

Estudo da robustez da sincronização de fase em redes de neurônios de Rulkov

Angelo Cardoso de Oliveira e Marcio Eisencraft

Resumo—A sincronização entre neurônios está associada à saúde do sistema nervoso e a vários processos cognitivos. Neste artigo, a dinâmica neuronal é representada pelo modelo de Rulkov. Estuda-se preliminarmente a robustez do sincronismo de fase em caso de perda de neurônios, simulando a desconexão de cada neurônio inativo. São analisadas redes aleatórias, mundo pequeno e livre de escala. As desconexões seguem critérios como retirada de maior e menor grau, centralidade de intermediação e retirada aleatória.

Palavras-Chave—Modelo de Rulkov, sincronismo de fase, redes de neurônios, robustez.

Abstract—Synchronization between neurons is associated with the health of the nervous system and various cognitive processes. In this article, the neuronal dynamic is represented by the Rulkov model. The robustness of the phase synchronization in case of neuron losses is preliminarily studied, simulating the disconnection of each inactive neuron. Random, small-world and scale-free networks are analyzed. The disconnections follow criteria as major and minor degree withdrawal, centrality of intermediation and random withdrawal.

Keywords—Rulkov model, phase synchronization, neuron networks, robustness.

I. INTRODUÇÃO

Neurônios são células que podem transmitir sinais por grandes distâncias [1]. Isso é feito por meio de pulsos elétricos chamados potenciais de ação ou disparos, que percorrem as fibras nervosas [2].

Há alguns tipos de sincronização que podem ser encontrados em redes de neurônios. Os principais são [3]: sincronização em fase [4], sincronização em antifase [5] e sincronização completa [6]. Nesse artigo, trata-se em particular da sincronização de fase, em que o início de cada rajada de disparos acontece de forma síncrona, mesmo que os instantes de ocorrência dos potenciais de ação individuais variem [4].

A sincronização entre neurônios é uma propriedade emergente das redes neuronais. A anomalia dessa sincronização está associada à diversas doenças cerebrais, como o Parkinson, Alzheimer, esquizofrenia, epilepsia e autismo [7]. A perda de neurônios pode levar à dessincronização, que pode afetar alguns processos cognitivos [8].

Na modelagem computacional de redes de neurônios, utilizam-se diversos modelos para os neurônios [9]. Nesse artigo opta-se pelo modelo de Rulkov [4]. Esta escolha é

motivada por ser um modelo simples que contém os principais comportamentos que se observa em neurônios reais [10]. Por meio desse modelo, pode-se estudar o comportamento das rajadas de disparos. Por ser baseado em um mapa bidimensional, tem melhor desempenho computacional do que os modelos baseados em equações diferenciais [9].

Em [11] estudam-se os modelos de Hindmarsh-Rose, Rulkov e Kuramoto na sincronização de fase de neurônios com atraso de tempo. Em [12] a sincronização de fase é estudada em redes mundo pequeno, mostrando que a sincronização de fase é mais eficaz dependendo da quantidade de reconexões na construção da rede. Demonstra-se também que redes maiores exigem um coeficiente de acoplamento ε maior para sincronizar. Em [3] abordam-se retiradas de maior grau k e maior centralidade de intermediação C_{in} dos neurônios em redes aleatórias, mundo pequeno e livre de escala, com modelos de Rulkov e Kuramoto, concluindo que são modelos equivalentes.

Neste artigo, retomam-se os resultados de [3] adicionando-se retirada de neurônios de menor C_{in} e menor k , pois a robustez também deve ser medida com retiradas de neurônios menos “importantes” na rede. Também foi feita uma simulação para se observar a média do parâmetro de ordem \bar{R} , que mede o sincronismo da rede, em função do número de neurônios N . Dessa forma, foi possível estipular o valor mínimo de \bar{R} em que as fases dos neurônios estão totalmente dessincronizadas.

O objetivo desse artigo é analisar a robustez da sincronização de fase em redes de neurônios de Rulkov, observando o impacto da perda de neurônios dependendo do tipo de topologia em que estão conectados. Avalia-se nesse artigo como a perda gradativa dos neurônios afeta a sincronização de fase da rede.

O restante desse artigo está organizado da seguinte forma: na Seção II mostra-se o modelo de neurônio de Rulkov. Na Seção III apresentam-se as estruturas de rede utilizadas e a forma de se medir o sincronismo de fase. Na Seção IV analisa-se a robustez do sincronismo de fase nas redes de neurônios e verificam-se os impactos sofridos em cada uma delas. Na Seção V são descritas algumas conclusões preliminares e sugestões de trabalhos futuros.

II. MODELO DE RULKOV

O modelo de Rulkov possui uma variável rápida x_t que representa o potencial de ação da membrana neuronal e uma variável lenta y_t que é associada aos fluxos lentos que estabelecem o comportamento das rajadas de disparos [4]. Ele

Angelo Cardoso de Oliveira, Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do ABC, Santo André - SP, e-mail: angelo.oliveira@ufabc.edu.br; Marcio Eisencraft, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo - SP, e-mail: marcioft@usp.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES, código de financiamento 001 e pelo CNPq, processo 311039/2019-7.

é definido por

$$\begin{cases} x_{t+1} = \frac{\alpha}{1+x_t^2} + y_t \\ y_{t+1} = y_t - \sigma x_t - \beta \end{cases}, \quad (1)$$

em que α , β e σ são parâmetros e $t \geq 0$ inteiro é o índice temporal. Fixando-se $\sigma = \beta = 0,001$, o modelo apresenta diferentes comportamentos dependendo do valor de α [3]:

- Regime I, $0 < \alpha < 2,00$, x_t não apresenta picos ou rajadas de disparos.
- Regime II, $2,00 < \alpha < 2,58$, x_t e y_t apresentam comportamento assintoticamente periódico.
- Regime III, $2,59 < \alpha < 4,00$, as rajadas de disparos são em formato triangular.
- Regime IV, $4,01 < \alpha < 4,62$, as rajadas de disparos são em formato retangular.

Na Figura 1 apresentam-se trechos de gráficos de x_t e y_t de simulações do modelo Rulkov com diversos valores de α e condições iniciais $x_0 = 0,01$ e $y_0 = 0,02$. Eliminou-se as $7 \cdot 10^3$ primeiras amostras, o que é suficiente para o sinal do neurônio atingir seu comportamento assintótico. Nos Regimes III e IV, nota-se que as rajadas de disparos de x_t sempre ocorrem quando y_t passa por um valor máximo [3].

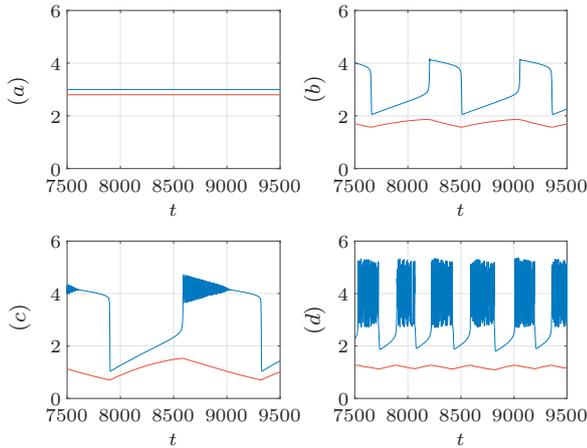


Fig. 1. Simulação de um neurônio pelo modelo de Rulkov, x_t em azul e y_t em vermelho, variando o valor de α conforme os exemplos: (a) Regime I: $\alpha = 0,4$. (b) Regime II: $\alpha = 2,3$. (c) Regime III: $\alpha = 3,2$ e (d) Regime IV: $\alpha = 4,1$.

Para as simulações posteriores, neste artigo fixou-se $\alpha = 4,1$, pois para os regimes em que a variável y_t apresenta oscilações, pode-se representar a evolução dessa variável por meio de uma fase φ_t .

Considera-se que a diferença de fase entre dois picos consecutivos de y_t é 2π . Desta forma, a fase associada a um instante t é dada por

$$\varphi_t = 2\pi h + 2\pi \frac{t - t_h}{t_{h+1} - t_h}, \quad (2)$$

em que t_h e t_{h+1} representam os instantes em que ocorrem os picos máximos imediatamente anterior e posterior ao instante t [13].

A fase φ_t é utilizada posteriormente para medir o sincronismo de fase entre neurônios de uma rede. Na Figura

2(a) mostra-se x_t de um exemplo de uma série temporal do mapa de Rulkov. Na Figura 2(b), observa-se y_t , em que os círculos vermelhos indicam os instantes de máximo dessa variável, encontrados com a função `findpeaks` [14, p.178] do Matlab[®]. Na Figura 2(c), mostra-se φ_t de (2) obtido para esta série temporal.

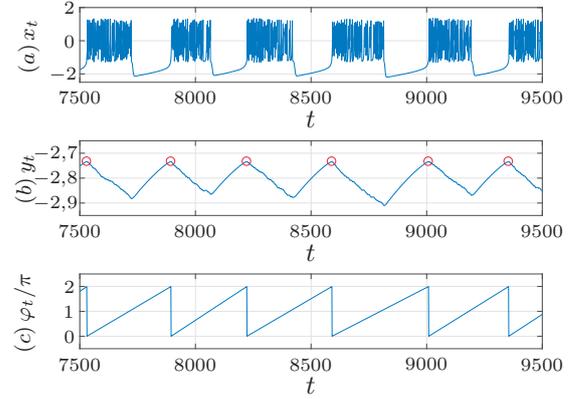


Fig. 2. (a) e (b) Simulação do mapa de Rulkov para $\alpha = 4,1$ e condições iniciais $x_0 = 0,01$ e $y_0 = 0,02$. Máximos de y_t marcados com círculos em (b). Fase φ_t em (c) obtida utilizando (2).

III. REDES DE NEURÔNIOS E SINCRONISMO DE FASE

Uma rede de neurônios pode ser representada por um grafo direcionado [13], em que os sinais trafegam em apenas um sentido. Na Figura 3 há um exemplo de grafo direcionado com $N = 4$ neurônios em rede.

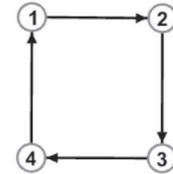


Fig. 3. Exemplo de grafo direcionado com $N = 4$ neurônios. Os círculos representam os neurônios e as flechas indicam o sentido da conexão.

Pode-se representar um grafo por meio de uma matriz de adjacências A [15]. Os coeficientes binários $a_{n,j}$ dessa matriz $N \times N$ indicam se há ou não aresta partindo do nó n até o j . Se houver uma aresta direcionada $a_{n,j} = 1$, se não $a_{n,j} = 0$. Por exemplo, a matriz de adjacências do grafo da Figura 3 é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

A topologia da rede utilizada influencia no sincronismo de fase dos neurônios [3]. Neste artigo consideram-se 3 topologias de redes diferentes:

- 1) Rede aleatória de Erdős-Reyni [16]: os nós são conectados com a mesma probabilidade de conexão p_c ,

em que $0 \leq p_c \leq 1$. Começa-se com uma rede totalmente desconectada e a probabilidade p_c vai definir se a conexão é criada ou não para cada dupla de nós.

- 2) Rede mundo pequeno [17]: é construída a partir de uma rede em anel, em que todos os nós tem c conexões de cada lado. A probabilidade de reconexão p_r , em que $0 \leq p_r \leq 1$, define se a conexão se mantém da forma original ou se é religada em outro nó. É uma rede que caracteriza-se pelo baixo comprimento médio de menor caminho, ou seja, o menor caminho do nó n até o j passa por poucos nós [15].
- 3) Rede livre de escala [18]: tem como característica o crescimento da rede, em que novos nós são inseridos com conexão preferencial ao nó que tiver maior grau k , ou seja, ao nó que tiver maior quantidade de conexões. Partindo-se de uma rede preestabelecida, tem como parâmetros o número de conexões criadas para cada nó M e o tamanho final da rede N . Dessa forma, é uma rede que possui poucos nós com grau alto e muitos nós com grau baixo [15].

Um modelo simples para uma rede de N neurônios de Rulkov é dado por [4]

$$\begin{cases} x_{t+1}^{(n)} = \frac{\alpha}{1+(x_t^{(n)})^2} + y_t^{(n)} + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N a_{nj} x_t^{(j)} \\ y_{t+1}^{(n)} = y_t^{(n)} - \sigma x_t^{(n)} - \beta \end{cases}, \quad (4)$$

em que n representa o índice do n -ésimo neurônio na rede com $1 \leq n \leq N$, a_{nj} são coeficientes da matriz de adjacências da rede e ε é o coeficiente de acoplamento. Nesse estudo preliminar, considera-se que todos os neurônios são idênticos, que os coeficientes de acoplamento são iguais em todas as conexões da rede e assume-se que o efeito de um neurônio sobre o outro em suas conexões é sempre excitatório, seguindo o que foi feito em [3].

Para medir o sincronismo de fase entre os neurônios, pode-se utilizar o parâmetro de ordem r_t de Kuramoto definido por [19]

$$r_t = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_t^{(n)}} \right|, \quad (5)$$

em que $\varphi_t^{(n)}$ é a fase do n -ésimo neurônio definida por (2) e $i = \sqrt{-1}$.

Quando os neurônios estão sincronizado em fase $r_t = 1$, pois $\varphi_t^{(n)} = \varphi_t$ para todo n e

$$r_t = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_t} \right| = \frac{1}{N} |N e^{i\varphi_t}| = |e^{i\varphi_t}| = 1. \quad (6)$$

Para exemplificar, foi feita a simulação de uma rede com $N = 4$ e conexões conforme a matriz de adjacências (3). Na Figura 4 apresentam-se os sinais x_t , y_t e o parâmetro de ordem r_t desta rede com o coeficiente de acoplamento $\varepsilon = 0$. Neste caso, as fases dos neurônios estão dessincronizadas e r_t oscila entre 0,2 e 0,5, ou seja, valores de r_t nessa faixa, com $N = 4$, é um indício de uma rede totalmente dessincronizada em fase. Na Figura 5, também apresentam-se as mesmas variáveis x_t ,

y_t e r_t , porém com $\varepsilon = 0,3$, nesse caso $r_t = 1$, indicando que há sincronismo de fase.

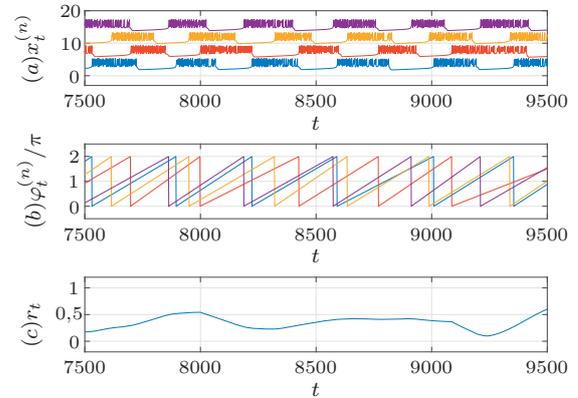


Fig. 4. Simulação de uma rede de Rulkov com $N = 4$ e $\varepsilon = 0$. (a) sinal de x_t , (b) sinal de y_t e (c) sinal do parâmetro de ordem r_t .

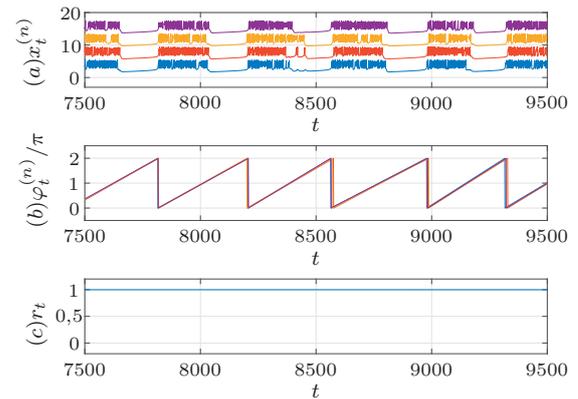


Fig. 5. Simulação de uma rede de Rulkov com $N = 4$ e $\varepsilon = 0,3$. (a) sinal de x_t , (b) sinal de y_t e (c) sinal do parâmetro de ordem r_t .

O valor médio \bar{R} do parâmetro de ordem é calculado por

$$\bar{R} = \frac{\sum_{t=T_0}^T r_t}{T - T_0 + 1}, \quad (7)$$

em que T é o número total de iterações realizadas e T_0 é o número de amostras descartadas da simulação para que os sinais gerados atinjam o comportamento assintótico. Nas simulações desse artigo tomou-se $T_0 = 7 \cdot 10^3$.

Para se ter uma base para o estudo do sincronismo, na Figura 6 mostra-se uma simulação de uma rede com $N = 100$ neurônios com $\varepsilon = 0$ e $T = 10^5$. Nota-se que quanto maior a quantidade de neurônios, menor é o valor de \bar{R} para uma rede de neurônios isolados. As próximas simulações foram feitas com $N = 100$, neste caso, considera-se que as fases estão totalmente dessincronizadas quando $\bar{R} < 0,1$.

Para observar o comportamento de \bar{R} em função de ε , na Figura 7 utilizou-se uma rede totalmente conectada com $N = 100$. Nesta rede considera-se que as fases dos neurônios estão dessincronizadas com o valor de $\bar{R} < 0,1$, (como pode ser

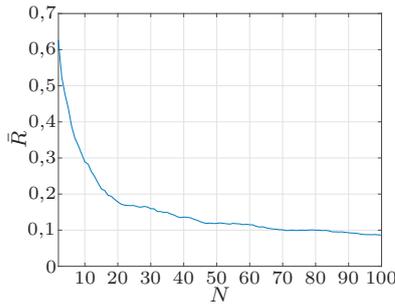


Fig. 6. Valor médio do parâmetro de ordem \bar{R} em função do número de neurônios N na rede, com $t = 10^5$ e $\varepsilon = 0$. Todos os neurônios de Rulkov estão desconectados.

observado na Figura 6. Não há sincronização de fase quando $\varepsilon = 0$, ao aumentar este valor, o sincronismo de fase dos neurônios também cresce. Observa-se neste caso, que com $\varepsilon = 0,06$ já é suficiente para esta rede sincronizar em fase.

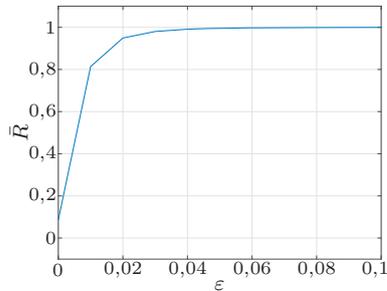


Fig. 7. Valor médio do parâmetro de ordem \bar{R} de 10 redes com condições iniciais aleatórias em função do coeficiente de acoplamento ε , com $N = 100$.

IV. ROBUSTEZ DO SINCRONISMO DE FASE NAS REDES

Para analisar a robustez do sincronismo de fase ao se retirar neurônios da rede de Rulkov, foram simuladas redes aleatórias, mundo pequeno e livre de escala. Para definir o neurônio mais importante destas redes, utilizou-se critérios como grau k e a centralidade de intermediação C_{in} do neurônio. O grau de entrada k_i^{ent} é o número de conexões que chegam até o neurônio n , o grau de saída k_i^{sai} é o número de conexões que partem do nó n . Para medir o grau, neste artigo utilizou-se a soma destes dois tipos de grau. A centralidade de intermediação C_{in} é medida pelo número de caminhos mais curtos entre dois neurônios j e l que passam pelo neurônio n , denotado por σ_{jl} , dividido pelo número de caminhos mais curtos entre os neurônios j e l [15]. Pode-se calcular a C_{in} de um grafo direcionado por:

$$C_{in}(n) \equiv \frac{1}{(N-1)(N-2)} \sum_{j=1}^N \sum_{l=j+1}^N \frac{\sigma_{jl}(n)}{\sigma_{jl}}. \quad (8)$$

Nas próximas simulações foram utilizados $N = 100$ neurônios e as conexões deles foram removidas de cada neurônio, para observar o comportamento de \bar{R} . O coeficiente de acoplamento utilizado foi $\varepsilon = 0,2$ fixo. Os parâmetros das redes foram escolhidos para que todas as redes simuladas

começassem com quantidade de conexões semelhantes. Foram simuladas retiradas de maior e menor grau, aleatória e maior e menor centralidade de intermediação dos neurônios.

Na Figura 8(a) mostra-se um gráfico das simulações com redes aleatórias Erdős-Rényi com probabilidade de conexão $p_c = 0,027$.

Na Figura 8(b) apresenta-se um gráfico das simulações com redes mundo pequeno com probabilidade de reconexão $p_r = 0,5$, sendo criadas a partir de uma rede anel com $c = 3$ conexões para os vizinhos de cada lado.

Na Figura 8(c) tem-se um gráfico das simulações com redes livre de escala construídas a partir de uma rede de $N = 3$ totalmente conectada e a cada neurônio inserido foram criadas mais 3 conexões M até chegar em $N = 100$.

Na Tabela 1 mostra-se a relação da quantidade de neurônios desconectados para a rede perder o sincronismo de fase, baseada nas redes estudadas. Analisando estes dados, nota-se que as retiradas de neurônios considerando o grau e a centralidade de intermediação, são praticamente equivalentes.

TABELA I

RELAÇÃO DA QUANTIDADE DE NEURÔNIOS DESCONECTADOS PARA A REDE PERDER O SINCRONISMO DE FASE

Tipo de rede	Retirada	Neurônios removidos para $R < 0,1$
Erdős-Rényi	Aleatória	76
	Maior k	41
	Menor k	79
	Maior C_{in}	40
	Menor C_{in}	82
Mundo pequeno	Aleatória	72
	Maior k	59
	Menor k	84
	Maior C_{in}	54
	Menor C_{in}	81
Livre de escala	Aleatória	75
	Maior k	27
	Menor k	95
	Maior C_{in}	31
	Menor C_{in}	95

Na rede livre de escala, com a retirada de apenas 27% dos neurônios de maior importância, a rede perde o sincronismo de fase, dessa forma, com poucos neurônios removidos, o impacto é muito grande. Porém, se os neurônios desconectados forem de menor importância, é necessário a retirada de 95% para a rede dessincronizar. Isso se justifica porque redes livre de escala possuem como característica ter poucos nós com grau alto e muitos nós com grau baixo. Nota-se que a intensidade do sincronismo de fase na rede é relacionada à intensidade de conexão.

As redes aleatórias e mundo pequeno também perdem o sincronismo mais rapidamente quando os neurônios de maior conectividade são retirados, sendo necessários a retirada de 41% e 59% dos neurônios respectivamente. O impacto não é tão grande quanto na rede livre de escala.

Nas três redes apresentadas, a retirada de neurônios de forma aleatória se mantém em aproximadamente 75% em todos os casos. Nesse caso, a topologia de rede tem pouca relevância.

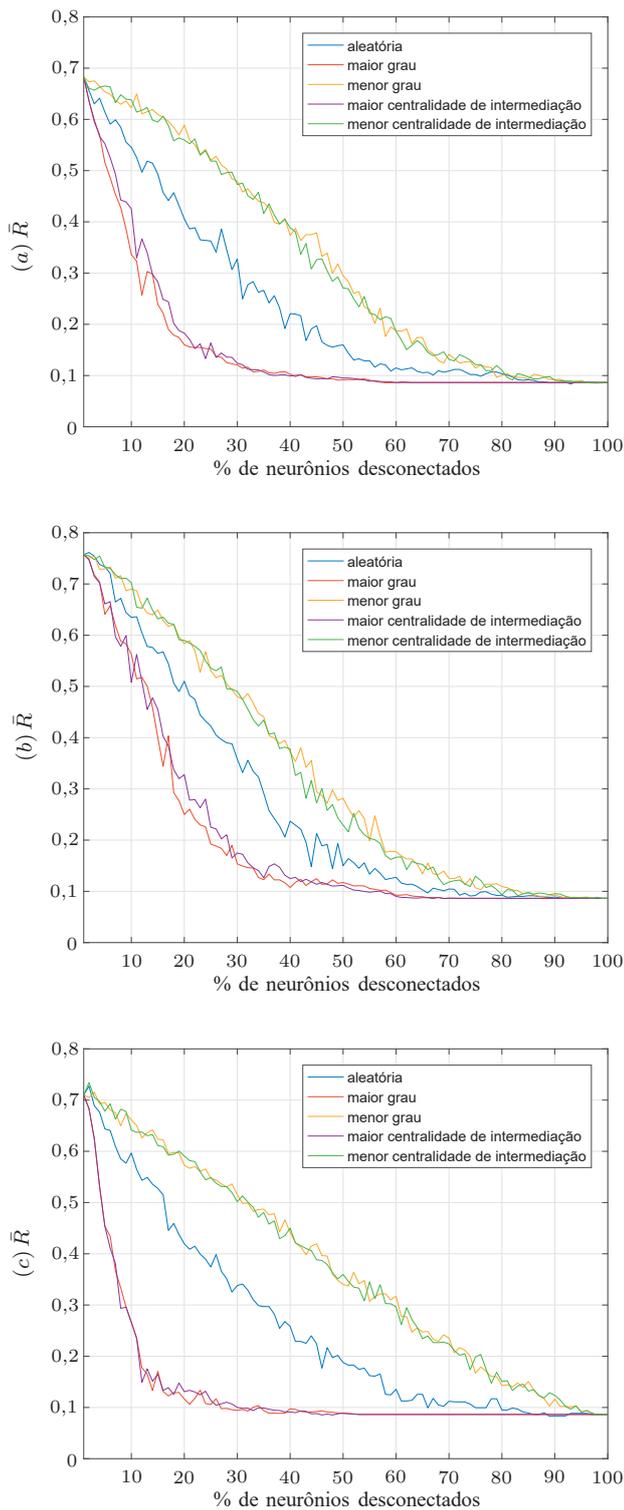


Fig. 8. Valor médio do parâmetro de ordem \bar{R} em função da porcentagem de neurônios desconectados. Foram feitas 10 simulações de cada topologia de rede, em (a) aleatória Erdős-Rényi, em (b) mundo pequeno e em (c) livre de escala. Os neurônios foram desconectados conforme a legenda. Todas as redes tem $N = 100$, $t = 10^5$, $\varepsilon = 0,2$ e condições iniciais distintas.

V. CONCLUSÕES

Analisando a robustez das redes, com base nos dados apresentados, observa-se que quanto mais conexões um neurônio

desconectado da rede tiver, maior será a dessincronização na rede como um todo. A rede livre de escala sofre maior impacto. A desconexão aleatória tem comportamento semelhante em todas as redes.

Neste estudo, avaliou-se preliminarmente uma rede com $N = 100$, porém redes reais possuem bilhões de neurônios. No futuro, pretende-se estudar redes maiores considerando os efeitos inibitórios dos neurônios e também analisar redes reais baseadas em banco de dados disponíveis na internet. Dessa forma, pretende-se estudar situações práticas de perda de neurônios lesionados e o impacto disso em um sistema nervoso saudável.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. M.E. foi parcialmente financiado pelo CNPq, processo 311039/2019-7.

REFERÊNCIAS

- [1] E. M. Izhikevich, *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, 2007.
- [2] P. Dayan e L. F. Abbott, “Theoretical Neuroscience Computational and Mathematical Modeling of Neural Systems”, *The MIT Press*, v. 15, pp. 154–155, 2001.
- [3] F. A. S. Ferrari, “Modelos Matemáticos para Lesões em Redes Neurais com Padrões Complexos de Conectividade”, *Dissertação de Doutorado*, 2015.
- [4] N. F. Rulkov, “Regularization of synchronized chaotic bursts”, *Physical Review Letters*, v. 86, pp. 183–186, 2001.
- [5] R. C. Elson, A. I. Selverston, R. Huerta, N. F. Rulkov, M. I. Rabinovich, e H. D. I. Abarbanel, “Synchronous behavior of two coupled biological neurons,” *Physical Review Letters*, v. 81, pp. 5692–5695, dezembro 1998.
- [6] H. Sun e H. Cao, “Complete synchronization of coupled rulkov neuron networks,” *Nonlinear Dynamics*, v. 84, pp. 2423–2434, 2016.
- [7] P. J. Uhlhaas e W. Singer, “Neural Synchrony in Brain Disorders: Relevance for Cognitive Dysfunctions and Pathophysiology,” *Neuron*, v. 52, pp. 155–168, 2006.
- [8] T. Burwick, “The binding problem”, *WIREs Cognitive Science*, v. 5, N. 3, pp. 305–315, 2014.
- [9] B. Ibarz, J. Casado, e M. Sanjuán, “Map-based models in neuronal dynamics,” *Physics Reports*, v. 501, N. 1, pp. 1–74, 2011.
- [10] N. Rulkov, “Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map,” *Physical Review E*, v. 65, p. 041922-1–041922-9, 2002.
- [11] A. Nordenfelt, j. Used e M. A. F. Sanjuán, “Bursting frequency versus phase synchronization in time-delayed neuron networks”, *Physical Review E*, v. 87, pp. 052903-1–052903-7, 2013.
- [12] Y. Haitao, J. Wang, B. Deng, X. Wei, Y. K. Wong, W. L. Chan, K. M. Tsang e Ziqi Yu, “Chaotic phase synchronization in small-world networks of bursting neurons”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 21, pp. 013127-1–013127-5, 2011.
- [13] L. Cheng e H. Cao, “Synchronization dynamics of two heterogeneous chaotic rulkov neurons with electrical synapses”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v.27, pp. 1730009-1–1730009-14, 2017.
- [14] T. Dutoit e F. Marqués, *Applied Signal Processing - A Matlab - Based Proof of Concept*. Springer, 2014.
- [15] L. H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos complexos*. Livraria da Física, 2010.
- [16] P. Erdős e A. Rényi, “On the evolution of random graph”, *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, v. 5, N. 1, pp. 17–60, 1960.
- [17] S. H. Strogatz e D. J. Watts, “Collective dynamics of ‘small-world’ networks,” *Nature*, v. 393, pp. 440–442, 1998.
- [18] A.L. Barabási e R. Albert, “Emergence of scaling in random networks,” *Science*, v. 286, N. 5439, pp. 509–512, 1999.
- [19] J. A. Acebron, L. L. Bonilla, C. J. Pérez-Vicente, F. Ritort e R. Spigler, “The kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena”, *Reviews of Modern Physics*, v. 77, pp. 137–185, 2005.