

Estimação de Imagens Acústicas por Orthogonal Matching Pursuit Acelerada por Produtos de Schur-Hadamard e pela Transformada de Arranjo de Kronecker

Paulo O. M. dos Santos e Vítor H. Nascimento

Resumo—A estimação de imagens acústicas possui elevado custo computacional, especialmente para arranjos com muitos microfones e alta resolução, assim as aplicações precisam empregar métodos acelerados. Um desses métodos é a transformada de arranjo de Kronecker (KAT) que permite uma grande redução na quantidade de cálculos usando decomposição de matrizes por produtos de Kronecker para arranjos bidimensionais de geometria separável. Apresentamos uma nova forma de estimar imagens baseada em soluções de mínimos quadrados aceleradas por produtos de Schur-Hadamard. Além disso, combinamos a KAT e o método de Schur-Hadamard para acelerar ainda mais a estimação de imagens por *orthogonal matching pursuit* (OMP).

Palavras-Chave—imageamento acústico, transformada de arranjo de Kronecker, *orthogonal matching pursuit*, produto de Schur-Hadamard, processamento de sinais com arranjos

Abstract—Acoustic image estimation has a high computational cost, specially for arrays with a large number of microphones and high resolution, thus applications need accelerated methods. One of such methods is the Kronecker Array Transform (KAT) which allows for a great reduction in the number of computations by using matrix decompositions through Kronecker products for planar arrays of separable geometry. We present a new way to estimate acoustic images based on least-squares solutions accelerated by Schur-Hadamard products. Furthermore, we combined the KAT and the Schur-Hadamard method to accelerate even more the estimation of acoustic images by *orthogonal matching pursuit* (OMP).

Keywords—acoustic imaging, Kronecker array transform, *orthogonal matching pursuit*, Schur-Hadamard product, array signal processing

I. INTRODUÇÃO

Uma imagem acústica é um mapa de intensidades sonoras em função da direção de chegada obtida por meio de processamento de sinais com arranjos de microfones [1].

Algoritmos usados para estimar imagens acústicas [2], [3], [4] possuem uma alta complexidade computacional que rapidamente se torna proibitiva à medida que o número de microfones no arranjo e o tamanho da imagem aumentam.

A transformada de arranjo de Kronecker (KAT) foi proposta em [3] para acelerar a estimação de imagens acústicas com

Paulo O. M. dos Santos, Departamento de Sistemas Eletrônicos, Universidade de São Paulo, São Paulo, e-mail: paulooms@usp.br; Vítor H. Nascimento, Departamento de Sistemas Eletrônicos, Universidade de São Paulo, São Paulo, e-mail: vitnasci@usp.br. Este trabalho foi parcialmente apoiado pela FAPESP, processos 2017/22226-1 e 2017/20161-0, e pelo CNPq processo 304714/2018-6.

uma geometria específica (separável) que permitia grande redução no custo computacional de produtos matriz-vetor.

Em [5], o autor propõe uma ideia similar à KAT para reduzir a complexidade computacional de um problema de mínimos quadrados associado a arranjos de sensores para aplicações de radar e sonar. Enquanto a KAT explora a estrutura do arranjo para reduzir o custo de operações matriz-vetor, [5] explora a relação entre os produtos de Kronecker e de Schur-Hadamard para obter uma redução significativa na quantidade de operações aritméticas necessárias para resolver um problema de mínimos quadrados.

Neste trabalho apresentamos três contribuições principais. Primeiramente desenvolvemos uma nova maneira de estimar imagens acústicas estendendo o método proposto em [5]. Entretanto, o algoritmo resultante requer estimação prévia da direção de chegada das fontes. No caso de uma distribuição esparsa de fontes, algoritmos de estimação esparsa como *orthogonal matching pursuit* (OMP) efetivamente estimam direção de chegada a cada iteração, então, ao invés de lidar com estimação de direção de chegada, aplicamos o método estendido diretamente a OMP. Além disso, aplicamos a KAT ao algoritmo de OMP em conjunto com o método estendido para obter uma maior redução do custo computacional. Também aplicamos a KAT em conjunto com uma implementação rápida de OMP baseada em decomposição de Cholesky [6] que ainda não havia sido utilizada na aceleração de cálculo de imagens acústicas conseguindo um ganho significativo quando comparado com o algoritmo que usa apenas a KAT.

A seção II trata do modelo do sinal usado e introduz as equações usadas na estimação de imagens acústicas. A seção III usa o modelo derivado na seção anterior para derivar a KAT. Na seção IV, o novo método de estimação de imagens acústicas por mínimos quadrados com produtos de Schur-Hadamard é apresentado. A seção V junta os dois conceitos de Schur-Hadamard e KAT e os aplica ao algoritmo de OMP. Por fim, na seção VI, são mostradas simulações que demonstram as vantagens da nova implementação.

II. MODELO DE SINAL

Temos um arranjo planar de sensores com N microfones dispostos numa grade retangular $N_x \times N_y$ localizados nas coordenadas $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N-1} \in \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{\ell+iN_y} = [p_x(\ell) \quad p_y(i) \quad 0]^T, \quad (1)$$

em que $0 \leq \ell < N_x$, $0 \leq i < N_y$.

Considere que um campo sonoro arbitrário que queremos estimar está presente e pode ser modelado pela superposição de $M = M_x M_y$ fontes pontuais descorrelacionadas com direções de visada $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{M-1}$ em campo distante [2], [3]. As direções de visada são arranjadas em uma grade retangular $M_x \times M_y$ tal que

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{u}_{q+rM_y} = \begin{bmatrix} u_x(q) & u_y(r) & \sqrt{1 - u_x^2(q) - u_y^2(r)} \end{bmatrix}^T, \quad (2)$$

em que $-1 \leq u_x(q), u_y(r) \leq 1$, $0 \leq q < M_x$, $0 \leq r < M_y$.

O sinal amostrado pelo arranjo é segmentado em quadros de K amostras e tomamos a FFT (*fast Fourier transform*) de cada quadro. O vetor de saída do arranjo para uma única frequência ω_k em um quadro é

$$\mathbf{x}(\omega_k) = \mathbf{V}(\omega_k)\mathbf{f}(\omega_k) + \boldsymbol{\eta}(\omega_k), \quad 0 \leq k < K, \quad (3)$$

em que $\mathbf{f}(\omega_k) = [f_0(\omega_k) \ \dots \ f_{M-1}(\omega_k)]^T$ é o vetor dos sinais das fontes, $\boldsymbol{\eta}(\omega_k)$ é ruído aditivo com média zero e variância σ_n^2 e $\mathbf{V}(\omega_k) = [\mathbf{v}(\mathbf{u}_0, \omega_k) \ \dots \ \mathbf{v}(\mathbf{u}_{M-1}, \omega_k)] \in \mathbb{C}^{N \times M}$ é a matriz diretora do arranjo. O vetor diretor do arranjo em campo distante para a fonte com direção de visada \mathbf{u}_m é $\mathbf{v}(\mathbf{u}_m, \omega_k) = [e^{j\omega_k \mathbf{u}_m^T \mathbf{p}_0/c} \ \dots \ e^{j\omega_k \mathbf{u}_m^T \mathbf{p}_{N-1}/c}]^T$, em que c é a velocidade do som [7].

Seja $\mathbf{S}(\omega_k) = E\{\mathbf{x}(\omega_k)\mathbf{x}^H(\omega_k)\}$ a matriz espectral do arranjo, então, de (3),

$$\mathbf{S}(\omega_k) = \mathbf{V}(\omega_k)E\{\mathbf{f}(\omega_k)\mathbf{f}^H(\omega_k)\}\mathbf{V}^H(\omega_k) + \sigma_n^2\mathbf{I}, \quad (4)$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade. Como assumimos que as fontes são descorrelacionadas, então $\mathbf{Y}(\omega_k) = E\{\mathbf{f}(\omega_k)\mathbf{f}^H(\omega_k)\}$ é uma matriz diagonal e podemos escrever

$$\mathbf{S} = \sum_{m=1}^M \mathbf{v}(\mathbf{u}_m)\mathbf{v}^H(\mathbf{u}_m)y_m + \sigma_n^2\mathbf{I} = \mathbf{V}\mathbf{Y}\mathbf{V}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}, \quad (5)$$

em que não escrevemos a variável de frequência para simplificar a notação. Note que os elementos da diagonal de \mathbf{Y} são da forma $y_m = E\{|f_m(\omega_k)|^2\}$ e representam a potência emitida por cada fonte.

Existem muitas técnicas para estimar \mathbf{f} usando \mathbf{x} diretamente ou estimar \mathbf{Y} depois de medir \mathbf{S} . Uma característica comum dessas técnicas é o fato de que produtos matriz-vetor envolvendo \mathbf{V} e outras matrizes derivadas de \mathbf{V} são as operações mais custosas dos algoritmos [3], [4], [8]. Na próxima seção, discutiremos a KAT [8], [3], que é baseada na decomposição em produtos de Kronecker da matriz \mathbf{V} e pode ser usada para acelerar os produtos matriz-vetor requeridos para estimar imagens acústicas.

III. TRANSFORMADA DE ARRANJO DE KRONECKER

Quando os sensores do arranjo são posicionados em um arranjo retangular de acordo com (1) (caso esse em que diz-se que o arranjo possui geometria *separável*) e as direções de visada também são tomadas em uma grade retangular, conforme indicado por (2), então a matriz \mathbf{V} pode ser escrita como um produto de Kronecker de duas matrizes menores [8], [3].

O elemento (n, m) de \mathbf{V} é

$$\begin{aligned} [\mathbf{V}]_{n,m} &= [\mathbf{V}]_{\ell+iN_y, q+rM_y} \\ &= e^{j\omega_k u_x(q)p_x(\ell)/c} \times e^{j\omega_k u_y(r)p_y(i)/c}. \end{aligned} \quad (6)$$

Se definirmos duas matrizes diretoras \mathbf{V}_x e \mathbf{V}_y cujos elementos são

$$[\mathbf{V}_x]_{\ell,q} = e^{j\omega_k u_x(q)p_x(\ell)/c}, \quad [\mathbf{V}_y]_{i,r} = e^{j\omega_k u_y(r)p_y(i)/c}, \quad (7)$$

em que \mathbf{V}_x é $N_x \times M_x$ e \mathbf{V}_y é $N_y \times M_y$, então $\mathbf{V} = \mathbf{V}_x \otimes \mathbf{V}_y$, em que \otimes denota o produto de Kronecker definido a seguir.

Definição 1: O produto de Kronecker, também denominado produto direto e produto tensorial de matrizes, de $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in M_{p,q}(\mathbb{F})$ denotado por $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ é definido como a matriz de bloco

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in M_{mp,nq}(\mathbb{F}),$$

em que $M_{m,n}(\mathbb{F})$ é o espaço de matrizes $m \times n$ definido sobre o corpo \mathbb{F} . Em geral, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} .

Ignorando o ruído em (5), temos que

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{Y}\mathbf{V}^H. \quad (8)$$

Como \mathbf{Y} é diagonal, podemos usar a identidade [5]

$$\text{vec}\{\mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{A}^T\} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \text{vecd}\{\mathbf{P}\}, \quad (9)$$

em que \mathbf{P} é uma matriz diagonal com diagonal $\text{vecd}\{\mathbf{P}\}$ e \odot denota o produto de Khatri-Rao, definido a seguir, para chegar a

$$\mathbf{s} = \text{vec}\{\mathbf{S}\} = (\mathbf{V}^* \odot \mathbf{V}) \text{vecd}\{\mathbf{Y}\} = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad (10)$$

em que $\mathbf{y} = \text{vecd}\{\mathbf{Y}\} = [y_0 \ \dots \ y_{M-1}]^T$.

Definição 2: Considere as matrizes \mathbf{A} de ordem $p \times r$ e \mathbf{B} de ordem $q \times r$; sejam $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ e $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ vetores que correspondem às colunas de \mathbf{A} e \mathbf{B} , respectivamente. O produto de Khatri-Rao é definido como a matriz de bloco

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = [\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_r \otimes \mathbf{b}_r]$$

que é uma matriz de ordem $pq \times r$.

Agora substituímos $\mathbf{V} = \mathbf{V}_x \otimes \mathbf{V}_y$ em $\mathbf{A} = (\mathbf{V}^* \odot \mathbf{V})$ e aplicamos a identidade [8]

$$(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) \odot (\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}) = \Xi [(\mathbf{E} \odot \mathbf{G}) \otimes (\mathbf{F} \odot \mathbf{H})], \quad (11)$$

em que Ξ é uma matriz de permutação obtida explorando a propriedade de permutação de produtos de Kronecker [9], então nos sobra a expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{V}_x \otimes \mathbf{V}_y)^* \odot (\mathbf{V}_x \otimes \mathbf{V}_y) \\ &= \Xi [(\mathbf{V}_x^* \odot \mathbf{V}_x) \otimes (\mathbf{V}_y^* \odot \mathbf{V}_y)] = \Xi (\tilde{\mathbf{V}}_x \otimes \tilde{\mathbf{V}}_y), \end{aligned} \quad (12)$$

em que $\tilde{\mathbf{V}}_x \triangleq \mathbf{V}_x^* \odot \mathbf{V}_x$ and $\tilde{\mathbf{V}}_y \triangleq \mathbf{V}_y^* \odot \mathbf{V}_y$.

Finalmente, podemos reescrever (10) como

$$\mathbf{s} = \Xi (\tilde{\mathbf{V}}_x \otimes \tilde{\mathbf{V}}_y) \mathbf{y} \triangleq \Xi \text{vec}\{\mathbf{Z}\} = \Xi \mathbf{z} \quad (13)$$

e aplicar a identidade [10]

$$\text{vec}\{\mathbf{F}\mathbf{Q}\mathbf{E}^T\} = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) \text{vec}\{\mathbf{Q}\} \quad (14)$$

a \mathbf{z} para chegar a

$$\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{V}}_y \mathbf{Y} \tilde{\mathbf{V}}_x^T, \quad \mathbf{s} = \mathbf{\Xi} \mathbf{z}. \quad (15)$$

Se assumirmos que $M_x = M_y = \sqrt{M}$ e $N_x = N_y = \sqrt{N}$, o custo para calcular (15) é $\sqrt{MN} + MN$ *multiply-and-accumulate operations* (MACs) complexas e é muito menor que o custo para calcular (10), que requer MN^2 MACs. (15) é a chamada *cross spectral matrix* (CSM) KAT direta e pode ser usada para calcular \mathbf{S} quando temos \mathbf{Y} . Algoritmos estado-da-arte para estimação de imagens acústicas como DAMAS2 [2] são baseados em (possivelmente repetidas) aplicações de produtos matriz-vetor do tipo $\mathbf{A}\hat{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{A}^H\hat{\mathbf{s}}$ para aproximações intermediárias $\hat{\mathbf{y}}$ and $\hat{\mathbf{s}}$, e podemos fazer esses cálculos eficientemente usando (15) e a CSM KAT adjunta:

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Xi}^T \mathbf{s}, \quad \hat{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{V}}_y^H \mathbf{Z} \tilde{\mathbf{V}}_x^*. \quad (16)$$

A derivação da CSM KAT adjunta é análoga à da CSM KAT direta.

IV. ESTIMAÇÃO DE IMAGENS ACÚSTICAS POR MÍNIMOS QUADRADOS ACELERADOS POR PRODUTOS DE SCHUR-HADAMARD

Agora estendemos o método proposto por [5], originalmente para aplicações de radar e sonar, para estimação de imagens acústicas.

Seja L o número total de fontes pontuais com potência diferente de zero e assumamos que as respectivas direções de chegada são conhecidas. Também assumiremos que $L < N^2$, isto é, o número de fontes é menor que o quadrado do número de microfones do arranjo.

Como \mathbf{Y} é diagonal, (8) é um sistema sobredeterminado, o que sugere resolver o problema de mínimos quadrados [5]

$$\hat{\mathbf{Y}} = \arg \min_{\mathbf{Y}} \|\mathbf{S} - \mathbf{V}\mathbf{Y}(\mathbf{V}^*)^T\|_F^2 \quad (17)$$

sujeito à restrição de que \mathbf{Y} é diagonal.

Podemos escrever (8) em uma forma reduzida quando \mathbf{Y} possui diagonal esparsa com apenas L fontes com potência diferente de zero:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{V}\mathbf{Y}\mathbf{V}^H = \sum_{m=0}^{M-1} y_m \mathbf{v}(\mathbf{u}_m) \mathbf{v}^H(\mathbf{u}_m) \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} y_l \mathbf{v}(\mathbf{u}_l) \mathbf{v}^H(\mathbf{u}_l), \end{aligned} \quad (18)$$

em que assumimos sem perda de generalidade que as fontes diferentes de zero correspondem às primeiras L direções. Se definirmos

$$\tilde{\mathbf{V}} = [\mathbf{v}(\mathbf{u}_0) \quad \cdots \quad \mathbf{v}(\mathbf{u}_{L-1})], \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \text{diag}([y_0 \quad \cdots \quad y_{L-1}]), \quad (20)$$

em que as direções \mathbf{u}_l correspondem às fontes, então temos que

$$\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{Y}}(\tilde{\mathbf{V}}^*)^T \quad (21)$$

e o problema de estimar a imagem acústica seria

$$\hat{\mathbf{Y}} = \arg \min_{\mathbf{Y}} \|\mathbf{S} - \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{Y}(\tilde{\mathbf{V}}^*)^T\|_F^2, \quad (22)$$

em que $\tilde{\mathbf{Y}}$ é restrita a ser uma matriz diagonal.

O problema de otimização (22) pode ser escrito em duas novas e equivalentes formas. A primeira é

$$\min_{\tilde{\mathbf{Y}}} \|\text{vec}\{\mathbf{S}\} - (\tilde{\mathbf{V}}^* \otimes \tilde{\mathbf{V}}) \text{vec}\{\tilde{\mathbf{Y}}\}\|_2^2, \quad (23)$$

com solução de forma fechada dada por

$$\text{vec}\{\tilde{\mathbf{Y}}\} = [(\tilde{\mathbf{V}}^* \otimes \tilde{\mathbf{V}})^H (\tilde{\mathbf{V}}^* \otimes \tilde{\mathbf{V}})]^{-1} (\tilde{\mathbf{V}}^* \otimes \tilde{\mathbf{V}}) \text{vec}\{\mathbf{S}\}. \quad (24)$$

Como a matriz $\tilde{\mathbf{Y}}$ é diagonal, resolver esse problema é altamente ineficiente devido ao fato de que a maioria dos elementos de $\tilde{\mathbf{Y}}$ é igual a zero, isto é, a matriz é esparsa.

A segunda maneira de reescrever o problema (22) é

$$\min_{\text{vecd}\{\tilde{\mathbf{Y}}\}} \|\text{vec}\{\mathbf{S}\} - (\tilde{\mathbf{V}}^* \odot \tilde{\mathbf{V}}) \text{vecd}\{\tilde{\mathbf{Y}}\}\|_2^2 \quad (25)$$

com solução de forma fechada

$$\text{vecd}\{\tilde{\mathbf{Y}}\} = [(\tilde{\mathbf{V}}^* \odot \tilde{\mathbf{V}})^H (\tilde{\mathbf{V}}^* \odot \tilde{\mathbf{V}})]^{-1} (\tilde{\mathbf{V}}^* \odot \tilde{\mathbf{V}})^H \text{vec}\{\mathbf{S}\}. \quad (26)$$

As matrizes que aparecem nas duas maneiras de reescrever o problema (22) são grandes se comparadas à matriz $\tilde{\mathbf{V}}$, com a segunda maneira sendo mais eficiente que a primeira em termos dos números de operações aritméticas requeridos por cada uma. A segunda forma pode ser implementada com produtos de Schur-Hadamard resultando em uma redução maior ainda de custo computacional. Para alcançar essa redução, exploramos a relação [5]

$$(\mathbf{E} \odot \mathbf{F})^H (\mathbf{E} \odot \mathbf{F}) = (\mathbf{E}^H \mathbf{E}) \circ (\mathbf{F}^H \mathbf{F}), \quad (27)$$

em que \circ denota o produto de Schur-Hadamard, definido como a matriz cujos elementos correspondem ao produto elemento a elemento de duas matrizes de mesma dimensão. A solução mais eficiente até agora é

$$\text{vecd}\{\tilde{\mathbf{Y}}\} = [((\tilde{\mathbf{V}}^*)^H \tilde{\mathbf{V}}^*) \circ (\tilde{\mathbf{V}}^H \tilde{\mathbf{V}})]^{-1} \text{vecd}\{\tilde{\mathbf{V}}^H \mathbf{S} \tilde{\mathbf{V}}\}, \quad (28)$$

em que usamos o fato de que

$$\text{vecd}\{\mathbf{F}^T \mathbf{Q} \mathbf{E}\} = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{F})^T \text{vec}\{\mathbf{Q}\}. \quad (29)$$

As provas dessas relações podem ser encontradas em [5].

O custo computacional é menor, já que as matrizes envolvidas são de dimensão reduzida: o cálculo do lado esquerdo de (27) requer $N^2L + N^2L(L+1)/2$ MACs complexas; por outro lado, o cálculo do lado direito da mesma expressão requer apenas $(2N+1)L(L+1)/2$ MACs complexas. Esses valores para o número de MACs consideram a simetria das matrizes que possuem o formato $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$: para aplicações com arranjos de sensores, esse tipo de matriz geralmente é positivo definido [5]; e as matrizes positivas definidas são fechadas sob o produto de Schur-Hadamard [11].

Para resolver (26), precisamos de $N^2L + N^2L(L+1)/2 + \mathcal{O}(L^3) + L^2N^2 + LN^2$ MACs complexas, em que o termo $\mathcal{O}(L^3)$ corresponde à inversão de matriz que aparece na equação. No entanto, o cálculo de (28) requer $(2N+1)L(L+1)/2 + \mathcal{O}(L^3) + LN^2 + L^2N + L^2$, em que $\mathcal{O}(L^3)$ de novo representa a inversão matricial. Temos uma redução de $\mathcal{O}(L^3) + \mathcal{O}(N^2L^2)$ para $\mathcal{O}(L^3) + \mathcal{O}(LN^2)$.

Nos resta a decisão de como estimar a direção de chegada para as L fontes. MUSIC [12] e ESPRIT [13] estão

entre os métodos mais convencionais para estimar direção de chegada e ambos os métodos possuem maior resolução que um *beamformer* convencional, porém apresentam desempenho baixo sob condições de baixo SNR, poucos *snapshots* e fontes correlacionadas; além disso, métodos esparsos, tais como *compressive beamforming*, alcançam resultados mais precisos na estimação de direção de chegada [14] e na estimação do sinal [15] quando comparados com métodos tradicionais de *beamforming*.

Esse melhor desempenho motiva o uso de algoritmos esparsos ao invés de soluções de mínimos quadrados, como (26), combinadas com estimação de direção de chegada por MUSIC ou ESPRIT para encontrar uma estimativa $\hat{\mathbf{Y}}$. Por exemplo, o algoritmo de OMP aplicado à estimação de imagens acústicas efetivamente estima a direção de chegada em uma grade definida de direções e resolve o problema (22) a cada iteração. Nas próximas seções, mostraremos como aplicar a relação de Schur-Hadamard em conjunto com a KAT para reduzir o custo computacional do algoritmo de OMP.

Note que OMP é apenas uma de várias escolhas possíveis. Outros algoritmos de estimação esparsa que requeiram iterações que contenham produtos matriz-vetor também se beneficiariam da KAT, e algoritmos que requeiram soluções de sistemas lineares como as discutidas aqui também se beneficiariam da relação de Schur-Hadamard.

V. OMP ACELERADO POR PRODUTOS DE SCHUR-HADAMARD E KAT

O algoritmo de OMP [16], [17] recebe como entradas a matriz espectral vetorizada \mathbf{s} , a matriz \mathbf{A} e a esparsidade L de \mathbf{y} . OMP inicializa o contador de iterações para $\ell = 1$, o conjunto de índices para $\Theta_0 = \emptyset$ e o resíduo do sinal para $\mathbf{r}_0 = \mathbf{s}$.

Na iteração ℓ , OMP encontrará a coluna \mathbf{a}_{θ_ℓ} de \mathbf{A} mais correlacionada com o resíduo do sinal $\mathbf{r}_{\ell-1}$ resolvendo

$$\theta_\ell = \arg \max_{j=1, \dots, M} |\langle \mathbf{r}_{\ell-1}, \mathbf{a}_j \rangle|, \quad (30)$$

e depois atualizando $\Theta_\ell = \Theta_{\ell-1} \cup \{\theta_\ell\}$. Depois disso, OMP irá encontrar uma aproximação para \mathbf{y} com as colunas de \mathbf{A} que correspondem ao conjunto de índices Θ_ℓ através da solução do problema de mínimos quadrados

$$\mathbf{y}_t = \arg \min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{s} - \mathbf{A}_{\Theta_\ell} \mathbf{y}\|_2. \quad (31)$$

Por fim, o algoritmo atualiza o resíduo

$$\mathbf{r}_\ell = \mathbf{s} - \mathbf{A}_{\Theta_\ell} \mathbf{y}_\ell \quad (32)$$

e o processo é repetido se $\ell < L$.

O número de operações aritméticas requerido para implementar OMP pode ser reduzido consideravelmente se observarmos que (31) tem a mesma forma de (25). A solução direta de (31) também pode ser substituída por uma solução baseada na decomposição de Cholesky obtida recursivamente da matriz $\mathbf{A}_{\Theta_\ell}^H \mathbf{A}_{\Theta_\ell}$ e nas equações normais do problema de mínimos quadrados [6]. O problema principal do método de Cholesky é que ele necessita memória adicional [18], porém pode ser vantajoso em casos específicos de tamanho de problema e

estrutura da matriz \mathbf{A} . Sendo assim, incluímos ambos os métodos de Cholesky e de Schur-Hadamard na comparação da próxima seção.

Além disso, se definirmos $\mathbf{p} = \mathbf{A}^H \mathbf{r}_{\ell-1}$, então (30) é equivalente a

$$\theta_\ell = \arg \max_{j=1, \dots, M} |[\mathbf{r}_{\ell-1}^H \mathbf{A}]_j| = \arg \max_{j=1, \dots, M} |[\mathbf{p}^H]_j|, \quad (33)$$

que pode ser acelerado pela KAT adjunta.

Como $L \ll M$, geralmente $N \ll M$ para imagens acústicas e o tamanho de \mathbf{A} é bem grande mesmo para problemas de tamanho médio [3], [4], então o tempo de execução do algoritmo de OMP para aplicações de imagens acústicas é dominado pelo cálculo de (30), que requer $N^2 M$ MACs complexas por iteração, e não por (31), que possui complexidade $\mathcal{O}(\ell^3) + \mathcal{O}(N^2 \ell^2)$ na iteração ℓ . Depois de aplicar a KAT e a relação de Schur-Hadamard, o custo por iteração cai para $\sqrt{MN} + MN + \mathcal{O}(\ell^3) + \mathcal{O}(N^2 \ell)$.

VI. SIMULAÇÕES

Para validar a aceleração teórica obtida com o uso da KAT e do produto de Schur-Hadamard, simulamos o algoritmo proposto em um único núcleo de um processador Intel Core de 2.0 GHz com 100 realizações por ponto. As rotinas foram completamente escritas em C/C++ e chamadas no Matlab. Consideramos os seguintes métodos de solução: Khatri-Rao se refere a resolver (25) usando a solução de forma fechada; Householder QR se refere a resolver o problema de mínimos quadrados com fatoração QR usando reflexões de Householder de \mathbf{A}_{Θ_ℓ} ; Cholesky se refere a uma implementação rápida de OMP que mantém uma fatoração Cholesky de $\mathbf{A}_{\Theta_\ell}^H \mathbf{A}_{\Theta_\ell}$ calculada recursivamente para resolver (31) de forma eficiente; e Schur-Hadamard se refere a calcular (28).

Fixamos o número de pixels na imagem acústica em $M = 10.000$ e escolhemos um arranjo separável específico com $N = 64$ microfones, isto é, a matriz \mathbf{A} possui dimensões fixas, depois observamos o tempo de execução do algoritmo em função de L , a esparsidade \mathbf{y} . Os resultados são mostrados na Fig. 1. Note que, para L pequeno, a aceleração obtida pela KAT é bem similar àquela obtida pela KAT combinada com os produtos de Schur-Hadamard, já que os produtos matriz-vetor dominam o tempo de execução. Uma vez que L aumenta, vemos que a combinação de ambos os métodos acelerados apresenta um ganho significativo quando comparado com o uso da KAT apenas, à medida que o passo de mínimos quadrados passa ocupar uma maior parte do tempo de execução total das rotinas. Houve uma aceleração bem pequena quando usamos apenas a relação de Schur-Hadamard, visto que, como discutido anteriormente, os produtos matriz-vetor tendem a dominar em aplicações de imageamento acústico.

Com o objetivo de investigar a aceleração em função de M , fixamos a esparsidade de \mathbf{y} em $L = 30$ e utilizamos o mesmo arranjo separável com $N = 64$ microfones. Os resultados são mostrados na Fig. 2. Notamos que o custo dos métodos acelerados que empregam a KAT estão aumentando a uma taxa muito menor que o custo dos outros métodos com uma aceleração sólida de duas ordens de magnitude quando $M = 128 \times 128$. À medida que M aumenta, a combinação de

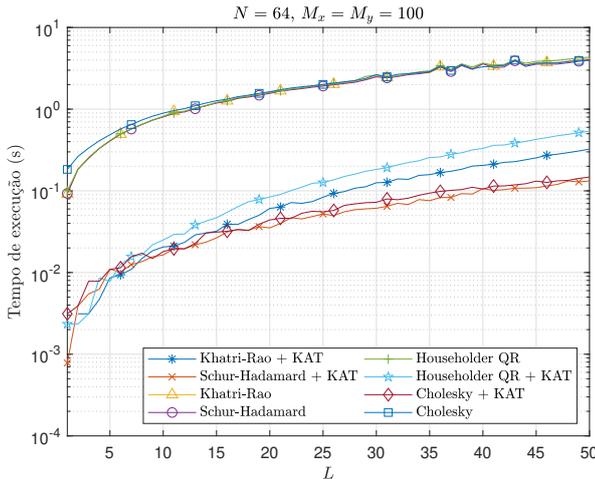


Fig. 1. Tempo de execução para um número fixo de pixels $M = 10000$ usando um arranjo separável com $N = 64$ microfones enquanto a esparsidade L de y está aumentando.

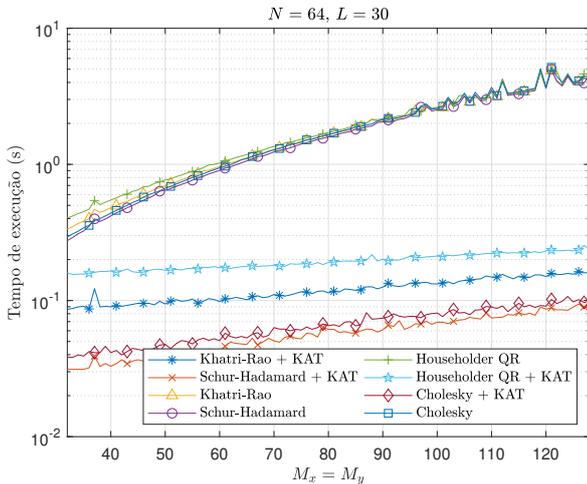


Fig. 2. Tempo de execução para a esparsidade de y fixada em $L = 30$ usando um arranjo separável com $N = 64$ microfones enquanto o número de pixels $M = M_x M_y$ está aumentando.

produtos de Schur-Hadamard e da KAT tende a se aproximar da curva que corresponde à KAT apenas, já que a KAT domina a maior parte do tempo de execução para L pequeno e fixado.

Em ambos os casos, o método baseado na relação de Schur-Hadamard tem performance melhor que a implementação rápida de OMP baseada na fatoração de Cholesky. Note que o método de Cholesky requer memória adicional para salvar a fatoração Cholesky de $\mathbf{A}_{\Theta_\ell}^H \mathbf{A}_{\Theta_\ell}$, enquanto o método proposto não requer mais memória.

VII. CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos uma nova maneira de estimar imagens acústicas através da solução de um problema de mínimos quadrados utilizando identidades matriciais relacionadas ao produtos de Schur-Hadamard, Kronecker e Khatri-Rao. Depois utilizamos a aceleração conseguida com a relação de Schur-Hadamard em conjunto com a KAT para estimar

imagens acústicas com o algoritmo de OMP, resultando em uma implementação muito mais rápida.

A complexidade computacional do OMP foi reduzida de $N^2M + \mathcal{O}(\ell^3) + \mathcal{O}(N^2\ell^2)$, na iteração ℓ , para $\sqrt{MN} + MN + \mathcal{O}(\ell^3) + \mathcal{O}(N^2\ell)$ ao aplicar a KAT e a relação de Schur-Hadamard. Ao observar os fatores que compõem o custo computacional, vemos que, apesar da dependência cúbica da solução do problema de mínimos quadrados, o cálculo da KAT representa um ganho mais significativo num caso esparsos. No entanto, uma vez fixado o tamanho da imagem, a aceleração de Schur-Hadamard é significativa quando comparada com a conseguida apenas com a KAT. Portanto as duas formas de aceleração se complementam em diferentes cenários de estimação.

REFERÊNCIAS

- [1] V. H. Nascimento, B. S. Masiero, and F. P. Ribeiro, *Acoustic Imaging Using the Kronecker Array Transform*, 1st ed. Boca raton: CRC Press, 2016, ch. 6, pp. 153–178.
- [2] T. F. Brooks and W. M. Humphreys, “A deconvolution approach for the mapping of acoustic sources (damas) determined from phased microphone arrays,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 294, no. 4, pp. 856–879, 2006.
- [3] F. P. Ribeiro and V. H. Nascimento, “Fast transforms for acoustic imaging — part i: Theory,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 20, no. 8, pp. 2229–2240, Aug 2011.
- [4] —, “Fast transforms for acoustic imaging — part ii: Applications,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 20, no. 8, pp. 2241–2247, Aug 2011.
- [5] H. Lev-Ari, “Efficient solution of linear matrix equations with application to multistatic antenna array processing,” *Communications in Information and Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 123–130, 2005.
- [6] R. Rubinstein, M. Zibulevsky, and M. Elad, “Efficient implementation of the k-svd algorithm using batch orthogonal matching pursuit,” *CS Technion*, vol. 40, 01 2008.
- [7] H. L. V. Trees, *Optimum Array Processing*, 1st ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [8] B. Masiero and V. H. Nascimento, “Revisiting the kronecker array transform,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 24, no. 5, pp. 525–529, May 2017.
- [9] H. Henderson and S. Searle, “The vec-permutation matrix, the vec operator and kronecker products: A review,” *Linear & Multilinear Algebra*, vol. 9, pp. 271–288, Jan 1981.
- [10] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [11] C. R. Johnson, “Closure properties of certain positivity classes of matrices under various algebraic operations,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 97, pp. 243–247, 1987.
- [12] R. Schmidt, “Multiple emitter location and signal parameter estimation,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, no. 3, pp. 276–280, March 1986.
- [13] R. Roy, A. Paulraj, and T. Kailath, “Esprit—a subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 34, no. 5, pp. 1340–1342, October 1986.
- [14] A. Xenaki, P. Gerstoft, and K. Mosegaard, “Compressive beamforming,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 136, p. 260, 07 2014.
- [15] M. A. Daher, C. A. Prete, V. H. Nascimento, and B. S. Masiero, “Compressive beamforming and directional sound reconstruction using the kronecker array transform,” in *2019 53rd Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, 2019, pp. 133–137.
- [16] J. A. Tropp and S. J. Wright, “Computational methods for sparse solution of linear inverse problems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 98, no. 6, pp. 948–958, June 2010.
- [17] M. F. Duarte and Y. C. Eldar, “Structured compressed sensing: From theory to applications,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 9, pp. 4053–4085, Sep. 2011.
- [18] T. Blumensath and M. E. Davies, “Gradient pursuits,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 6, pp. 2370–2382, 2008.