

Diagrama de Transição de Fase em Amostragem Compressiva Considerando Efeito do Ruído

Edmar Candeia Gurjão

Resumo—Amostragem Compressiva é uma técnica de aquisição de sinal que se propõe a capturar apenas a informação nele contida. A maturidade dessa técnica tem proporcionado aplicações disruptivas em Radar e Ressonância Magnética, reduzindo a taxa de aquisição abaixo de Nyquist. Uma das formas de avaliar o desempenho de um sistema de Amostragem Compressiva é via o seu Diagrama de Transição de Fase (DTF), que consiste em um gráfico com uma região onde a recuperação pode ser feita por otimização convexa e outra quando isso não é possível, sendo essa última a região onde a Amostragem Compressiva passa a ser desinteressante, ou mesmo inviável. Nos trabalhos anteriores os Diagramas são obtidos sem considerar a presença do ruído, que afeta fortemente o desempenho da Amostragem Compressiva. Neste trabalho é feita a inclusão da presença do ruído na análise do DTF, mostra-se a queda de desempenho, como esse novo diagrama deve ser avaliado e propõe-se estudos futuros para ampliação dessa análise.

Palavras-Chave—Amostragem Compressiva, Diagrama de Transição de Fase, Desempenho, Ruído.

Abstract—Compressed Sensing is a signal acquisition technique to capture the information content. The maturity of this technique has been applied in Radar and Magnetic Resonance Imaging with rates below Nyquist. Phase Transition Diagram is a graphic to show the limit between the region where Compressed Sensing is worthwhile since signal recovery can be performed by convex optimization and the other where the utilization is inviable. In previous works, the diagrams were obtained without considering the presence of noise, and in this work, we include such analysis by obtaining PTD under the effect of noise. We show the effect of the noise in PTD, and this new diagram has to be analyzed; we also proposed future developments in this analysis.

Keywords—Compressed Sensing, Phase Transition Diagram, Performance, Noise.

I. INTRODUÇÃO

Amostragem Compressiva é uma técnica de aquisição de sinais proposta neste formato independentemente por Donoho [1] e Candès e Tao em [2], na busca de realizar a captura da informação contida no sinal, evitando captura da redundância, e com isso obter taxas de aquisição menores que as taxas de amostragem preconizadas por Nyquist [3].

Após um período de desenvolvimento teórico e experimental, a Amostragem Compressiva foi aplicada com sucesso em sistema de radar e ressonância magnética [5]. Mesmo já tendo sido aplicada com sucesso, alguns pontos ainda desafiam a utilização da Amostragem Compressiva, por exemplo a presença do ruído, que dependendo da forma como afeta a medição degrada sobremaneira o desempenho, chegando a perdas de 3dB [11].

Edmar Candeia Gurjão, DEE, UFCCG, Campina Grande-PB, e-mail: ecg@dee.ufcg.edu.br

Considerando toda a cadeia da Amostragem Compressiva, obtenção das medidas e reconstrução do sinal, uma das medidas do desempenho é o Diagrama de Transição de Fase (do inglês, *Phase Transition Diagram* [8] que consiste em apresentar o limiar no qual a recuperação pode ser feita por otimização convexa, fator primordial para o bom desempenho de sistema desse tipo.

Nas análises disponibilizadas na literatura os Diagrama de Transição de Fase é feita sem considerar o ruído, neste trabalho é proposta a inserção do efeito do ruído na análise feita por esses diagramas. Serão feitas análise considerando a presença do ruído no sinal original e durante a medição.

O presente trabalho está dividido da seguinte forma. Na seção II é feita uma introdução à Amostragem Compressiva com foco na aquisição e no problema de recuperação dos sinais medidos e a descrição do Diagrama de Transição de Fase e o efeito do ruído. Na seção III é apresentado como foi introduzido o efeito do ruído para na avaliação do desempenho. Na Seção IV temos os resultados e na Seção V são tecidas as conclusões e as perspectivas de continuação do presente trabalho.

II. AMOSTRAGEM COMPRESSIVA

Com a proposta de capturar apenas a informação dos sinais a Amostragem compressiva foi proposta como uma técnica de digitalização de sinais que para certas classes de sinais que provê taxas abaixo de Nyquist [6].

Em essência, dado um sinal \mathbf{x} com dimensões $n \times 1$ que tenha $k \ll n$ componentes não nulos, e os demais nulos ou com valores muito pequenos comparados a outros do mesmo sinal e que possam ser zerados, denominado de sinal esparsos, a aquisição é feita utilizando uma matriz \mathbf{A} de dimensões $m \times n$, sendo $m < n$, obtendo o vetor

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1)$$

de dimensões $n \times 1$ denominado das medidas de \mathbf{x} . Quando o sinal \mathbf{x} não for esparsos pode-se utilizar uma transformação $\mathbf{x} = \Phi\mathbf{s}$, em que o vetor \mathbf{s} é esparsos e a medição da Eq. 1 é reescrita como $\mathbf{y} = \mathbf{A}\Phi\mathbf{s}$.

Se um Oráculo informa ao decodificador o conjunto \mathcal{I} indicando as S posições não zero do vetor \mathbf{x} , pode-se resolver o sistema de equações acima e obter o vetor \mathbf{x} . A solução pode ser obtida pela fórmula da pseudo-inversa de Monrey-Penrose $\mathbf{x}^{Oracle} = (\mathbf{A}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{A}_{\mathcal{I}})^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}$, sendo $\mathbf{A}_{\mathcal{I}}$ obtida de \mathbf{A} pela seleção de colunas indicadas no conjunto \mathcal{I} .

Entretanto, como esse oráculo não existe, o processo de recuperação pode ser realizado por uma busca no espaço do

vetor \mathbf{x} pela solução esparsa que resolve sistema linear. Esta busca pode ser feita resolvendo o problema de otimização

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}'\|_0 \text{ tal que } \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{y}.$$

Esta minimização é um problema NP-completo, e uma otimização computacionalmente viável é obtida usando a minimização da norma l_1 , escrevendo o problema como

$$(P_1) \quad \hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}'\|_1 \text{ tal que } \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{y}. \quad (2)$$

A recuperação do sinal original a partir das medidas utilizando o problema P_1 representado na Eq. 2 nem sempre é possível, devendo nesses casos ser realizada pela utilização de métodos gulosos, ou seja, pelo uso de métodos combinatoriais que testam todas as possibilidades. O limiar entre a possibilidade de utilizar ou não a otimização convexa é apresentada na próxima seção.

A. Diagrama de Transição de Fase

O Diagrama de Transição de Fase é uma ferramenta importante pois fornece uma indicação do desempenho de um sistema de Amostragem Compressiva, ou seja, para quais valores de k , m , e n ainda é possível recuperar o sinal original utilizando técnicas de otimização convexa, fator crucial na eficiência de um sistema desse tipo.

Dentre as possibilidades de recuperar o sinal original \mathbf{x} a partir de suas medidas estão o uso de métodos combinatoriais, também chamados de gulosos, que de forma geral consistem em varrer todas as possibilidades até encontrar uma solução que minimize o erro. Outra possibilidade é o uso de métodos de otimização em tempo polinomial como o problema P_1 (Equação 2) previamente apresentado, que é menos custoso computacionalmente. A definição de qual método resolve o problema depende da relação entre as dimensões do vetor de informação n e o vetor de medidas m em função da razão entre a esparsidade k e m , definindo regiões como apresentado a seguir [7].

Em [8] foi definido o Diagrama de Transição de Fase (*Phase Transition Diagram*) como um gráfico no qual um dos eixos é o valor da razão $\rho = k/m$ normalmente denominada de densidade de \mathbf{x} , e no outro $\delta = m/n$ denominada taxa de subamostragem. No diagrama são marcados os pontos em que a recuperação por otimização tem sucesso com pontos de uma cor, e os sem sucesso em outra, formando duas regiões, como representado na Figura 1.

O Diagrama de Transição de Fase é uma ferramenta importante pois fornece uma indicação do desempenho de um sistema de Amostragem Compressiva, ou seja, para quais valores de k , m , e n ainda é possível recuperar o sinal original utilizando técnicas de otimização convexa, fator crucial na eficiência de um sistema desse tipo.

B. Efeito do Ruído na Amostragem Compressiva

Um dos primeiros estudos a analisar o efeito do ruído em Amostragem Compressiva foi realizado por Yonina, et al. em [11]. Neste trabalho foram inicialmente considerados dois

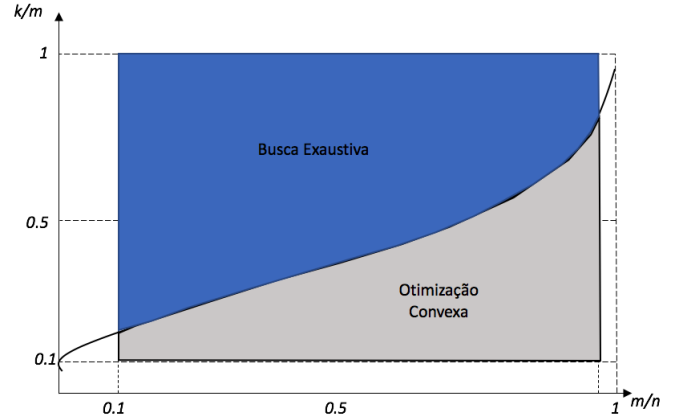


Fig. 1. Representação genérica de um Diagrama de Transição de Fase.

tipos de ruído, um que atinge o sinal após a medição, ou seja, o sinal original deve ser recuperado a partir das medidas

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (3)$$

sendo \mathbf{w} um ruído Gaussiano com covariância $\sigma^2\mathbf{I}$, ou quando o ruído aparece durante a medição, ou seja,

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\{\mathbf{x} + \mathbf{z}\} + \mathbf{w} \quad (4)$$

sendo \mathbf{z} um vetor com variância $\sigma_0^2\mathbf{I}$, e cuja formulação pode ser reescrita como

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{u} \quad (5)$$

sendo \mathbf{B} uma matriz com propriedades similares à matriz \mathbf{A} e \mathbf{u} uma vetor com média zero e covariância $(\sigma^2 + (n/m)\sigma_0^2)\mathbf{I}$, o que reduz a análise ao modelo da Equação 3.

Como $m \ll n$, a compressão aumenta a variância do ruído, fato denominado de *noise folding* e que diminui o desempenho da Amostragem Compressiva. Porém é mostrado que fazendo $n, m \rightarrow \infty$ com $n/m \rightarrow 0$, as constantes para a RIP não se alteram.

Já em [12] adota-se o modelo da Equação 3 porém são definidos um conjunto de requisitos relacionados à sinais de banda larga como largura de banda instantânea, *dynamic range*, figura de ruído e largura de banda máxima do sinal para avaliação do efeito do *noise folding* [11]. Nesse trabalho mostra-se que a aplicação da amostragem compressiva ao problema de projetar receptores RF pode reduzir o custo dos conversores, porém ao custo de aumentar a figura de ruído e a quantidade de processamento para recuperar o sinal. Além disso, perde-se 3dB na relação sinal ruído cada vez que se diminui a taxa de amostragem pela metade.

Em [15] é feito um estudo sobre o efeito da sensibilidade da Amostragem Compressiva ao ruído, são analisadas várias situações em que o desempenho se degrada a medida que o nível do ruído aumenta. Entretanto, não há uma definição da relação de potência do sinal e do ruído, além de se considerar que os tamanhos dos vetores são muito grandes.

Como o ruído tem efeito danoso no desempenho da Amostragem Compressiva apresentando uma definição de relação sinal-ruído e considerando vetores de tamanho finitos, na próxima seção é proposta a representação desse efeito no Diagrama de Transição de Fase.

III. DIAGRAMA DE TRANSIÇÃO DE FASE CONSIDERAN RUÍDO

Os Diagramas de Transição de Fase apresentados literatura são obtidos sem considerar o efeito do ruído. Var considerar o problema do ruído definido na Eq. 5 e para t vamos definir uma relação Sinal Ruído (SNR) como

$$SNR = \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2}.$$

Sem ruído $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0$ e consideraremos a SNR infinito: temos um diagrama como proposto na literatura.

Os diagramas apresentados neste trabalho foram obti por simulação, utilizando a implementação no MATLAB disponibilizada em [9]. Embora hajam outras implementações disponíveis, como o *PTD Builder* desenvolvido em [10], decidiu-se implementar uma versão própria para melhor controle dos parâmetros.

Na implementação utilizada seguiu-se os passos indicados em [7] que consistem em gerar um vetor \mathbf{x} com k (esparsidade) componentes não nulas, sendo $x_i \in \{+1, -1\}$, e partindo de uma matriz $\mathbf{A}_{1 \times n}$ escolher m linhas ao acaso para obter a matriz de medição $\mathbf{A}_{m \times n}$. Essa matriz é aplicada a um vetor \mathbf{x} produzindo o vetor de medições \mathbf{y} . O par (\mathbf{A}, \mathbf{y}) é apresentado a um algoritmo de recuperação produzindo uma versão recuperada \mathbf{x}_0 com uma determinada precisão. Em seguida, caso $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \epsilon$ se considera que a reconstrução foi realizada com sucesso, e a variável *sucesso* é adicionada de 1. Ao final de $N_{interacoes}$ interações a probabilidade de sucesso é estimada como

$$P_{sucesso}(m, k) = \frac{sucesso}{N_{interacoes}}.$$

Estimadas as probabilidades para $1 \leq m \leq n$ e $1 \leq k \leq m$ o Diagrama de Transição de Fase é obtido na forma de mapa de calor, com os eixos δ e ρ . Um mapa obtido seguindo esse procedimento está ilustrado na Figura 2. Na implementação realizada foram utilizados os pacotes l_1 magic [14] e CVX [13], os detalhes estão descritos em [9].

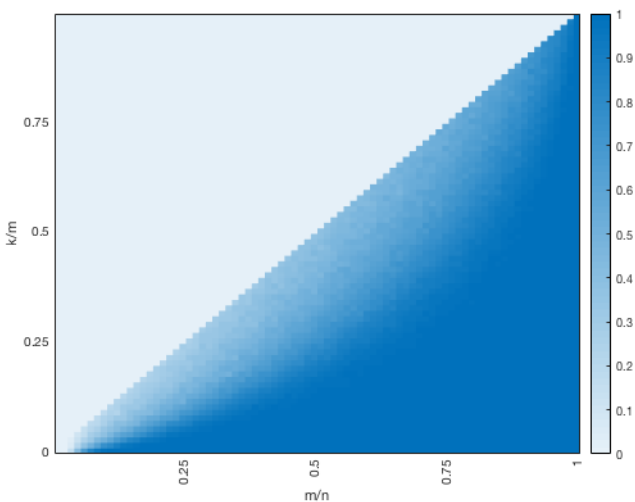


Fig. 2. Diagrama de Transição de Fase sem presença de ruído.

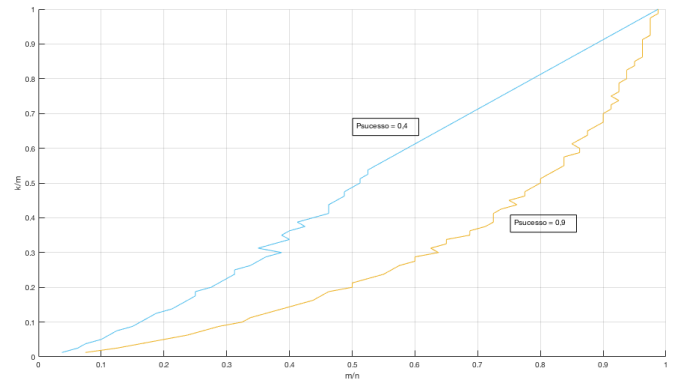


Fig. 3. Diagramas de Transição de Fase apresentados como curvas que dividem as regiões com probabilidades de recuperação maior (abaixo da curva) e menor (acima da curva) que um determinado valor.

Na literatura o Diagrama de Transição de Fase tem sido apresentado apenas com a curva que delimita as regiões para uma dada probabilidade de sucesso, e sem considerar a presença do ruído. Na Figura 3 são mostradas curvas para $P_{sucesso} = 0.9$ e 0.4 , indicando respectivamente o conjunto de pontos para as quais a probabilidade de sucesso da recuperação pela minimização da norma l_1 é de 90% e 40%. Observe que as curvas desenhadas na Figura 3 podem ser consideradas como uma curva na região da Figura 2 para a qual a probabilidade de sucesso permanece constante.

Na próxima seção serão apresentados os diagramas considerando a presença do ruído.

IV. RESULTADOS

Os diagramas apresentados nessa seção consideram a presença do ruído e para facilitar a visualização todos os gráficos serão apresentados no formato de somente curvas para o valor da probabilidade de sucesso igual a 90%. Para referência, em todos os diagramas será apresentada a curva sem ruído, i.e. $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0$. Fazendo $n = 80$, $\epsilon = 1e^{-3}$, \mathbf{A}_1 uma matriz com entradas dos valor da Transformada do Cosseno Discreto (DCT), $N_{interacoes} = 1000$ e $\epsilon = 1e^{-3}$ temos a curva da Figura 3.

A recuperação foi feita usando a minimização da norma l_1 disponível no pacote $l_1 - magic$, que embora não seja adequada para lidar com ruído foi escolhida pela simplicidade para se obter os resultados, e que não há necessidade de parametrizações dependentes do ruído como em métodos como o Dantzig-Selector ou LASSO.

A inserção de ruído proposta nesse trabalho parte de um valore de SNR (Eq. 6) que se traduz em valores das variâncias σ_2 e σ_0^2 dos ruídos que afeta o sinal e o que afeta a medição, variáveis \mathbf{z} e \mathbf{w} da Eq. 4 respectivamente.

Considerando somente o ruído que afeta o sinal variável \mathbf{z} , fazendo $\sigma_0^2 = 0$ e variando σ^2 , temos na Figura 4 as curvas de referência e afetada pelo ruído para alguns valores de SNR.

Invertendo a ordem, na Figura 5 estão as curvas quando há somente o ruído que afeta as medições, variável \mathbf{w} , ou seja, $\sigma_2 = 0$ para $SNR = 80$ dB. Observa-se novamente

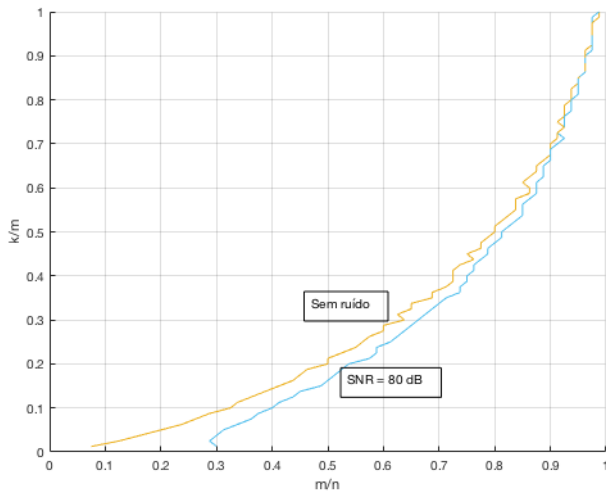


Fig. 4. Diagrama de Transição de Fase para $SNR = 80\text{ dB}$ e com ruído afetando somente o sinal.

uma queda no desempenho, e que somente para altos valores de m/n e k/m as probabilidades se aproximam, mas nesses casos pode ser que o uso da amostragem convencional seja mais adequado, visto que já existem métodos otimizados.

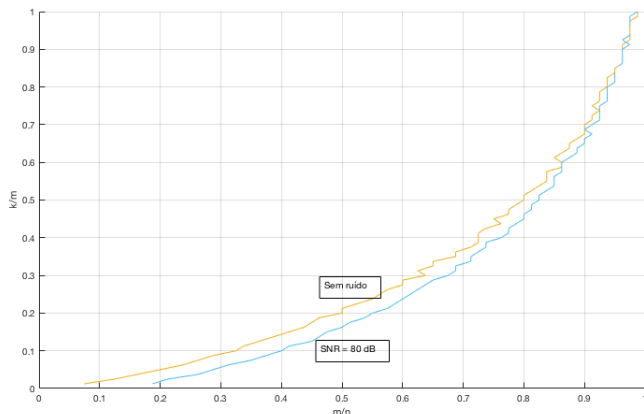


Fig. 5. Diagramas de Transição de Fase considerando a $SRN = 80\text{ dB}$ e o ruído afetando as medições.

Emboras os resultados das Figuras 4 e 5 sejam bem parecidos, quando desenhados no mesmo gráfico, Figura 6, observa-se que o efeito do ruído no sinal é mais danoso, visto que somente a partir de $m/n > 0,3$ se obtém a probabilidade de 90%. Isso indica que é necessário tomar mais medidas do sinal.

V. CONCLUSÕES

A avaliação de efeito do ruído é crucial para análise do desempenho de um sistema de Amostragem Compressiva. Neste trabalho propomos uma forma de fazer essa análise utilizando o Diagrama de Transição de Fase. Embora este trabalho seja exploratório foi possível mostrar a degradação do desempenho da Amostragem Compressiva quando há ruído.

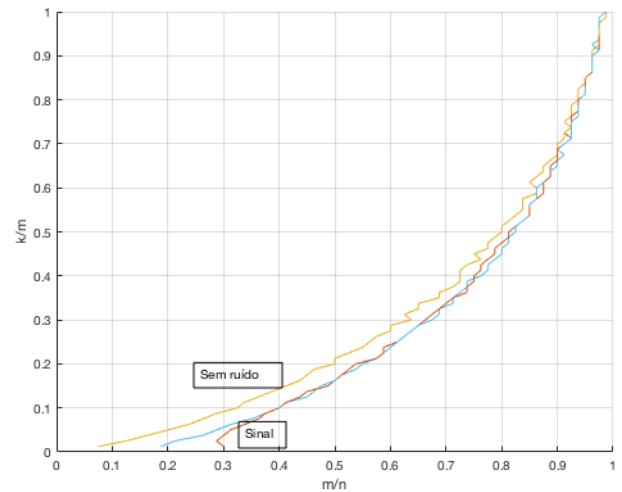


Fig. 6. Diagramas de Transição de Fase considerando a $SRN = 80\text{ dB}$ com os gráficos do ruído afetando o sinal e a medição.

Diversas perguntas precisam ser respondidas para que se tenha uma melhor compreensão da análise aqui proposta, algumas delas são:

Com base no que foi apresentado alguns questionamentos necessitam ser explorados, por exemplo: qual o significado da SNR no contexto apresentado? É possível projetar métodos de calibração do sistema ou matrizes de medição que minimizem o efeito do ruído? Deve explorar a utilização de algoritmos de recuperação de sinais como o Dantzig-Selector e o LASSO, visto que são adequados para lidar com ruído. Essas e outras questões serão explorados em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- [1] Donoho D. Compressed Sensing. IEEE Transactions on Information Theory 52:1289–1306, 2006.
- [2] Candès E, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies. IEEE Transactions on Information Theory 52:5406–5425, 2004.
- [3] Baraniuk R. Compressive Sensing. IEEE Signal Processing Magazine 24(4):118–121, 2007.
- [4] Jungang Yang dn Tian Jin, Chao Xiao and Xiaotao Huang. Compressed Sensing Radar Imaging: Fundamentals, Challenges, and Advances. Sensors, July, 2019.
- [5] Compressed Sensing, Beyond Speed. Página Siemens Healthineers, <https://www.siemens-healthineers.com/en-ca/magnetic-resonance-imaging/mri-technologies/speed-technologies/compressed-sensing>. Acessado em 02 de julho de 2020.
- [6] E. C. Gurjão, “Introdução à Amostragem Compressiva”. Renato da Rocha Lopes, Walter da Cruz Freitas Júnior. (Org.). Telecomunicações: Teoria, Avanços e Aplicações. 1ed. Fortaleza: , 2013, v. , p. 1-26.
- [7] D. L. Donoho and J. Tanner. Precise Undersampling Theorems. Proceedings of the IEEE, 2010, vol. 98, No 6, pp 913-924.
- [8] Donoho, D. L. and Tanner, J., “Observed Universality Of Phase Transitions In High-dimensional Geometry, With Implications For Modern Data Analysis and Signal”. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 367, pp. 4273-4293, 2009.
- [9] E. C. Gurjão. Página do Github com a implementação do Diagrama Transição e Fase. https://github.com/ecandeia/PTD_MATLAB Último acesso 14 de julho de 2020.
- [10] Herrmann, Martin., “Phase Transition Diagrams in Compressive Sensing - Computation and Analysis.” Technische Universität Ilmenau, 2015.
- [11] Arias-Castro, Ery and Eldar, Yonina C. “Noise Folding in Compressed Sensing,” IEEE Signal Processing Letters, vol. 18, no. 8, pp. 478–481, August. 2011.

- [12] Davenport, Mark A. and Laska, Jason N. and Treichler, John R. and Baraniuk, Richard G. "The Pros and Cons of Compressive Sensing for Wideband Signal Acquisition: Noise Folding vs. Dynamic Range." <http://arxiv.org/abs/1104.4842>, 2011.
- [13] CVX Research. CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming. Online em <http://cvxr.com/cvx/> acessado em 02 de julho de 2020.
- [14] l_1 -magic. Online em <https://statweb.stanford.edu/candes/software/l1magic/> acessado em 14 de julho de 2020.
- [15] D. L. Donoho, A. Maleki and A. Montanari, "The Noise-Sensitivity Phase Transition in Compressed Sensing," in IEEE Transactions on Information Theory, vol. 57, no. 10, pp. 6920-6941, Oct. 2011, doi: 10.1109/TIT.2011.2165823.