FrRDA-RwD: Uma Proposta de Imageamento SAR Baseada na Transformada Fracionária de Fourier

Edmar Soares da Silva, José R. de Oliveira Neto e Juliano Bandeira Lima

***Resumo*— Neste artigo, é introduzido um novo algoritmo de imageamento para dados de radares de abertura sintética. Esse é baseado na representação mais compacta de um sinal *chirp* por meio da transformada fracionária de Fourier. A compressão de pulso em alcance, azimute e a correção da migração de célula em alcance são obtidos unicamente da matriz de dados brutos, diferentemente de métodos documentados na literatura, como o Range-Doppler, não há necessidade de inserir parâmetros de operação do radar ou fazer qualquer tipo de inferência desses.**

***Palavras-Chave*— Radar de abertura sintética, algoritmo range-Doppler, transformada fracionária de Fourier.**

***Abstract*— In this paper, we introduce a new imaging algorithm for synthetic aperture radar raw-data. This is based on the most compact representation of a chirp signal using the fractional Fourier transform. Pulse compression in range, azimuth and range cell migration correction are obtained only from the raw-data, unlike methods documented in the literature, such as Range-Doppler, there is no need to enter radar operating parameters or make any kind of inference from those.**

***Keywords*— Synthetic aperture radar, range-Doppler algorithm, fractional Fourier transform.**

I. INTRODUÇÃO

O imageamento por meio de radar de abertura sintética (SAR, do inglês *synthetic aperture radar*) tem evoluído à medida em que a microeletrônica é refinada e novos algoritmos para processamento de sinais são elaborados [1], o que permite a construção de imagens com melhores resoluções [4]. Radares do tipo SAR possuem vantagens sobre outros sistemas de imageamento, como a possibilidade de operação em ambientes escuros, camuflados ou sob quaisquer condições climáticas [1]. Monitoramento de queimadas em áreas de floresta [5] e desastres envolvendo derramamento de óleo no oceanos [6] são exemplos de aplicações envolvendo a tecnologia SAR que podem ser embarcados em sistemas montados em satélites ou aeronaves.

Geralmente, um radar SAR emite um sinal de *chirp* de modulação de frequência linear (*chirp* LFM, do inglês *linear frequency modulation*). O imageamento é realizado por algoritmos como o *range Doppler algorithm* (RDA), *chirp scaling algorithm* e *omega-k algorithm*. O primeiro, um dos mais utilizados, é flexível quanto à variação de parâmetros e processa as informações dos dados brutos em dimensões separadas: alcance e azimute [1]. O tratamento é realizado por meio da compressão do pulso do radar no domínio da frequência tanto no alcance quanto no azimute [7]. Entretanto, o uso de uma transformada de Fourier não permite que o sinal seja analisado em tempo e frequência simultaneamente, algo desejável para um sinal do tipo *chirp*.

A transformada fracionária de Fourier (FrFT, do inglês *fractional Fourier transform*) [8] é uma forma de melhor representar um sinal *chirp* do que a obtida pela transformada de Fourier por ser uma ferramenta voltada à descrição no plano tempo-frequência. Como apresentado em [10], operações que levam os sinais para esse plano já são utilizadas em algoritmos de imageamento. A FrFT tem atraído cada vez mais atenção para aplicações também em outras áreas como mecânica quântica e reconhecimento de padrões [11, 13], fomentando o desenvolvimento de estratégias para o cálculo, como as apresentadas em [14–18]. Em [19, 26], são detalhados procedimentos para a formação de imagens obtidas com a inserção de parâmetros de funcionamento do radar e o uso do algoritmo desenvolvido em [14].

Este artigo tem como objetivo descrever um algoritmo de entrada única para a formação de imagens a partir de sistemas SAR (matriz de dados contendo a informações recebidas pela antena do radar). Dessa forma, o processo de imageamento torna-se independente de conhecimentos *a priori* sobre funcionamento da plataforma ou radar, diferentemente do algoritmo Range-Doppler, que necessita também como entrada o centroide do Doppler [1].O algoritmo baseado em FrFT descrito em [26] necessita como entrada, além da matriz de dados, a velocidade da plataforma, a frequência da portadora e o alcance do alvo em relação à plataforma.

O trabalho é organizado em mais quatro seções:

- A Seção II apresenta brevemente a FrFT e em especial, modos como calcular digitalmente essa transformada.
- Na Seção III, o procedimento para obtenção da compressão de pulso no escopo de processamento de sinais de radar via FrFT.
- O algoritmo proposto para imageamento denominado FrRDA-RwD (do inglês *fractional range-Doppler algorithm - raw data*) é descrito na Seção IV;
- Por fim, nas Seções V e VI, são expostos, respectivamente, os resultados, comparando-os com os do método proposto em [26], e as conclusões do trabalho.

II. TRANSFORMADA DE FOURIER FRACIONÁRIA

A FrFT pode ser vista como uma generalização de Transformada de Fourier (FT, do inglês *Fourier Transform*) com um parâmetro adicional de ordem. A FrFT de um sinal $s(t)$ em

Edmar Soares da Silva, Departamento de Eletrônica e Sistemas, UFPE, Recife-PE, e-mail: edmarsoares@ieee.org; José R. de Oliveira Neto, Departamento de Engenharia Mecânica, UFPE, Recife-PE, e-mail: joserodrigues.oliveiraneto@ufpe.br Juliano Bandeira Lima, Departamento de Eletrônica e Sistemas, UFPE, Recife-PE, e-mail: juliano_bandeira@ieee.org. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq.

um ângulo α é definida como [22]

$$S_\alpha(u) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}}\exp\left(j\frac{u^2}{2}\cot\alpha\right) \\ \cdot\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp\left(j\frac{t^2}{2}\cot\alpha\right) \\ \qquad \cdot\exp(jtu\csc\alpha)\,dt, \end{array} \right\} & \text{se } \alpha \neq n\pi, \\ s(t), & \text{se } \alpha = 2n\pi, \\ s(-t), & \text{se } \alpha = 2(n+1)\pi, \end{cases} \tag{1}$$

em que $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$.

Se $\kappa_\alpha(t,u)$ for escolhido para representar o núcleo da transformada, então

$$\kappa_\alpha(t,u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}}\exp(j\frac{1}{2}\left(u^2+t^2\right)\cot\alpha \\ -jut\csc\alpha), \quad \text{se } \alpha \neq n\pi, \\ \delta(t-u), \quad \text{se } \alpha = 2n\pi, \\ \delta(t+u), \quad \text{se } \alpha = 2(n+1)\pi, \end{cases} \tag{2}$$

e, assim,

$$S_\alpha(u) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\kappa_\alpha(t,u)\,dt. \tag{3}$$

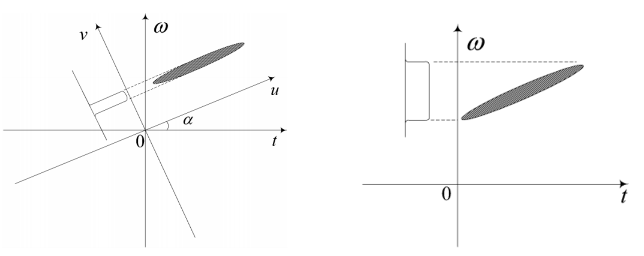
Em [8], Namias descreve a FrFT como uma rotação do sinal $s(t)$ no plano tempo-frequência. No caso de um *chirp* LFM, a rotação α promove uma concentração do espectro em um eixo de frequências rotacionado ν, diferentemente da FT, que promove um espalhamento espectral no eixo de frequências ω, como ilustrado nas Figuras 1a e 1b [22].

A. *Cálculo digital da transformada fracionária de Fourier*

Em [14], são introduzidos dois métodos para o cálculo digital da FrFT. O segundo método, que independe de integrais de Fresnel, pode ser calculado com complexidade aritmética $O(N \log N)$. Entretanto, não obedece algumas propriedades da FrFT como unitariedade, invertibilidade e aditividade de índices. Desse modo, o sinal transformado pode não ser recuperado em um cálculo inverso.

O algoritmo apresentado em [16] resulta da proposição da transformada de Fourier fracionária discreta (DFrFT, do inglês *discrete fractional Fourier transform*). Essa é computada por meio da autodecomposição do operador da transformada de Fourier discreta (DFT, do inglês *discrete Fourier transform*). A DFrFT definida obedece as seguintes propriedades: unitariedade, aditividade de índices, invertibilidade, periodicidade, simetria e paridade. Todavia, apresenta complexidade aritmética da ordem de $O(N^2)$.

Em [21, 23] a DFrFT é computada com base na autodecomposição do operador da DFT. Quando comparado a outros algoritmos de estado-da-arte para computação da DFrFT, o mencionado acima pode reduzir em até 45% o número de adições requisitadas e em 75% o de multiplicações; ela satisfaz as mesmas propriedades vistas em [16].



(a) FrFT$_\alpha$ (b) FT

Fig. 1: Representação gráfica da FrFT$_\alpha$ e FT de um sinal *chirp* LFM.

III. Compressão de Pulso

No contexto de sensoriamento remoto, a compressão de pulso é um método aplicado para minimizar a potência de pico de um sinal, além de maximizar o relação sinal-ruído (SNR, do inglês *signal-to-noise-ratio*) [1]. No processamento de sinais de radar SAR baseados em FT, a compressão de pulso é obtida por meio da convolução temporal entre o sinal *chirp* recebido pela antena e um sinal de referência na forma de filtro casado.

Considere o sinal recebido

$$s_{in}(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)\exp\left(j\pi K t^2\right) \tag{4}$$

e o filtro casado

$$h(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)\exp\left(j\pi K(-t)^2\right). \tag{5}$$

A saída do sistema

$$\begin{aligned} s_{out}(t) &= s_{in}(t) * h(t) \quad (6) \\ &\approx T\,\mathrm{sinc}(KTt), \quad (7) \end{aligned}$$

em que T representa a duração do pulso transmitido e K a taxa *chirp*.

Aplicando a FrFT definida em (1) para o caso em que $\alpha \neq n\pi$, tem-se

$$S_\alpha(u) = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}}\exp\left(j\frac{u^2}{2}\cot\alpha\right)\int_{-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t}{T}\right) \cdot\exp\left(j\pi K t^2\right)\exp\left(j\frac{t^2}{2}\cot\alpha\right)\exp(jtu\csc\alpha)\,dt. \tag{8}$$

Aplicando o princípio da fase estacionária [1] para o ângulo de rotação ótimo $\alpha_o = -\arctan(1 \setminus 2K)$ [9], tem-se

$$S_\alpha(u) = \frac{T}{\sqrt{2\pi\,|\sin\alpha|}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{T}{2}u\csc\alpha\right) \cdot\exp\left(j\frac{u^2}{2}\cot\alpha + j\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\mathrm{sign}(\sin\alpha)}{4}\right)\right). \tag{9}$$

A Equação (9) também representa uma forma comprimida do sinal *chirp*, porém sofreu uma modulação e alteração na duração do pulso.

IV. Algoritmo FrRDA-RwD

O algoritmo RDA consiste basicamente na sequência das seguintes etapas: compressão de alcance, FT em azimute, correção da migração de célula em alcance (RCMC, do inglês *range cell migration correction*), compressão de azimute e transformada inversa de Fourier (IFT, do inglês *inverse Fourier transform*) em azimute [26]. Como visto na Seção III, a compressão via (6) ocorre com a convolução temporal entre o sinal de radar e um filtro casado. A operação é transferida para o domínio da frequência, no qual um sinal de tamanho N_1 e um filtro de tamanho N_2 devem, por meio de preenchimentos com zeros, ser expandindos para o tamanho $N_1 + N_2 - 1$ a fim de evitar interferências, o que aumenta a complexidade do processamento. O RCMC pode ser feito por uma interpolação baseada em uma função *sinc* no alcance ou por uma multiplicação por um fator fase no domínio da frequência, caso a migração de célula (RCM, do inglês *range cell migration*) seja considerada invariante no alcance [1].

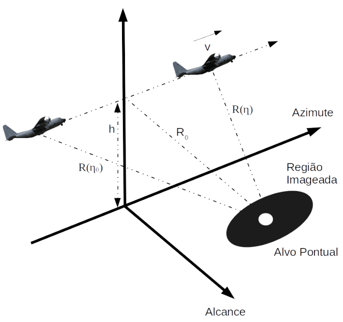


Fig. 2: Representação de uma cena SAR no modo de operação *stripmap*.

Em [26], há a simplificação do RDA, para uma cena feita no modo *stripmap* ilustrado na Figura 2, por meio do uso da FrFT tanto para a compressão quanto para o RCMC. No algoritmo denominado FrRDA, a RCMC ocorre simultaneamente à compressão em azimute. Entretanto, o processamento proposto é dependente de conhecimentos de parâmetros de funcionamento do radar como a mínima distância entre o alvo imageado e a plataforma e a velocidade dessa.

O uso proposto em [26] da FrFT no algoritmo RDA pode ser ampliado para que a única entrada necessária seja a matriz de dados brutos (do inglês *Raw Data*) resultante da equação de um radar em banda-base de um sistema SAR [1], isto é,

$$\begin{aligned} s_0(t,\eta) &= A_0 \omega_r \left(t - \frac{2R(\eta)}{c} \right) \omega_a (\eta - \eta_0) \\ &\cdot \exp\left(-j4\pi f_0 \frac{R(\eta)}{c} \right) \exp\left(j\pi K_r \left(t - \frac{2R(\eta)}{c} \right)^2 \right), \quad (10) \end{aligned}$$

em que t é o tempo no alcance, η é o tempo no azimute, A_0 é uma magnitude para o alvo, f_0 é a frequência da portadora, c é a velocidade da luz no meio, ω_r é um envelope retangular para o alcance e ω_a é um envelope retangular para o azimute.

O algoritmo RDA baseada nos dados brutos proposto neste trabalho, aqui chamado de FrRDA-RwD, é caracterizado pela compressão de pulso, como em (9), por meio da representação compacta do sinal envolvido na etapa em que se faz necessário o procedimento de compressão. Como mostrado em [27], a representação compacta de um sinal *chirp* em um domínio fracionário pode ser obtida pela minimização da norma ℓ_1 do sinal transformado. Os ângulos ótimos para a compressão em azimute, O RCMC e a compressão em alcance são obtidos por tal minimização em um algoritmo de busca descrito em [28].

A. FrRDA-RwD

O FrRDA percorre as mesmas etapas apresentadas em [26]: FT em alcance, FrFT em azimute, IFT em alcance, FrFT em alcance e mapeamento no tempo de alcance e mapeamento de azimute. A estratégia apresentada em [14] é a utilizada para o cálculo da FrFT, uma vez que é utilizada em [12, 26].

1) FT em alcance: aplicando a FT nos dados na direção do alcance em (10), tem-se[1]

$$\begin{aligned} s_1(f_t,\eta) &= A_0 \omega_r \left(\frac{f_t}{K_r} \right) \omega_a (\eta - \eta_0) \\ &\cdot \exp\left(-j\pi \frac{f_t^2}{K_r} \right) \exp\left(-j4\pi (f_0 + f_t) \frac{R_0}{c} \right) \\ &\cdot \exp\left(-j \frac{2\pi v^2}{R_0 c} (f_0 + f_t)(\eta - \eta_0)^2 \right), \quad (11) \end{aligned}$$

em que f_t representa a frequência dos sinal no alcance.

2) FrFT em azimute: (12) representa a soma da taxa LFM em azimute e a taxa RCM respectivamente[1].

$$K_a' = -\frac{2\pi v^2 (f_0 + f_t)}{R_0 c} = -\frac{2\pi f_0 v^2}{c R_0} - \frac{2\pi f_t v^2}{c R_0}. \quad (12)$$

Para a execução da compressão em azimute e do RCMR, basta eliminar K_a' por meio de uma FrFT para um ângulo que forneça a representação mais compacta de (11). Efetuada essa operação, tem-se

$$\begin{aligned} S_2(f_t,v) &= A_2 \omega_r \left(\frac{f_t}{K_r} \right) \operatorname{sinc}\left(\frac{T_a}{2\pi \sin\beta} (v - \eta_0 \cos\beta) \right) \\ &\cdot \exp\left(-j4\pi (f_0 + f_t) \frac{R_0}{c} \right) \exp\left(-j\pi \frac{f_t^2}{K_r} \right). \quad (13) \end{aligned}$$

3) IFT em alcance: o sinal S_2 está representado no domínio das frequências de alcance pelo domínio fracionário de máxima compactação do azimute. Para a compressão em alcance, é preciso que o sinal esteja no domínio do tempo nessa direção. Desse modo, é empregada uma IFT, o que leva a[1]

$$\begin{aligned} S_3(t,v) &= A_2 \omega_r \left(t - \frac{2R_0}{c} \right) \operatorname{sinc}\left(\frac{T_a}{2\pi \sin\beta} (v - \eta_0 \cos\beta) \right) \\ &\cdot \exp\left(-j4\pi f_0 \frac{R_0}{c} \right) \exp\left(j\pi K_r \left(t - \frac{2R_0}{c} \right)^2 \right). \quad (14) \end{aligned}$$

4) FrFT em alcance: do mesmo modo que ocorreu para S_2, é empregada a FrFT em S_3, resultado em

$$\begin{aligned} S_4(u,v) &= A_4 \operatorname{sinc}\left(\frac{T_r}{2\pi \sin(\alpha)} \left(u - \frac{2R_0}{c} \cos(\alpha) \right) \right) \\ &\cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{T_a}{2\pi \sin(\beta)} (v - \eta_0 \cos(\beta)) \right) \\ &\cdot \exp\left(-j4\pi f_0 \frac{R_0}{c} \right), \quad (15) \end{aligned}$$

em que u representa o domínio fracionário de máxima compactação no alcance.

[1]Os subscritos r e a em T_r, T_a, K_r e K_a são relacionados, respectivamente, ao alcance e ao azimute.

TABELA I: Características do radar de abertura sintética simulado para imageamento de um alvo pontual.

Parâmetro	Valor do parâmetro
PRF	$600\,Hz$ - Banda C
Velocidade da plataforma	$200\,ms^{-1}$
Frequência de portadora	$4{,}5\,GHz$ - Banda G
Comprimento da antena	$60\,cm$
Distância para o alvo	$20\,km$
Duração do pulso	$2{,}5\,\mu s$
Largura de banda do sinal	$1\,GHz$ - Banda D

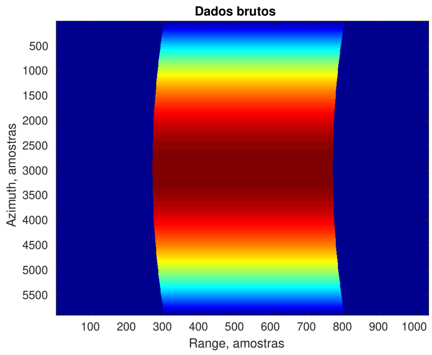


Fig. 3: Dados brutos para SAR descrito na Tabela I iluminando 1 (um) alvo pontual.

5) Mapeamento em tempo de alcance e mapeamento em azimute: o sinal S_4 está comprimido tanto em alcance quanto em azimute. A última etapa do algoritmo visa realizar o mapeamento $u \mapsto \cos(\alpha)$ e $v \mapsto \cos(\beta)$, em que α representa o ângulo ótimo da compressão em alcance e β o da compressão em azimute; disso, obtém-se

$$S_5(t,\eta) = A_4 \operatorname{sinc}\left(T_r K_r \left(t - \frac{2R_0}{c}\right)\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(T_a K_a' \left(\eta - \eta_0\right)\right) \exp\left(-j4\pi f_0 \frac{R_0}{c}\right). \tag{16}$$

V. Resultados

Para a validação do algoritmo FrRDA-RwD, gerou-se dados brutos de um sistema SAR que ilumina um alvo pontual com as características apresentadas na Tabela I. O procedimento escolhido para o cálculo da FrFT fora o visto em [14], uma vez que oferece o menor tempo de execução em uma unidade de computação menos robusta e, por ora, não há necessidade de realizar transformadas inversas.

A matriz da dados brutos resultante possui dimensões (5903×1034). A representação dessa matriz de sinais *chirp* como imagem é ilustrada na Figura 3.

A Figura 4 apresenta a imagem do alvo pontual obtida pela aplicação do método descrito em [26], enquanto a Figura 5 o resultado do algoritmo proposto neste artigo. Visualmente, a última encontra-se bem focalizada e dentro do mesmo intervalo de amostras da primeira. Como o método de busca para os ângulos de representações mais compactas depende de parâmetros de inicialização, computou-se o erro quadrático médio entre os ângulos previstos teoricamente e aqueles

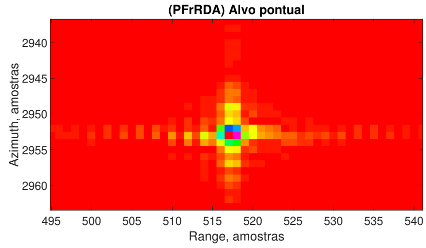


Fig. 4: Imagem de alvo pontual obtida pelo método descrito em [26].

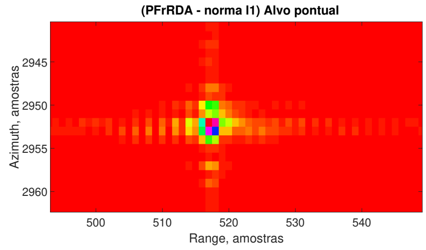


Fig. 5: Imagem de alvo pontual obtida por FrRDA-RwD.

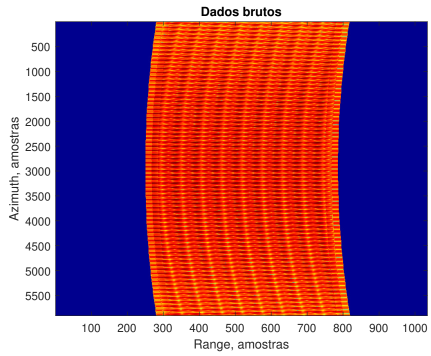


Fig. 6: Dados brutos para SAR descrito na I iluminando 9 (nove) alvos pontuais.

encontrados pelo FrRDA-RwD. Para as transformadas em azimute, o erro é da ordem de 10^{-6}, enquanto no alcance, de 10^{-4}. Dessa forma, os ângulos teóricos e determinados pelo FrRDA-RwD são aproximadamente iguais.

Aplicou-se o mesmo procedimento para nove alvos pontuais dispostos em uma grade (3×3), representados pelos dados brutos ilustrados como imagem na Figura 6. Visualmente, o resultado obtido por meio da FrRDA-RwD (Figura 8) se aproxima muito daquele descrito por [26] (Figura 8). Quanto aos erros quadráticos médios, em azimutem esse é de ordem de 10^{-5} e, em alcance, 10^{-3}. Novamente, para essa simulação, os ângulos teóricos e determinados pelo FrRDA-RwD são aproximadamente iguais.

VI. Conclusões

Neste artigo, foi introduzido um algoritmo de imageamento para dados provenientes de radares do tipo SAR. A abordagem adotada usufrui da capacidade de representação compacta de um sinal *chirp* em um domínio fracionário obtido via FrFT para ter como entrada apenas a matriz de dados brutos. O algoritmo proposto (FrRDA-RwD) tem grande potencial de

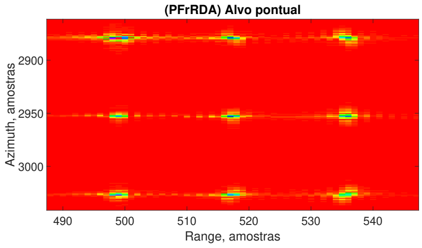


Fig. 7: Imagem de 9 (nove) alvos pontuais obtida pelo método descrito em [26].

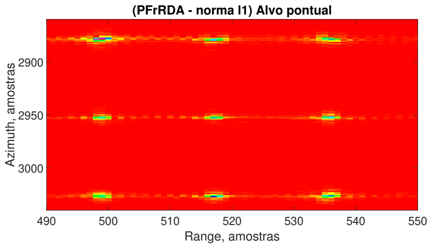


Fig. 8: Imagem de 9 (nove) alvos pontuais obtida por FrRDA-RwD.

aplicação em outros cenários envolvendo SAR. Atualmente, tem sido investigado no contexto da indicação de alvos móveis terrestres (GMTI, do inglês *ground noving target indication*) em combinação com transformadas de complexidade aritmética reduzida [23].

Referências

[1] I. G. Cumming e F. H. Wong, *Digital Processing of Synthetic Aperture Radar Data: Algorithms and Implementation*. Boston: Artech House Print on Demand, 2005.

[2] C. Guaragnella e T. D'Orazio, *A Data-Driven Approach to SAR Data-Focusing*. Sensors (Basel), vol. 19, nº 7, Abril 2019.

[3] C. Guaragnella e T. D'Orazio, *B.SAR: blind SAR data focusing*. Image and Signal Processing for Remote Sensing XXIV, vol. 10789, p. 1078912, Outubro 2018.

[4] L. R. Varshney e D. Thomas, *Sidelobe reduction for matched filter range processing*. Proceedings of the 2003 IEEE Radar Conference (Cat. No. 03CH37474), p. 446–451, Maio 2003.

[5] K. Lasko, *Incorporating Sentinel-1 SAR imagery with the MODIS MCD64A1 burned area product to improve burn date estimates and reduce burn date uncertainty in wildland fire mapping*. Geocarto International, vol. 0, nº 0, p. 1–21, Abril 2019.

[6] M. Jagdish, *Advance synthetic aperture radar images for characterization of oil spills disaster in ocean using Daubechies analysis*. J. Phys.: Conf. Ser., vol. 1432, p. 012069, Janeiro 2020.

[7] C. Wu, *A digital system to produce imagery from SAR data*. Systems Design Driven by Sensors, 0 vols., American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1976.

[8] V. Namias, *The Fractional Order Fourier Transform and its Application to Quantum Mechanics*. IMA J Appl Math, vol. 25, no. 3, pp. 241–265, Março 1980.

[9] C. Capus and K. Brown, *Short-time fractional Fourier methods for the time-frequency representation of chirp signals*. The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 113, no. 6, pp. 3253–3263, Maio 2003.

[10] Chen, Victor C., and Hao Ling. *Time-frequency transforms for radar imaging and signal analysis*. Artech house, 2002.

[11] C.-H. Lv, H.-Y. Fan, and D.-W. Li, *From fractional Fourier transformation to quantum mechanical fractional squeezing transformation*. Chinese Phys. B, vol. 24, no. 2, p. 020301, Fevereiro 2015.

[12] Chiu, Shen. *Application of fractional Fourier transform to moving target indication via along-track interferometry*. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, vol. 20, p. 980786, Fevereiro 2005.

[13] W. Jin and Y. Zhang, *Color pattern recognition based on the joint fractional Fourier transform correlator*. Chin. Opt. Lett., COL, vol. 5, no. 11, pp. 628–631, Novembro 2007.

[14] H.M. Ozaktas, M.A. Kutay, and G. Bozdagi. *Digital computation of the fractional Fourier transform*. IEEE Trans. Sig. Proc., 44:2141–2150, 1996.

[15] C. Candan, M.A. Kutay, and H.M. Ozaktas. *The discrete Fractional Fourier Transform*. IEEE Trans. Sig. Proc., 48:1329–1337, 2000.

[16] S.-C. Pei, M.-H. Yeh, and C.-C. Tseng. Discrete fractional Fourier-transform based on orthogonal projections. IEEE Trans. Sig. Proc., 47(5):1335–1348, 1999.

[17] R. Tao, G. Liang, X. Zhao. *An efficient FPGA-based implementation of fractional Fourier transform algorithm*. J. Signal Processing Systems, 60(1):47–58, 2010.

[18] A. Bultheel. *A two-phase implementation of the fractional Fourier transform*. Report TW 588, Dept. Computer Science, K.U.Leuven, Março 2011.

[19] M. G. El-Mashed, O. Zahran, M. I. Dessouky, M. El-Kordy, and F. E. Abd El-Samie, *Synthetic aperture radar imaging with fractional Fourier transform and channel equalization*. Digital Signal Processing, vol. 23, no. 1, pp. 151–175, Janeiro 2013.

[20] E. Raei, M. Modarres-Hashemi, and M. R. Bhavani Shankar, R*ange Cell Migration Correction by Fractional Fourier Transform in Synthetic Aperture Radars*. 2019 20th International Radar Symposium (IRS), pp. 1–10, Junho 2019.

[21] J. R. de Oliveira Neto e J. B. Lima, *Cálculo da Transformada Discreta de Fourier Fracionária com Complexidade Aritmética Reduzida*. Anais de XXXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais, 2019.

[22] Hong-Bo Sun, Guo-Sui Liu, Hong Gu, and Wei-Min Su, *Application of the fractional Fourier transform to moving target detection in airborne SAR*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 38, no. 4, pp. 1416–1424, Outubro 2002..

[23] J. R. de Oliveira Neto and J. B. Lima, *Discrete Fractional Fourier Transforms Based on Closed-Form Hermite–Gaussian-Like DFT Eigenvectors*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 65, no. 23, pp. 6171–6184, Dezembro. 2017.

[24] A. Bultheel and H. E. Martınez Sulbaran, *Computation of the fractional Fourier transform*. Applied and Computational Harmonic Analysis, vol. 16, no. 3, pp. 182–202, Maio 2004.

[25] D. Majorkowska-Mech and A. Cariow, *A Low-Complexity Approach to Computation of the Discrete Fractional Fourier Transform*. Circuits Syst Signal Process, vol. 36, no. 10, pp. 4118–4144, Outubro 2017.

[26] E. Raei, M. Modarres-Hashemi, e M. R. Bhavani Shankar, *Range Cell Migration Correction by Fractional Fourier Transform in Synthetic Aperture Radars*". 2019 20th International Radar Symposium (IRS), p. 1–10, Junho 2019.

[27] A. Serbes, *Compact Fractional Fourier Domains*. IEEE Signal Processing Letters, vol. 24, nº 4, p. 427–431, Abril 2017.

[28] L. Zheng e D. Shi, *Maximum Amplitude Method for Estimating Compact Fractional Fourier Domain*. IEEE Signal Processing Letters, vol. 17, nº 3, p. 293–296, Março 2010.