutura algébrica associada tal que conjuntos de sinais hiperbólicos densos possam ser construídos.

Palavras-Chave— Códigos geometricamente uniforme, Constelações de Sinais, Empacotamento de esferas, Emparelhamento de arestas de polígonos hiperbólicos, Geometria hiperbólica.

Abstract— It is well known that optimal codes in the sense of minimum error probability are related to sphere packing with maximal density. Since the tessellation $\{12g - 6, 3\}$ provides a packing of spheres with maximal density, our interested is to investigate the edge-pairings of hyperbolic polygons with $12g - 6$ edges associated with tessellations of the type $\{12g - 6, 3\}$ which provides the algebraic structure such that denser hyperbolic signal sets may be constructed.

Keywords— Uniform geometrically codes, Signal constellations, Sphere packing, hyperbolic polygons, edge-pairing, hyperbolic geometry.

I. INTRODUÇÃO

Os principais objetivos a serem alcançados na proposta de novos sistemas de comunicações são menor complexidade e melhor desempenho sob o critério da probabilidade de erro (símbolo/bit).

Nesta direção, o projetista de um sistema de comunicações considera cada um dos blocos no modelo tradicional de um sistema de comunicações, Fig. 1, como sendo constituído basicamente por um conjunto de “pontos” E_i , juntamente com uma métrica, d_i . Isto torna possível a interpretação de cada bloco como um espaço métrico (E_i, d_i) .

Como um espaço métrico decorre de uma topologia associada a cada bloco mostrado na Fig. 1, foi proposto em [2] a utilização, primeiramente, do conceito de espaço topológico (superfície) como a abordagem apropriada

Mercio B. Faria, Departamento de Matemática, CCE, Universidade Federal de Viçosa (UFV), Viçosa, MG e Reginaldo Palazzo Jr, Departamento de Telecomunicações, FEEC, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, E-mails: mercio@ufv.br, palazzo@dt.fee.unicamp.br. Agradecemos ao CNPq (processo 505258/2008-0) e Fapemig pelo apoio financeiro e também à UFV pela licença do professor Mercio B. Faria para estágio pós-doutoral.

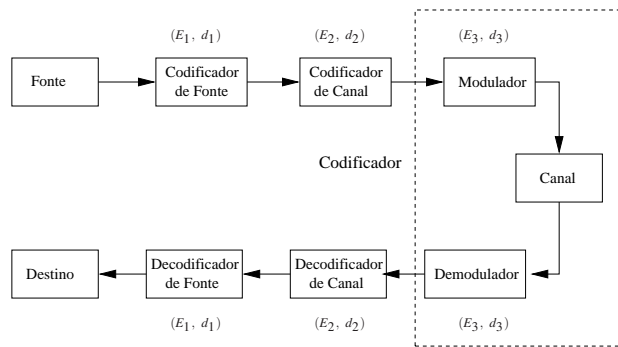


Fig. 1. Modelo de um sistema de comunicações digitais

quando do projeto de um sistema de comunicações ao invés da abordagem de espaço métrico. O que se busca então, é determinar as características geométricas (característica de Eüler) e algébricas (grupo fundamental) associadas a cada conjunto de pontos E_i e, conseqüentemente, aos correspondentes espaços métricos bem como as propriedades e condições que deverão ser satisfeitas pelas transformações que irão conectar os diferentes espaços topológicos de tal forma que se consiga determinar o desempenho do sistema de comunicações sob a menor probabilidade de erro, maior taxa de transmissão, menor potência de transmissão, etc.

É diante deste enfoque que reside o interesse topológico na tesselação $\{12g - 6, 3\}$, pois esta tesselação é a que fornece empacotamentos de esferas com o maior densidade possível, e conseqüentemente associada a constelações de sinais geometricamente uniformes com a menor probabilidade de erro. A importância de investigar os emparelhamentos das arestas de polígonos hiperbólicos com $12g - 6$ arestas que estejam associados à tesselação $\{12g - 6, 3\}$ deve-se ao fato de que estes emparelhamentos fornecem os geradores do grupo Fuchsiano associado e, portanto, a caracterização algébrica associada. Apresentamos a generalização de mais dois emparelhamentos conhecidos, dentre os oito, para um polígono com 18 arestas.

O problema de empacotamento de esferas tem como principal objetivo a busca pela maior densidade possível de empacotamento. Dentre os possíveis empacotamentos de esferas, destacamos os associados a reticulados, ou seja, aos conjuntos de esferas cujos centros fornecem um reticulado. Nestes casos, temos que a densidade de empacotamento é o volume da esfera dividido pelo volume do polígono que a contém.

Assim, quando consideramos um reticulado da forma $\{p, q\}$, temos um empacotamento de esferas associado. A

busca por empacotamentos reticulados ótimos, no sentido da maior densidade possível, está ligada à busca de códigos ótimos bem como de constelações de sinais, pois maior densidade de empacotamento implica em menor probabilidade de erro.

Em [10, página 241], Toth apresentou o limitante máximo para a densidade de empacotamento no plano hiperbólico. Disso decorre que a densidade de empacotamento é limitada superiormente por $\frac{3}{\pi}$. Em [3, Cap. 4 Teorema 4.1.1] fizemos estudos assintóticos para reticulados do tipo $\{p, q\}$. Demonstramos que assintoticamente¹, a densidade de empacotamento não atinge o valor $\frac{3}{\pi}$. Porém, temos que $\frac{3}{\pi}$ é atingido por empacotamentos de horobolas $\{\infty, 3\}$.

A relevância de tais resultados para empacotamento de esferas, está no fato que um reticulado hiperbólico do tipo $\{12g - 6, 3\}$ fornece um empacotamento ótimo com relação a densidade de empacotamento no plano hiperbólico. Além disto, para $g \rightarrow \infty$ temos que as densidades, de empacotamento e de cobertura, do referido reticulado atinge o valor máximo apresentado por Toth. Daí, nosso interesse em explorar os emparelhamentos de arestas de polígonos, em particular os polígonos com $12g - 6$ arestas.

II. EMPARELHAMENTO DE ARESTAS DE UM POLÍGONO

Seja P um polígono e considere \mathcal{A} o conjunto de arestas de P . Um emparelhamento de arestas de P é definido da seguinte forma.

Definição II.1. Um emparelhamento de arestas de P é um conjunto de isometrias $\Phi = \{T_\tau | \tau \in \mathcal{A}\}$ que, para toda aresta $\tau \in \mathcal{A}$: 1) existe aresta $\tau' \in \mathcal{A}$ com $T_\tau(\tau') = \tau$; 2) as isometrias T_τ e $T_{\tau'}$ satisfazem a relação $T_{\tau'} = T_\tau^{-1}$; 3) se τ for aresta de P então $\tau' = P \cap T_\tau^{-1}(P)$.

O emparelhamento Φ de um polígono P gera um grupo Γ . Com este grupo podemos obter superfícies de Riemann de um dado gênero g através do quociente de \mathbb{E} por Γ , denotado por $\frac{\mathbb{E}}{\Gamma}$, onde \mathbb{E} pode ser o plano euclidiano, ou o plano elíptico, ou o plano hiperbólico. Se Γ é um grupo finitamente gerado do primeiro tipo², podemos denotar a assinatura de Γ por $(g : k; m_1, m_2, \dots, m_k)$, onde g denota o gênero, k o número de elementos elípticos e/ou parabólicos. Caso Γ não tenha elementos parabólicos nem elípticos, então denotamos por $(g : 0)$.

Seja Γ um grupo finitamente gerado do primeiro tipo Γ com assinatura $(g : 0)$. Então o número N de arestas do polígono emparelhadas pelas funções geradoras de Γ está entre $4g$ e $12g - 6$, [1].

Os emparelhamentos para polígonos com $4g$ arestas foram bem explorados na literatura [3], [6], [7], [9] e [12]. A Fig. 2, ilustra dois destes emparelhamentos.

Com relação aos emparelhamentos de arestas de polígonos com $12g - 6$ arestas que representam uma superfície de Riemann compacta, orientável de gênero g , para o caso

¹Assintoticidade no sentido de p e q tenderem a infinito, onde p e q determinam um ladrilhamento $\{p, q\}$.

²Dizemos que um grupo Γ é do primeiro tipo se o conjunto dos pontos de acumulação das órbitas $\Gamma(z)_{z \in \mathbb{D}^2}$ é igual à fronteira do disco de Poincaré $\partial \mathbb{D}^2$.

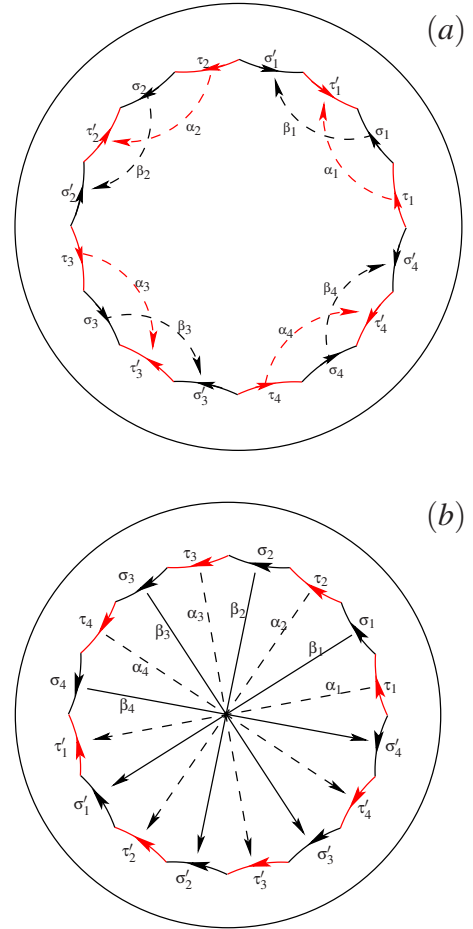


Fig. 2. (a) Ilustração do emparelhamento para gênero $g = 4$

Fig. 3. (b) Emparelhamento para $g = 4$ com arestas diametralmente opostas

do gênero ser dois ($g = 2$) sabemos que existem somente oito emparelhamentos ([7], página 267) salvo conjugações por isometrias preservando orientação. Para os gêneros 3, 4 e 5 o número possível de emparelhamentos tem 5, 7 e 10 dígitos respectivamente, conforme observado por Girondo e González-Diez em [8]. Em [4], um desses (caso II) emparelhamentos foi generalizado para qualquer gênero g . Em [5], generalizamos os casos I e IV para qualquer gênero g e neste trabalho apresentamos a generalização de mais dois casos (Caso III e Caso VI), figura 4.

Nas próximas duas seções apresentamos as generalizações dos Casos III e VI de [7].

III. EMPARELHAMENTO GENERALIZADO Φ_{12g-6}^{III}

Considere um polígono $P_{12g-6} \subset \mathbb{D}^2$ com $12g - 6$ arestas, $g \geq 2$, onde \mathbb{D}^2 representa o plano hiperbólico. Denotamos seus vértices no sentido anti-horário por $\{v_1, v_2, \dots, v_{12g-6}\}$ e suas arestas por $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{12g-6}\}$ onde τ_i é o segmento geodésico iniciando em v_i e terminando em v_{i+1} , $i \bmod(12g - 6)$ e $(i + 1) \bmod(12g - 6)$, respectivamente³.

³Neste artigo inteiro nós consideraremos os índices k para todo $k \in \mathbb{N}$, das arestas τ_k e dos vértices (v_k) , módulo $12g - 6$

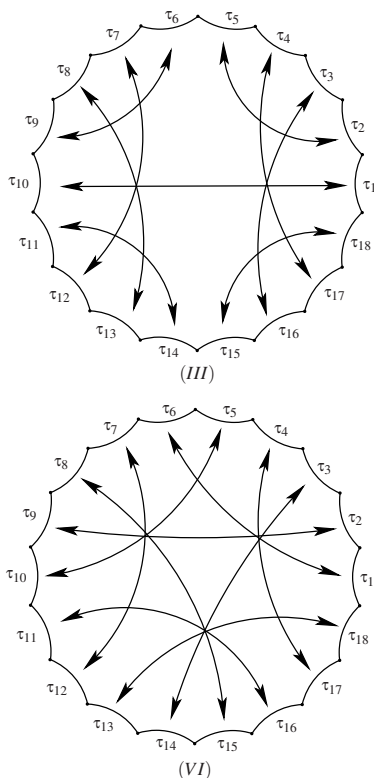


Fig. 4. Os casos III e VI dentro os oitos tipos de emparelhamento, de polígonos com 18 arestas, existentes para gênero $g = 2$. Figura reproduzida da página 267 em [7].

Denotando os vértices inicial e final de uma aresta τ por $I(\tau)$ e $F(\tau)$, temos pela construção do polígono que $I(\tau_i) = v_i$ e $F(\tau_i) = v_{i+1}$.

Se o gênero g for igual a 2 temos um polígono com 18 arestas, P_{18} . O Caso III apresentado em [7] fornece um emparelhamento que representa uma superfície de Riemann compacta, orientável de gênero 2 e é dado pelos pares de arestas, emparelhadas da seguinte forma

$$\left[\begin{array}{l} \{\tau_1, \tau_{10}\}, \{\tau_2, \tau_5\}, \{\tau_3, \tau_{16}\}, \{\tau_4, \tau_{17}\}, \{\tau_6, \tau_9\} \\ \{\tau_7, \tau_{12}\}, \{\tau_8, \tau_{13}\}, \{\tau_{11}, \tau_{14}\}, \{\tau_{15}, \tau_{18}\} \end{array} \right]. \quad (1)$$

Nesta seção, exibimos a generalização do emparelhamento correspondente ao caso III, descrita por.

- Dado o polígono P_{12g-6} como descrito acima, e para permitir emparelhamento de arestas por isometrias, assumimos que os seguintes pares de arestas possuem o mesmo comprimento:

$$\begin{aligned} & \{\tau_1, \tau_{10}\}; \{\tau_2, \tau_5\}; \{\tau_6, \tau_9\}; \{\tau_3, \tau_{10g-4}\}; \\ & \{\tau_4, \tau_{10g-3}\}; \{\tau_7, \tau_{10g-8}\}; \{\tau_8, \tau_{10g-7}\}; \\ & \{\tau_{11+10k}, \tau_{14+10k}\}; \{\tau_{15+10k}, \tau_{12g-6-2k}\}; \{\tau_{16+10k}, \tau_{19+10k}\}; \\ & \{\tau_{20+10k}, \tau_{12g-7-2k}\}; \{\tau_{12+5k}, \tau_{10g-13-5k}\}; \\ & \{\tau_{13+5k}, \tau_{10g-12-5k}\}; \text{ se } 0 \leq k \leq g-3; \\ & \{\tau_{10g-9}, \tau_{10g-6}\}; \{\tau_{10g-5}, \tau_{10g-2}\}; \end{aligned}$$

Considere as isometrias hiperbólicas (únicas) que identificam os pares conforme segue (veja figura 5):

$$\begin{aligned} \alpha_1(\tau_1) &= \tau_{10}; \alpha_2(\tau_2) = \tau_5; \alpha_3(\tau_6) = \tau_9; \\ \alpha_4(\tau_3) &= \tau_{10g-4}; \alpha_5(\tau_4) = \tau_{10g-3}; \alpha_6(\tau_7) = \tau_{10g-8}; \\ \alpha_7(\tau_8) &= \tau_{10g-7}; \alpha_8(\tau_{10g-9}) = \tau_{10g-6}; \alpha_9(\tau_{10g-5}) = \tau_{10g-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{1+4k}^a(\tau_{11+10k}) &= \tau_{14+10k}; \\ \beta_{2+4k}^a(\tau_{15+10k}) &= \tau_{12g-6-2k}; \\ \beta_{3+4k}^a(\tau_{16+10k}) &= \tau_{19+10k}; \\ \beta_{4+4k}^a(\tau_{20+10k}) &= \tau_{12g-7-2k}; \\ \beta_{1+2k}^b(\tau_{12+5k}) &= \tau_{10g-13-5k}; \\ \beta_{2+2k}^b(\tau_{13+5k}) &= \tau_{10g-12-5k}; \\ & \text{se } 0 \leq k \leq g-3. \end{aligned}$$

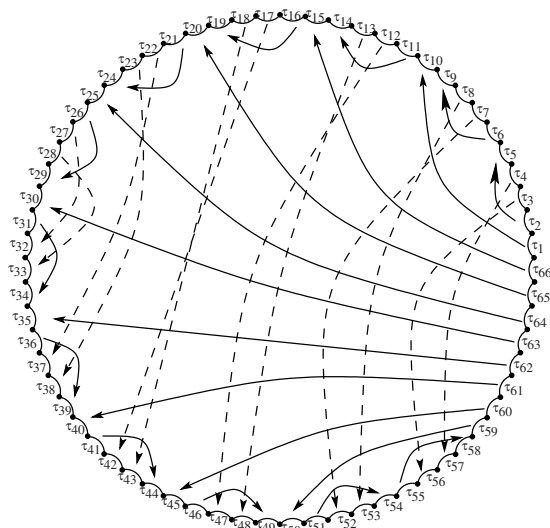


Fig. 5. Emparelhamento generalizado caso III, $g = 6$

Dizemos que o conjunto

$$\Phi_{12g-6}^{III} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_j, \beta_{1+4k}^a, \beta_{2+4k}^a, \beta_{3+4k}^a, \beta_{4+4k}^a, \beta_{1+2k}^b, \beta_{2+2k}^b; \\ k = 0, 1, 2, \dots, g-3 \text{ e } j = 1, 2, \dots, 9 \end{array} \right\}$$

é um emparelhamento para o polígono P_{12g-6} . Particularmente, se tomarmos $g = 2$ teremos o emparelhamento apresentado em (1).

A. O emparelhamento Φ_{12g-6}^{III}

Esta subseção contém alguns resultados que nos permitem conhecer um pouco mais sobre o emparelhamento Φ_{12g-6}^{III} . Neste sentido, apresentamos um resultado que diz que todo ciclo⁴ de vértices tem comprimento três. Antes, seja $\varphi \in \Phi_{12g-6}^{III}$ e suponha que $\varphi(\tau_i) = \tau_j$. Então temos que φ satisfaz

$$\varphi(I(\tau_i)) = F(\varphi(\tau_i)) = F(\tau_j) \text{ e } \varphi(F(\tau_i)) = I(\varphi(\tau_i)) = I(\tau_j).$$

Em outras palavras, como $I(\tau_i) = v_i$ e $F(\tau_i) = v_{i+1}$, obtemos que, nesta situação $\varphi(v_i) = v_{j+1}$ e $\varphi(v_{i+1}) = v_j$.

Proposição III.1. *Seja Φ_{12g-6}^{III} um emparelhamento de arestas do polígono P_{12g-6} . Então todos os ciclos de vértices tem comprimento 3 conforme verificamos a seguir:*

⁴Seja $\Gamma_{12g-6} = \langle \Phi_{12g-6} \rangle$. Um ciclo é uma classe de equivalência de vértices congruentes, ou seja, é um conjunto da forma

$$\{T(z) | T \in \Gamma_{12g-6} \text{ e } z \text{ e } T(z) \text{ são vértices de } P_{12g-6}\}.$$

$$\begin{aligned} & \{v_2, v_6, v_{10}\}; \{v_3, v_5, v_{10g-3}\}; \{v_4, v_{10g-4}, v_{10g-2}\}; \\ & \{v_{10g-9}, v_{10g-5}, v_{-2g+5}\}; \{v_{11+5k}, v_{15+5k}, v_{1-k}\}; \\ & \quad k = 0, 1, \dots, 2g-5 \\ & \{v_{7+5k}, v_{9+5k}, v_{10g-7-5k}\}; \{v_{8+5k}, v_{10g-8-5k}, v_{10g-6-5k}\}; \\ & \quad k = 0, 1, \dots, g-2. \end{aligned}$$

Demonstração: Iniciamos obtendo o ciclo que contém o vértice v_3 . Note que

$$v_3 = F(\tau_2) = I(\tau_3).$$

Pela definição das funções de emparelhamento, temos que τ_2 é emparelhada à aresta τ_5 através da transformação α_2 . Segue então que

$$\alpha_2(v_3) = \alpha_2(F(\tau_2)) = I(\alpha_2(\tau_2)) = I(\tau_5) = v_5,$$

implicando que v_5 pertence ao ciclo determinado por v_3 . Mas, além de ser o vértice inicial de τ_5 , temos que v_5 é o vértice final de τ_4 e como τ_4 é emparelhado a τ_{10g-3} por α_5 , obtemos

$$\alpha_5(v_5) = \alpha_5(F(\tau_4)) = I(\alpha_5(\tau_4)) = I(\tau_{10g-3}) = v_{10g-3},$$

de modo que v_{10g-3} pertence ao ciclo determinado por v_3 e v_5 . Novamente, temos que $v_{10g-3} = F(\tau_{10g-4})$ e τ_{10g-4} é emparelhada a τ_3 através da isometria α_4^{-1} . Segue que

$$\alpha_4^{-1}(v_{10g-3}) = \alpha_4^{-1}(F(\tau_{10g-4})) = I(\alpha_4^{-1}(\tau_{10g-4})) = I(\tau_3) = v_3,$$

completando um ciclo. Assim, o ciclo determinado por v_3 é

$$\{v_3, v_5, v_{10g-3}\}. \quad (2)$$

Seguindo este raciocínio para os demais vértice, temos todos os $4g-3$ ciclos restantes. ■

Seja Γ_{12g-6}^{III} o grupo gerado pelo emparelhamento Φ_{12g-6}^{III} do polígono P_{12g-6} . A partir da Proposição III.1 concluímos que o número de ciclos de vértices é dado por $4g-2$ ($(12g-6)/3$).

Assim, temos condições de concluir que o grupo gerado pelo emparelhamento Φ_{12g-6}^{III} nos fornece os geradores do grupo Fuchsiano associado ao polígono com $12g-6$ arestas, denotado por $\mathbb{H}^2/\Gamma_{12g-6}^{III}$ e que através do quociente de \mathbb{H}^2 por Γ_{12g-6}^{III} , conduz a uma superfície de Riemann compacta orientável de gênero g .

Corolário III.2. *Se a soma dos ângulos em cada ciclo é 2π , então Γ_{12g-6}^{III} é um grupo propriamente descontínuo, isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(R_g)$, e $\mathbb{D}^2/\Gamma_{12g-6}^{III}$ é difeomorfo à superfície de Riemann R_g .*

Demonstração: Assumindo que a soma dos ângulos em cada ciclo é 2π e sendo as arestas emparelhadas de mesmo comprimento concluímos, pelo Teorema de Poincaré, [1] e [6], que Γ_{12g-6}^{III} é discreto. Como $\Gamma_{12g-6}^{III} \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ temos um grupo propriamente descontínuo⁵. Além disso, pelo teorema de Poincaré, segue que o polígono é domínio

⁵Um subgrupo $\Gamma \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ é discreto se e somente se sua ação em \mathbb{H}^2 for propriamente descontínua (Capítulo 5 das notas de aula de "Grupos Fuchsianos" do professor Marcelo Firer, [1]).

fundamental do grupo gerado pelas funções de emparelhamento, de modo que o quociente $\mathbb{D}^2/\Gamma_{12g-6}^{III}$ é difeomorfo a uma superfície de Riemann, R_g , compacta orientável de gênero g e $\pi_1(R_g)$ é isomorfo a Γ_{12g-6}^{III} . ■

Resta apenas determinar seu gênero, que pode ser obtido através da característica de Euler-Poincaré. Da Proposição III.1 temos que o número de ciclos de vértices é $4g-2$. Sendo $6g-3$ o número de arestas identificadas, concluímos que o emparelhamento Φ_{12g-6}^{III} representa uma superfície de Riemann compacta orientável de gênero g pois a característica de Euler-Poincaré é dada por

$$\chi(P_{12g-6}) = 1 - (6g-3) + (4g-2) = 2 - 2g.$$

IV. EMPARELHAMENTO GENERALIZADO Φ_{12g-6}^{VI}

Considere um polígono $P_{12g-6} \subset \mathbb{D}^2$ com $12g-6$ arestas, $g \geq 2$.

Se o gênero g for igual a 2 temos um polígono com 18 arestas, P_{18} . O Caso VI apresentado em [7] também fornece um emparelhamento que representa uma superfície de Riemann compacta, orientável de gênero 2 e é dado pelos pares de arestas, emparelhadas da seguinte forma

$$\left[\begin{array}{l} \{\tau_1, \tau_6\}, \{\tau_2, \tau_9\}, \{\tau_3, \tau_{14}\}, \{\tau_4, \tau_{17}\}, \{\tau_5, \tau_{10}\} \\ \{\tau_7, \tau_{12}\}, \{\tau_8, \tau_{15}\}, \{\tau_{11}, \tau_{16}\}, \{\tau_{13}, \tau_{18}\} \end{array} \right]. \quad (3)$$

Prosseguimos descrevendo a generalização do emparelhamento correspondente ao Caso VI.

- Dado o polígono P_{12g-6} descrito acima, e para permitir emparelhamento de arestas por isometrias, assumimos que os seguintes pares de arestas possuem o mesmo comprimento:

$$\begin{aligned} & \{\tau_1, \tau_{4g-2}\}; \{\tau_{4g-1}, \tau_{8g-4}\}; \{\tau_{8g-3}, \tau_{12g-6}\}; \\ & \{\tau_{12g-7-3k}, \tau_{4g-4-3k}\}; \{\tau_{4g-3-3k}, \tau_{8g-6-3k}\}; \\ & \{\tau_{8g-5-3k}, \tau_{12g-8-3k}\}; \{\tau_{12g-9-3k}, E_1^k\}; \\ & \{\tau_{4g-5-3k}, E_2^k\}; \{\tau_{8g-7-3k}, E_3^k\}; \\ & \text{se } 0 \leq k \leq g-2; \end{aligned}$$

Seja $A_1(k) = \tau_{4g+k}$, $A_2(k) = \tau_{8g-2+k}$, $A_3(k) = \tau_{2+k}$ e $0 \leq k \leq g-2$ então

$$E_1^k = \{\text{ou } A_1(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 0; \text{ ou } A_3(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 1; \text{ ou } A_2(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 2;\}$$

$$E_2^k = \{\text{ou } A_2(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 0; \text{ ou } A_1(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 1; \text{ ou } A_3(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 2;\}$$

$$E_3^k = \{\text{ou } A_3(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 0; \text{ ou } A_2(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 1; \text{ ou } A_1(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 2;\}$$

Considere as isometrias hiperbólicas (únicas) que identificam os pares conforme segue (veja figura 6):

$$\begin{aligned} \delta_1(\tau_1) &= \tau_{4g-2}; \quad \delta_2(\tau_{4g-1}) = \tau_{8g-4}; \quad \delta_3(\tau_{8g-3}) = \tau_{12g-6}; \\ \xi_{1+6k}(\tau_{12g-7-3k}) &= \tau_{4g-4-3k}; \\ \xi_{2+6k}(\tau_{4g-3-3k}) &= \tau_{8g-6-3k}; \\ \xi_{3+6k}(\tau_{8g-5-3k}) &= \tau_{12g-8-3k}; \\ \xi_{4+6k}(\tau_{12g-9-3k}) &= E_1^k; \\ \xi_{5+6k}(\tau_{4g-5-3k}) &= E_2^k; \\ \xi_{6+6k}(\tau_{8g-7-3k}) &= E_3^k; \\ & \text{se } 0 \leq k \leq g-2. \end{aligned}$$

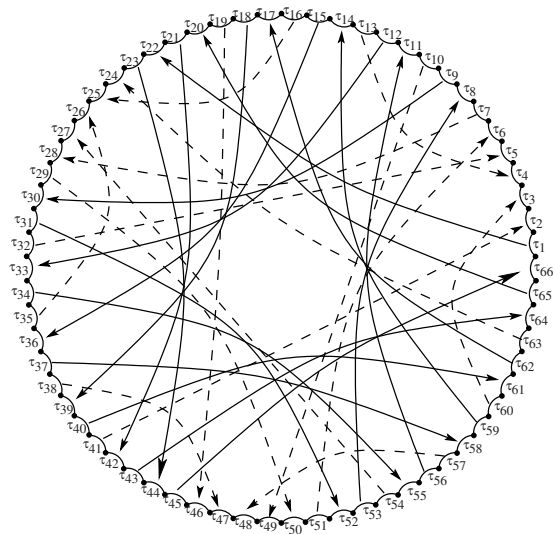


Fig. 6. Emparelhamento generalizado caso VI, $g = 6$

Dizemos que o conjunto

$$\Phi_{12g-6}^{VI} = \left\{ \begin{array}{l} \delta_j, \xi_{1+6k}, \xi_{2+6k}, \xi_{3+6k}, \xi_{4+6k}, \xi_{5+6k}, \xi_{6+6k}; \\ k = 0, 1, 2, \dots, g-2 \quad e \quad j = 1, 2, 3 \end{array} \right\}$$

é um emparelhamento para o polígono P_{12g-6} . Particularmente, se tomarmos $g = 2$ teremos o emparelhamento apresentado em (3).

Observação IV.1. Para este caso VI, a única exceção é quando fazemos $g = 4$ e tomamos $k = g - 2$. Nesta situação, consideraremos os seguintes pares emparelhados:

$$\{\tau_{34}, \tau_7\}; \{\tau_{35}, \tau_{20}\}; \{\tau_{21}, \tau_6\}; \{\tau_{32}, \tau_5\}; \{\tau_4, \tau_{19}\}; \{\tau_{33}, \tau_{18}\};$$

no lugar dos pares

$$\{\tau_{35}, \tau_6\}; \{\tau_7, \tau_{20}\}; \{\tau_{21}, \tau_{34}\}; \{\tau_{33}, \tau_{32}\}; \{\tau_5, \tau_4\}; \{\tau_{19}, \tau_{34}\};$$

que são apresentados pela descrição acima.

Um resultado relevante sobre o emparelhamento Φ_{12g-6}^{VI} é como segue:

Proposição IV.2. Seja Φ_{12g-6}^{VI} um emparelhamento de arestas do polígono P_{12g-6} . Então todos os ciclos de vértices tem comprimento 3 e são da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \{v_1, v_{4g-1}, v_{8g-3}\}; \{v_{9g-3}, v_{g+1}, v_{5g-1}\}; \\ & \{v_{12g-7-3k}, v_{4g-3-3k}, v_{8g-5-3k}\}; \{v_{12g-3-3k}, v_{4g-4-3k}, C_1^k\}; \\ & \{v_{4g-2-3k}, v_{8g-6-3k}, C_2^k\}; \{v_{8g-4-3k}, v_{12g-8-3k}, C_3^k\}; \\ & k = 0, 1, \dots, g-2 \end{aligned}$$

Se $V_1(k) = v_{2+k}, V_2(k) = v_{4g+k}, V_3(k) = v_{8g-2+k}$ e $0 \leq k \leq g-2$ temos

$$C_1^k = \{ou V_3(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 0; \text{ ou } V_2(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 1; \text{ ou } V_1(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 2\};$$

$$C_2^k = \{ou V_1(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 0; \text{ ou } V_3(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 1; \text{ ou } V_2(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 2\};$$

$$C_3^k = \{ou V_2(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 0; \text{ ou } V_1(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 1; \text{ ou } V_3(k) \text{ se } (k \bmod 3) \equiv 2\};$$

Demonstração: Análoga à construção feita na demonstração da Proposição III.1. ■

Seja Γ_{12g-6}^{VI} o grupo gerado pelo emparelhamento Φ_{12g-6}^{VI} do polígono P_{12g-6} . A partir da Proposição III.1 concluímos que o número de ciclos de vértices são $4g - 2$ $((12g - 6)/3)$.

Assim, concluímos que o grupo gerado pelo emparelhamento $\Phi_{12g-6}^{VI}, \Gamma_{12g-6}^{VI}$ nos fornece através do quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma_{12g-6}^{VI}$, uma superfície de Riemann de gênero g .

Corolário IV.3. Se a soma dos ângulos em cada ciclo é 2π , então Γ_{12g-6}^{VI} é grupo propriamente descontínuo, isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(R_g)$, e $\mathbb{D}^2/\Gamma_{12g-6}^{VI}$ é difeomorfo à superfície de Riemann R_g .

Demonstração: Análoga à demonstração do Corolário III.2. ■

Resta apenas determinar seu gênero, que pode ser obtido através da característica de Euler-Poincaré. Da Proposição IV.2 temos que o número de ciclos de vértices são $4g - 2$. Sendo $6g - 3$ o número de arestas identificadas, concluímos que o emparelhamento Φ_{12g-6}^{VI} representa uma superfície de Riemann compacta orientável de gênero g pois a característica de Euler-Poincaré é dada por

$$\chi(P_{12g-6}) = 1 - (6g - 3) + (4g - 2) = 2 - 2g.$$

V. CONCLUSÕES

Os emparelhamentos generalizados apresentados neste trabalho estão associados a polígonos que são domínios fundamentais de tesselações do tipo $\{12g - 6, 3\}$ e estas são as tesselações que forçenem empacotamentos de esferas com densidade máxima, ou seja, as constelações de sinais com mínima probabilidade de erro. Além disso, a importância pela busca por novos emparelhamentos, relacionados a esta tesselação, auxiliará na identificação de grupos Fuchsianos aritméticos associados à tesselação $\{12g - 6, 3\}$ (veja [11]).

VI. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq (processo 505258/2008-0) e Fapemig pelo apoio financeiro e à UFV pela licença do professor Mercio B. Faria para estágio pós-doutoral.

REFERÊNCIAS

- [1] Beardon, Alan - *The Geometry of Discrete Groups*, - Springer Verlag, 1983.
- [2] Cavalcante, R. G. & Lazari, H. & Lima, J. D. & Palazzo Jr., R. "A new approach to the design of digital communication systems," *AMS-DIMACS Series*, aceito para publicação.
- [3] Faria, Mercio Botelho. *Empacotamento de esferas em espaços hiperbólicos*, Dissertação de mestrado, Imecc-Unicamp, 2001.
- [4] Faria, Mercio Botelho. *Coordenadas Fricke e Empacotamentos Hiperbólicos de Discos*. Tese de doutorado - Imecc/Unicamp, 2005.
- [5] Faria, Mercio Botelho & Palazzo-Jr, Reginaldo. *Emparelhamentos Generalizados Associados da Tesselação $\{12g - 6, 3\}$* . Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, CNMAC 2009, (em submissão).
- [6] Firby, P. A & Gardiner, C.F. *Surface topology*, Ellis Horwood Limited, New York, 1991.
- [7] Fricke, Robert & Klein, Felix. *Vorlesungen über die theorie der automorphen funktionen*, Teubener, Leipzig, 1897.
- [8] Girono, Ernesto & González-Diez, Gabino. *Genus two extremal surfaces: extremal discs, isometries and weierstrass points*, Israel journal of mathematics 132, 221 - 238, 2002.

- [9] Kinsey, L. Christine. *Topology of surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [10] Tóth, L. Fejes. *Regular Figures*. International series of monographs on Pure and Applied Mathematics, Pergamon press LTDA, Oxford, vol. 48, 1964.
- [11] Vieira, Vandenberg L. *Grupos Fuchsianos Aritméticos Identificados em Ordens dos Quatérnios para Construção de Constelações de Sinais*. Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, 2007.
- [12] Weeks, Jeffrey R. *The shape of space*, Marcel Dekker, New York, 1985.