

Imparcialidade sob Congestionamento em Redes Óticas Elásticas

Helio Waldman, Raul C. Almeida Jr. e Rodrigo Campos Bortoletto

Resumo— Este artigo apresenta um estudo analítico do congestionamento de um enlace avulso elástico com duas classes de tráfego que requisitam conexões com taxas de chegada que tendem ao infinito conjuntamente. O estudo mostra que, nessas condições, surgem um ou mais estados assintoticamente absorventes, que podem ser extremamente parciais em favor de uma classe. Este fenômeno é demonstrado para um enlace avulso sem fragmentação do espectro, com base na reversibilidade do respectivo processo markoviano. O artigo identifica então uma solução para manter a imparcialidade sob congestionamento. Finalmente, a extensão do estudo para redes irreversíveis com fragmentação espectral é discutida.

Palavras-Chave— *redes óticas elásticas, processos Markovianos, reversibilidade, estados quase absorventes.*

Abstract— This paper presents an analytical study of congestion on an elastic single link with two traffic classes that request connections with arrival rates that are jointly taken to infinity. Under these conditions, the study shows the emergence of one or more asymptotically absorbing states, which may be extremely unfair against one class. This singularity is derived for an elastic single link with no spectral fragmentation, based on the reversibility of the associated Markovian process. The paper then identifies a solution to keep fairness under congestion. Finally, the extension of this concept to irreversible networks with spectral fragmentation is briefly discussed.

Keywords—*elastic optical networks, Markovian processes, reversibility, quasi-absorbing states.*

I. INTRODUÇÃO

A partir do advento da tecnologia WDM no final do século passado, a exploração do espectro das fibras óticas, até então essencialmente inexplorado, se deu em torno de uma grade fixa de frequências igualmente espaçadas, inicialmente com espaçamento de 200 GHz, depois 100 GHz, e finalmente 50 GHz no que se convencionou chamar de WDM denso (DWDM). Esse processo, que recebeu o nome de mineração de banda (*“bandwidth mining”*), aproxima-se agora de um esgotamento sem nenhuma perspectiva de amenização do crescimento exponencial do tráfego [1]. A resposta a essa emergência tem se dado ao longo de duas vertentes: aumento da eficiência do uso do espectro óptico das fibras já instaladas mediante a adoção de uma grade flexível nas chamadas redes óticas elásticas (EON’s); e desenvolvimento e lançamento de novas fibras com mais que um modo espacial para novas redes de multiplexagem espacial (SDM), em que cada modo deverá usar a grade flexível de frequências para obter maior eficiência espectral.

Assim sendo, a EON assume um papel central na resposta à saturação do espectro óptico, que se tornou mais premente a

Helio Waldman, DECOM/FEEC/UNICAMP, Campinas, SP, e-mail: heliowaldman@gmail.com; Raul C. Almeida Jr., Depto. of Eletrônica e Sistemas, UFPE, Recife, PE; Rodrigo C. Bortoletto, Depto. de Ciência da Computação, IFSP, São Paulo, SP.

partir da chegada da pandemia, chegando a produzir congestionamento nas redes [2, 3]. Daí a necessidade de estudar o comportamento dessas redes sob congestionamento, que motiva este artigo, tendo como metodologia uma abordagem analítica que modela a operação das EON’s como um processo Markoviano.

A Seção II introduz brevemente a modelagem do enlace avulso com duas classes de tráfego por uma cadeia de Markov de tempo contínuo. A Seção III mostra que, na ausência de fragmentação espectral, o enlace se torna reversível, acarretando a emergência de um estado assintoticamente absorvente. A Seção IV discute a extensão desse fenômeno na presença de fragmentação espectral.

II. CADEIAS DE MARKOV DE TEMPO CONTÍNUO

A modelagem analítica dos bloqueios de requisições de caminhos óticos em EON’s tem sido feita através de Cadeias de Markov de Tempo Contínuo (CMTC), nas quais o sistema é representado por um conjunto de estados, que transitam de um para outro com taxas determinadas pelo tráfego de requisições, que podem ser moderadas por bloqueios, especialmente em caso de congestionamento. A grade flexível é formada por um número S (tipicamente 320) de slots contíguos de 12.5 GHz cada um. Por limitações da tecnologia, os slots alocados a uma conexão ou caminho óptico devem ser contíguos.

Um exemplo dessa representação é dado pela parte não sombreada da Fig. 1, para um enlace avulso com $S=55$ e $(a,b)=(5,11)$, onde a e b são os tamanhos, em número de slots de frequência, ocupados por conexões da classe A e da classe B respectivamente. Cada classe representa um tipo de serviço prestado pelo enlace. No caso, a classe A é otimizada para prover conexão em 400 Gb/s, e a classe B em 1 Tb/s, em distâncias de até 400 km [4].

A modelagem do enlace pela Fig. 1 só é válida se não houver fragmentação do espectro do enlace pelas conexões ativas. Para evitar a fragmentação espectral na alocação de uma nova conexão, basta alocá-la numa posição contígua a alguma conexão ativa. Porém, quando ocorre a desativação de uma conexão, pode ser necessário acionar um mecanismo de desfragmentação que movimenta as demais conexões ativas para preencher um novo vazio espectral deixado pela desativação. Neste caso, num enlace avulso, resta sempre um único vazio espectral, simplificando a análise da taxa de bloqueios: a requisição por i slots, $i \in \{a,b\}$ será bloqueada se o vazio tiver menos que i slots, ou seja, se $S - \Omega(n_a, n_b) < i$, onde $\Omega(n_a, n_b)$ é a ocupação do enlace em número de slots no estado (n_a, n_b) em que n_a e n_b são os números de conexões ativas da classe A e da classe B respectivamente, ou seja:

$$\Omega(n_a, n_b) = a \cdot n_a + b \cdot n_b \quad (1)$$

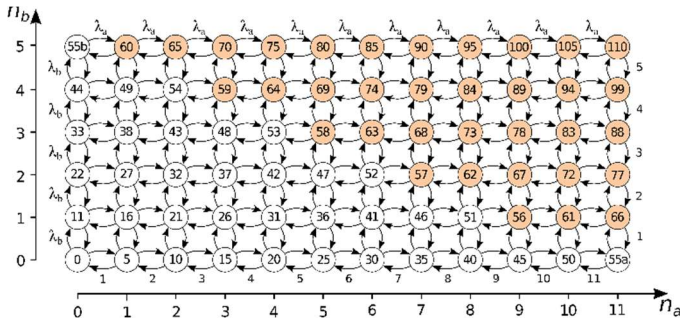


Fig. 1 – Enlace avulso com $S=55$ e $(a,b)=(5,11)$, obtido por truncamento da cadeia de Markov de sistema de dois enlaces independentes de mesmo tamanho S , um para cada classe.

Na Fig. 1, os estados (n_a, n_b) são representados por círculos rotulados pela variável de estado $\Omega(n_a, n_b)$. Assim, sempre que o sistema estiver num estado em que $\Omega > 44$, requisições por 11 slots da classe B serão bloqueadas; e quando $\Omega > 50$, requisições por 5 slots da classe A também serão bloqueadas.

No modelo do enlace desfragmentado apresentado na Fig. 1, cada par (n_a, n_b) determina univocamente o estado do sistema. Porém, a variável de estado $\Omega(n_a, n_b)$ pode ter o mesmo valor em dois ou mais estados diferentes: é o caso dos estados $(11,0)$ e $(0,5)$, que geram $\Omega(n_a, n_b)=55$ em (1). Por isso, se quisermos denotar os estados pela sua ocupação, é necessário desambiguá-los com um sufixo, como foi feito com os rótulos 55a e 55b na Figura. No estado 55a, o enlace é totalmente ocupado por 11 requisições de 5 slots, e no estado 55b por 5 requisições de 11 slots. Todas as transições de (n_a, n_b) para $(n_a + 1, n_b)$ e para $(n_a, n_b + 1)$, quando existirem, são rotuladas pelas taxas de chegada de requisições λ_a e λ_b da classe A e da classe B respectivamente. Já as transições para $(n_a - 1, n_b)$ e para $(n_a, n_b - 1)$ são rotuladas por n_a e n_b respectivamente, refletindo a hipótese/convenção de mesma duração média igual a 1 para todas as conexões.

A. Vazão versus Ocupação

A Fig. 2 mostra a mesma CMTC da Fig. 1, porém com duas modificações:

- a CMTC está agora truncada pela supressão de todos os estados sombreados, para representar corretamente a restrição de recursos espectrais, limitados a 55 slots;
- cada estado está agora rotulado por sua respectiva vazão (“throughput”) $\tau(n_a, n_b)$, expressa em Tb/s por:

$$\tau(n_a, n_b) = 0.4n_a + n_b \quad (2)$$

Observamos inicialmente que a vazão não é, neste caso assim como na maioria dos casos, proporcional à ocupação. O motivo disto é que as maiores taxas de bits geralmente fazem uso de constelações com mais dimensões, resultando numa eficiência espectral mais próxima ao limite de Shannon. Assim, o serviço de 1 Tb/s em 11 slots apresenta uma eficiência de 90,91 Gb/s/slot, ao passo que o de 400Gb/s em 5 slots alcança apenas 80 Gb/s/slot. Daí porque o estado $(0,5)$, rotulado como 55b na Fig. 1, apresenta a vazão máxima do sistema com 5 Tb/s e ocupação de 100%, ao passo que o estado $(11,0)$, rotulado como 55a, também apresenta ocupação de 100% mas uma vazão de apenas 4,4 Tb/s.

A vazão do sistema está diretamente associada à sua receita operacional, daí a sua importância. Porém, é a ocupação que vai

determinar o desempenho do sistema no que diz respeito aos bloqueios, que estão associados à competitividade e/ou à conformidade (“compliance”) no caso de mercados regulados.

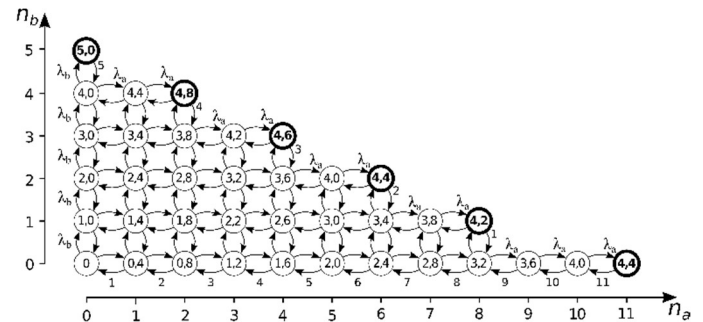


Fig. 2 – Estados rotulados pela vazão em Tb/s.

III. CADEIAS REVERSÍVEIS

Um processo Markoviano é considerado reversível quando o comportamento estocástico do processo se mantém sob a inversão da seta do tempo, ou seja, quando a variável t é substituída por $-t$. Pelo critério de Kolmogorov, o processo será reversível se o produto das probabilidades de transição sobre qualquer caminho percorrido ao longo da cadeia saindo de qualquer estado e a ele retornando for o mesmo no sentido percorrido e no sentido contrário [5]. Um critério equivalente é que a existência de um equilíbrio global implique também em um equilíbrio local, que estabelece a igualdade entre os fluxos de probabilidade de i para j e o de j para i para todo par (i,j) de estados. Entende-se por fluxo de probabilidade de um estado i para o estado j o produto $p_i \lambda_{ij}$, sendo p_i a probabilidade estacionária do estado i e λ_{ij} a taxa de transição do estado i para o estado j .

A existência de um equilíbrio local facilita sobremaneira o cálculo das probabilidades estacionárias dos estados, e a partir delas os valores médios de variáveis de estado importantes para caracterizar o desempenho do sistema, como a ocupação, a vazão, etc.. Daí a importância de verificar se uma cadeia de Markov é reversível ou não.

Se considerarmos a fileira inferior da CMTC da Fig. 1, formada pelos estados em que $n_b=0$, observamos que ela representa um enlace com 55 slots servindo um tráfego de requisições de $a = 5$ slots com taxa de chegada λ_a . Esse tipo de CMTC está associado a um tipo de grafo conhecido como “árvore”, na qual o corte de qualquer ramo divide o grafo em duas partes que não se comunicam. Isso significa que toda CMTC em árvore tem equilíbrio local, e portanto é reversível. O equilíbrio local na primeira fileira da Fig. 1 implica em que

$$p(n_a, 0) \cdot \lambda_a = p(n_a + 1, 0) \cdot (n_a + 1), \quad n_a \in [0, N_a], \quad (3)$$

onde $p(n_a, n_b)$ é a probabilidade estacionária do estado (n_a, n_b) , e $N_a = \lfloor S/a \rfloor - 1$.

A aplicação recorrente de (3) a partir do estado $(0,0)$ resulta em que

$$p(n_a, 0) = \frac{\lambda_a^{n_a} / n_a!}{\sum_{i=0}^{N_a} (\lambda_a^i / i!)}, \quad n_a \in [0, N_a] \quad (4)$$

A primeira coluna da Fig. 1 também é uma árvore, e portanto também é reversível. Então, por analogia com (4), podemos escrever

$$p(0, n_b) = \frac{\lambda_b^{n_b} / n_b!}{\sum_{i=0}^{N_b} (\lambda_b^i / i!)}, \quad n_b \in [0, N_b], \quad (5)$$

sendo $N_b = \lfloor S/b \rfloor - 1$.

Se considerarmos um sistema hipotético formado por dois enlaces separados, um dado pela primeira fileira da Fig. 1 e outro dado pela primeira coluna, ele será corretamente representado pela CMTC retangular mostrada na Figura, sendo as variáveis n_a e n_b independentes por operarem em enlaces separados. Além disso, a CMTC retangular é reversível porque cada uma das variáveis independentes é reversível. Por isso, as probabilidades estacionárias dos estado (n_a, n_b) são dadas por

$$p(n_a, n_b) = \frac{\binom{\lambda_a^{n_a} / n_a!}{\lambda_b^{n_b} / n_b!}}{\sum_{(i,j) \in \sigma_r} \binom{\lambda_a^i / i!}{\lambda_b^j / j!}}, \quad (6)$$

sendo $\sigma_r = \{(i, j) | i \in [0, N_a], j \in [0, N_b]\}$ o conjunto dos estados da CMTC retangular.

A. Truncamentos

A CMTC retangular considerada na Fig. 1 não tem muito interesse prático porque as duas classes de tráfego estão usando dois enlaces separados, mas sem compartilhamento: como se sabe, a razão de ser das redes é justamente o compartilhamento de recursos. Para forçar esse compartilhamento, basta suprimir todos os estados com ocupação superior a $S = 55$, que aparecem sombreados na Figura: os estados remanescentes formam uma nova CMTC que modela um enlace único com 55 slots cujos recursos são compartilhados pelas duas classes de tráfego.

Ocorre que nesta nova CMTC as variáveis n_a e n_b não são mais independentes. Daí ser natural perguntar: esta nova CMTC é reversível? A resposta é sim, e a explicação é a seguinte [5]. Suponha uma CMTC reversível qualquer, cujos estados formam um conjunto σ . Seja σ_s um subconjunto não-vazio qualquer de σ . Como a CMTC é reversível, então existe equilíbrio local para todos os pares de estados em σ . Se tomarmos agora todas as transições de estados de $\sigma_t = \sigma - \sigma_s$ para estados em σ_s e as multiplicarmos todas por uma mesma constante não-negativa $c \neq 1$, então permanecem em equilíbrio local todos os pares de estados de σ_t e os de σ_s , mas não os pares formados por um estado de σ_t e outro de σ_s . Porém, se agora multiplicarmos todas probabilidades estacionárias dos estados de σ_s pela mesma constante c anteriormente utilizada, restauramos o equilíbrio local entre todos os pares de estados, sobrando apenas um problema facilmente sanável: as probabilidades dos estados não estão mais somando 1. Para sanar este problema, basta multiplicar todas probabilidades dos estados de σ por uma constante de normalização.

Dessa sequência de procedimentos resulta sempre uma nova CMTC igualmente reversível. O truncamento é o caso particular dessa transformação em que $c = 0$. Neste caso, o conjunto σ_s é suprimido, pois as probabilidades dos seus estados são multiplicadas por zero: é o que aconteceu com os estados com ocupação superior a 55 na Fig. 1; e podemos afirmar que a CMTC truncada, ou seja, formada pelos estados sobreviventes ao truncamento, é reversível. No caso da Fig. 1, portanto, o

truncamento destrói a independência entre n_a e n_b , mas preserva a reversibilidade do processo.

Assim sendo, os truncamentos são operações matemáticas através das quais podemos transformar qualquer CMTC reversível em outra CMTC reversível através da simples supressão de estados indesejáveis, como faremos a seguir. Mas é lícito perguntar: podemos fazer qualquer truncamento? Do ponto de vista estritamente matemático, a resposta é sim, podemos. Do ponto de vista da rede, porém, a resposta deve levar em conta que ela é um sistema aberto, sujeito a decisões dos usuários que precisam ser acatadas, e não apenas da rede. Por isso, na prática só podemos suprimir estados por meio de decisões de competência da operadora, que atua como um agente com poder de interferir no sistema, aceitando ou rejeitando requisições, seja por eventual insuficiência de recursos, ou por uma estratégia de otimização de recursos a médio ou longo prazo; mas não podemos interferir nas decisões privativas dos usuários.

Neste sentido, é preciso então atentar para as competências da rede e dos usuários sobre as transições presentes na CMTC. As transições de cima para baixo e da direita para a esquerda correspondem à desativação de alguma conexão da classe B e da classe A, respectivamente; decisões essas que são privativas dos usuários. Por isso, não é permitido suprimir um estado sem suprimir também todos os estados que estejam acima na mesma coluna ou à direita na mesma fileira dele na CMTC; e aplicando-se a estes a mesma regra, suprimindo também todos que estejam no quadrante superior direito que tem o estado suprimido como vértice. Já as transições de baixo para cima e da esquerda para a direita correspondem a decisões da operadora no sentido de aceitar requisições por conexões da classe B e da classe A respectivamente: são essas decisões que podem, e no caso da insuficiência de recursos precisam, ser balizadas por truncamentos, conforme veremos adiante.

B. Estados Efêmeros, Duradouros e Assintótico

O sistema aqui estudado é aberto, e ficará congestionado quando as taxas de requisição λ_a e λ_b tenderem ao infinito, produzindo um efeito drástico sobre os tempos médios de estadia nos diversos estados da CMTC.

O tempo médio de estadia num estado qualquer é o inverso da soma das taxas de todas as transições dele para os outros estados. Por isso, todos os estados que originam transições rotuladas por λ_a e/ou λ_b , que são a maioria nas Figs. 1 e 2, terão um período médio de estadia tendendo a zero sob congestionamento, motivo pelo qual podemos considerá-los efêmeros nessa condição: os únicos estados duradouros serão os estados que bloqueiam as requisições de todas as classes. Na Fig. 2, há seis estados duradouros, que estão apresentados em **negrito**, rotulados pelas respectivas vazões. Esses estados são os únicos com tempo médio de estadia positivo sob congestionamento, ficando os demais com probabilidade zero, por serem efêmeros.

A dinâmica dos estados duradouros é determinada pelo serviço, e não pelo tráfego. Para entender como ela funciona, consideremos como exemplo o estado duradouro (2,4), que apresenta 2 conexões da classe A e 4 da classe B, resultando em ocupação de 54 slots e vazão de 4,8Tb/s. Quando uma das 2 conexões da classe A é desativada, o que ocorre com taxa 2, o sistema transita para o estado efêmero (1,4) mas imediatamente volta para o estado duradouro (2,4) por causa da chegada

“instantânea” da próxima requisição da classe A, de maneira que o estado do sistema praticamente não muda. Quando uma das 4 conexões da classe B é desativada, o que acontece com taxa 4, o sistema transita para o estado efêmero (2,3), onde instantaneamente só podem acontecer duas coisas:

- com probabilidade $\beta = \lambda_b/(\lambda_a + \lambda_b)$, o sistema retorna ao estado (2,4), ou seja, a transição é praticamente abortada; ou
- com probabilidade $\alpha = \lambda_a/(\lambda_a + \lambda_b)$, o sistema transita para o estado efêmero (3,3), de onde segue imediatamente para o estado duradouro (4,3).

Nessas condições, numa CMTC sob congestionamento, envolvendo apenas os estados duradouros, uma vez que os demais têm probabilidade zero, podemos dizer que há uma transição do estado (2,4) para o estado (4,3) com taxa 4α .

A Fig. 3 mostra a CMTC de estados duradouros correspondente ao exemplo das Figs. 1 e 2, com os estados rotulados por suas vazões. Nela, observamos o surgimento de um estado absorvente, correspondente ao estado (11,0) das Figs. 1 e 2. Sob congestionamento, esse estado se torna assintoticamente absorvente, pois sua probabilidade tende a 1, ao passo que as dos demais estados tende a zero.

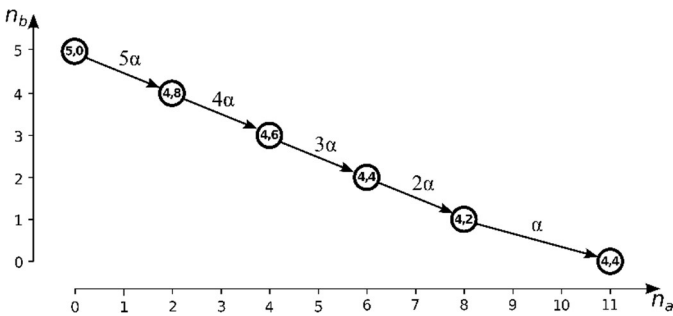


Fig. 3 – Estados duradouros rotulados pela vazão.

Uma interpretação algébrica do surgimento de um estado assintótico pode ser obtida de (6). Nesta equação, podemos observar, inicialmente, a existência de um denominador que é o mesmo para todos os estados (n_a, n_b) , de maneira que as relações entre as probabilidades dos estados podem ser obtidas por comparação entre os numeradores. Nestes, observamos que, supondo que λ_a e λ_b sejam levadas ao infinito mantendo uma relação constante entre elas, cada estado (n_a, n_b) terá um numerador crescendo com expoente $n_a + n_b$ sobre λ_a ou λ_b . Então, a partir de um certo ponto, o(s) estado(s) que tiver(em) o maior valor de $n_a + n_b$, ou seja, o maior número de conexões ativas, dominará(ão) sobre os demais. Se apenas um estado estiver nessa condição, sua probabilidade tenderá a 1, e as dos demais tenderão a zero. Na Fig.1, é fácil constatar que o estado (11,0) é o único estado com 11 conexões ativas, sendo os demais com menos que 11. Por isso, (11,0) é assintótico.

O estado assintótico (11,0) tem ocupação de 100%, assim como o estado (0,5). Porém, como se pode ver na Fig. 2, o estado assintótico tem vazão 4,4 Tb/s, ao passo que o estado (0,5) tem a máxima vazão 5 Tb/s do sistema. Assim, sem uma política seletiva de alocação, o congestionamento não levará o sistema à sua vazão máxima, gerando uma perda de 600 Gb/s.

Há várias estratégias possíveis para sanar este problema usando truncamentos que eliminem ou alterem o estado assintótico, dependendo do objetivo a ser atingido. Se o objetivo

for simplesmente atingir a vazão máxima sob congestionamento, basta suprimir todas as colunas da CMTC original menos a primeira, fazendo com que o estado (0,5) seja o estado assintótico com vazão de 5 Tb/s, ao custo de tornar o sistema extremamente parcial (“unfair”).

Porém, considerações de natureza ética, mercadológica ou regulatória podem levar uma operadora a abrir mão de parte da receita para não excluir totalmente os usuários do serviço menos eficiente no uso de recursos espectrais. Assim, se forem suprimidas todas as colunas a partir da quarta coluna, o estado assintótico passa a ser (2,4), único com $n_a + n_b = 6$, sendo os demais com no máximo 5 conexões ativas, gerando uma ocupação de 54 slots e vazão 4,8 Tb/s, só 200 Gb/s abaixo da vazão máxima comportada pelo enlace, admitindo até duas conexões de 400 Gb/s em troca de uma de 1 Tb/s. Esse sistema é menos parcial que o de máxima eficiência, mas sua imparcialidade não é perfeita, e depende da relação entre λ_a e λ_b . A imparcialidade perfeita pode ser obtida com um truncamento em que todos os estados duradouros tenham $n_a + n_b = N_c$ constante, como ilustrado na Fig. 4 para $N_c = 5 = N_b$, maior valor de N_c que preserva a imparcialidade perfeita.

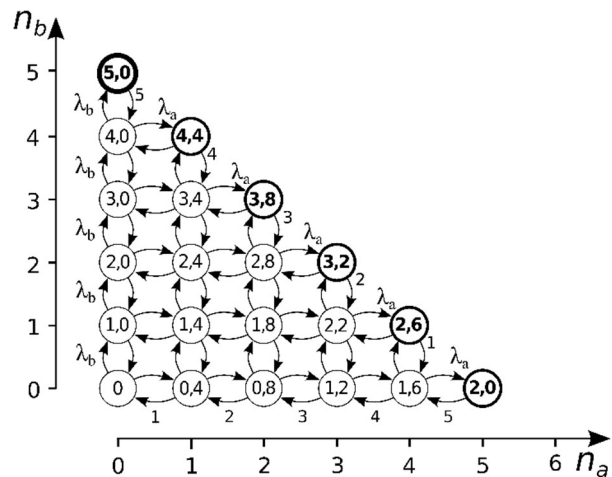


Fig. 4 – CMTC imparcial para qualquer perfil de tráfego, com estados rotulados pela vazão.

Na Fig. 4, observamos que todos os estados efêmeros que transitam diretamente para os estados duradouros aceitam tanto requisições da classe A como da classe B, sem discriminação, o que gera a imparcialidade perfeita. A CMTC dos estados duradouros sob congestionamento é mostrada na Fig. 5.

Sendo τ_a e τ_b as vazões fornecidas por conexões da classe A e da classe B em Tb/s respectivamente, a vazão média em Tb/s fornecida pela CMTC imparcial sob congestionamento é dada por (ver Apêndice):

$$\bar{\tau} = N_c \tau_a + \left[\frac{\sum_{k=0}^{N_c} k \binom{N_c}{k} \gamma^k}{(1+\gamma)^{N_c}} \right] (\tau_b - \tau_a), \quad (7)$$

sendo $\gamma = \beta/\alpha = \lambda_b/\lambda_a$.

Assim sendo, a fração da vazão máxima a ser alcançada sob congestionamento imparcial será:

$$\frac{\bar{\tau}}{N_c \tau_b} = \frac{\tau_a}{\tau_b} + \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_b} \right) \left[\frac{\sum_{k=0}^{N_c} k \binom{N_c}{k} \gamma^k}{N_c (1+\gamma)^{N_c}} \right] \quad (8)$$

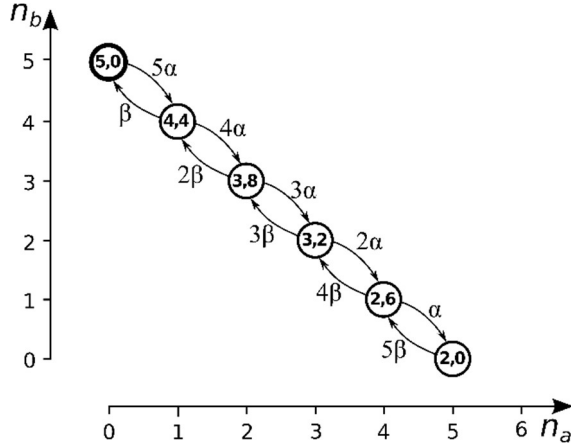


Fig. 5 – CMTC dos estados duradouros sob congestionamento imparcial para qualquer perfil de tráfego.

Para o exemplo considerado acima, obtemos então uma vazão média de congestionamento imparcial igual a 0,7 para $\gamma = 1$, correspondendo a um custo de imparcialidade de 30% da vazão máxima; e igual a 0,8 para $\gamma = 2$, correspondendo a um custo de 20% para o mesmo propósito.

IV. CADEIAS IRREVERSÍVEIS

Na presença de fragmentação espectral, a CMTC aplicável é irreversível, gerando explosão combinatória do número de estados. Mesmo assim, os conceitos de estados efêmeros, duradouros e assintótico continuam aplicáveis ao congestionamento. De um modo geral, para cada par (n_a, n_b) , haverá muitos estados, e não apenas um como na Seção anterior, pois existirão muitas possibilidades de distribuir os $S - an_a - bn_b$ slots ociosos entre os $n_a + n_b + 1$ vazios espectrais que separam cada par de conexões vizinhas ou ladeiam as conexões extremas. Em particular, se $S - an_a - bn_b < a(n_a + n_b + 1)$, alguns desses estados poderão ser bloqueantes, e portanto duradouros sob congestionamento, embora não todos, mas mesmo assim o número de estados duradouros pode ser muito grande. Porém, no caso do par (11,0) do exemplo da Seção anterior, o número de estados continua sendo 1, e esse único estado é assintótico, pois após a eventual desativação de uma conexão de $a = 5$ slots, ela será imediatamente substituída por outra de mesmo tamanho.

Assim sendo, a principal diferença introduzida pela fragmentação espectral parece consistir no número muito grande de estados duradouros sob congestionamento, o que sugere um tempo muito maior para o sistema chegar ao estado assintótico, cuja existência assim, ainda que teoricamente verdadeira, pode se tornar pouco relevante na prática.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio do CNPq Proc. 304171/2017-4; e da Fapesp Proc. 2015/24341-7. Agradecemos Marcio Wohlers de Almeida por nos apontar a Ref. 2, motivando o artigo.

REFERÊNCIAS

- [1] H. Waldman, The Impending Optical Network Capacity Crunch. In: SBFoton2018, 2018, Campinas. SBFoton Conference 2018. Campinas: Sociedade Brasileira de Fotônica, 2018. p. 1-4.
- [2] <https://www.engadget.com/2020-03-19-eu-netflix-sd-streaming-to-conserve-internet.html>
- [3] <https://f5.folha.uol.com.br/televisao/2020/03/globoplay-reduzira-qualidade-do-streaming-apos-crescimento-de-consumo-durante-isolamento.shtml>
- [4] A.N.L. Souza; E.J.M. Ruiz; J.D. Reis; Carvalho, L.H.H.; Oliveira, J.R.F.; Arantes, D.S.; Costa, M.H.M.; Mello, D.A.A. “Parameter Selection in Optical Networks with Variable-Code-Rate Superchannels”, Journal of Optical Communications and Networking, vol. 8, no. 7, pp. A152-A161, July 2016.
- [5] F.P. Kelly, “Reversibility and Stochastic Networks”, Cambridge University Press, 2011.

APÊNDICE

Este Apêndice deriva a expressão da vazão média da CMTC da Fig. 5, mostrada em (7). A CMTC em questão é gerada por um truncamento em que todos os estados duradouros apresentam

$$n_a + n_b = N_c \quad (A1)$$

Os estados $(n_a, n_b) = (N_c - n_b, n_b)$ desta CMTC podem então ser indexados apenas pela variável unidimensional n_b , que assume valores em $\{0, 1, 2, \dots, N_b\}$, que designam os $(N_c + 1)$ estados do sistema. A taxa de transição de qualquer estado $k < N_c$ para o estado $(k + 1)$ é dada por $(N_c - k)\beta$; a taxa de transição de qualquer estado $k > 0$ para o estado $(k - 1)$ é dada por $k\alpha$; e não há mais transições possíveis. Tratando-se de uma árvore, a CMTC é reversível e portanto tem equilíbrio local. Sendo $p(k) = \text{prob}(n_b = k)$, temos então:

$$\alpha \cdot p(1) = N_c \beta \cdot p(0) \rightarrow p(1) = N_c \gamma p(0) \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} 2\alpha \cdot p(2) &= (N_c - 1)\beta \cdot p(1) \rightarrow \\ \rightarrow p(2) &= \frac{(N_c - 1)N_c}{2} \gamma^2 p(0) = \binom{N_c}{2} \gamma^2 p(0), \end{aligned} \quad (A3)$$

e assim por diante. Generalizando, temos:

$$p(k) = \binom{N_c}{k} \gamma^k p(0) \quad (A4)$$

$$\begin{aligned} \therefore p(0) \left[\binom{N_c}{0} \gamma^0 + \binom{N_c}{1} \gamma + \binom{N_c}{2} \gamma^2 + \dots + \binom{N_c}{N_c} \gamma^{N_c} \right] &= \\ = p(0) (1 + \gamma)^{N_c} &= 1, \end{aligned} \quad (A5)$$

onde usamos a identidade $\sum_{k=0}^{N_c} \binom{N_c}{k} \gamma^k = (1 + \gamma)^{N_c}$.

$$p(0) = \frac{1}{(1 + \gamma)^{N_c}}, \quad (A6)$$

e substituindo em (A4):

$$p(k) = \frac{\binom{N_c}{k} \gamma^k}{(1 + \gamma)^{N_c}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_c \quad (A7)$$

A vazão do sistema no estado k é dada por:

$$\tau(k) = (N_c - k)\tau_a + k\tau_b \quad (A8)$$

Portanto, a vazão média do sistema é:

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \sum_{k=0}^{N_c} p(k) \tau(k) = \sum_{k=0}^{N_c} \frac{\binom{N_c}{k} \gamma^k [(N_c - k)\tau_a + k\tau_b]}{(1 + \gamma)^{N_c}} = \\ &= N_c \tau_a + \left[\frac{\sum_{k=0}^{N_c} k \binom{N_c}{k} \gamma^k}{(1 + \gamma)^{N_c}} \right] (\tau_b - \tau_a), \end{aligned} \quad (A9)$$

onde foi usada a mesma identidade que em (A5). ■