

Modelo Complexo η - μ Bivariável com Desbalanceamento de *Clusters*

Alessandro P. de Oliveira, Thiago A. M. de Bairros, Rausley A. A. de Souza e Michel D. Yacoub

Resumo—Neste artigo, um modelo de desvanecimento para o canal complexo bivariável η - μ , com desbalanceamento entre o número de *clusters* das componentes em fase e quadratura, é proposto. Uma expressão exata em forma fechada para função densidade de probabilidade conjunta de duas envoltórias e suas fases correspondentes é obtida. Admite-se que a correlação ocorre entre as respectivas componentes em fase entre si e as respectivas componentes em quadratura entre si dos sinais η - μ . O modelo proposto generaliza dois modelos existentes na literatura.

Palavras-Chave—Distribuição η - μ , distribuição conjunta de envoltória-fase bivariável, desbalanceamento de *clusters*.

Abstract—In this paper, a fading model for the complex bivariate η - μ channel, with an imbalance between the number of clusters of the in phase and quadrature components, is proposed. An exact closed-form expression for the joint probability density function including the two envelopes and their corresponding phases is obtained. It is assumed that the correlation occurs between the respective in phase components with each other and the respective in quadrature components with each other of the η - μ signals. The proposed model generalizes two models already presented elsewhere in the literature.

Keywords— η - μ distribution, bivariate phase-envelope joint distribution, imbalance of clusters.

I. INTRODUÇÃO

Em um sistema de comunicação sem fio, o sinal desvanecido tem sua fase e amplitude alteradas devido à sua passagem pelo meio de transmissão, sendo esses parâmetros importantes para a correta e precisa caracterização do canal. Em um ambiente com múltiplos percursos, o ganho de um canal, pode ser modelado por densidades já bem estabelecidas, tais como Rayleigh, Hoyt, Rice e Nakagami- m . Outros modelos mais gerais podem representar de forma mais precisa o ganho do canal, como por exemplo a distribuição η - μ [1]. Para esse modelo de canal, inicialmente, apenas o comportamento do ganho do canal foi analisado, deixando a questão da fase aberta e sujeita à discussão.

As distribuições do ganho e da fase deduzidas para os modelos Rayleigh, Hoyt e Rice foram obtidas diretamente de seus modelos, o que não ocorreu com a distribuição Nakagami- m obtida apenas para o ganho do canal e por

Alessandro P. de Oliveira e Michel D. Yacoub, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas-SP-Brasil, E-mails: [ale,michel]@decom.fee.unicamp.br. Thiago A. M. de Bairros e Rausley A. A. de Souza, Instituto Nacional de Telecomunicações (Inatel), Santa Rita do Sapucaí-MG, Brasil, E-mails: thiagob@mtel.inatel.br, rausley@inatel.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq (contratos: 141489/2018-9, 308365/2017-8 e 304248/2014-2), pela Capes (contrato: 88887.353680/2019-00) e pela RNP, com recursos do MCTIC, processo No 01250.075413/2018-04, sob o projeto Centro de Referência em Radiocomunicações (CRR) do Instituto Nacional de Telecomunicações – Inatel, Brasil.

métodos empíricos. Esse fato gerou muitas possibilidades para os modelos baseados em envoltória serem explorados.

Em [2], estatísticas de ordem superior, como a distribuição conjunta de envoltórias e a sua derivada no tempo, taxa de nível de cruzamento e duração média do desvanecimento, foram desenvolvidas para o modelo de canal Nakagami- m . Estatísticas de ordem superior também foram obtidas para a distribuição η - μ [3]. Novos avanços surgiram por meio de pesquisas relacionadas à caracterização do ganho do canal com foco na correlação, banda de coerência, distância de coerência e tempo de coerência [4]. Nenhuma informação da fase pôde ser obtida por meio do modelo Nakagami- m original, o que fez com que, por um longo tempo, a estatística da fase para este modelo fosse considerada como uniformemente distribuída. Um modelo de fase foi apresentado para a distribuição Nakagami- m em [5], em que a fase é uniforme apenas para a condição $m = 1$ (Rayleigh). Ainda neste modelo, foi considerada a inclusão de um parâmetro de desbalanceamento de potência entre as componentes em fase e quadratura. Em [6] foi proposto um modelo complexo bivariável para canais de desvanecimento Nakagami- m correlacionados, sendo obtidas a função densidade de probabilidade (FDP) conjunta de fase e de envoltória dos sinais desvanecidos e também as FDPs das componentes em fase e quadratura. Em [7] foi apresentado um modelo complexo η - μ bivariável para o Formato 1, em que uma expressão exata e fechada para a FDP conjunta de duas envoltórias e duas fases foi obtida. Os modelos de fase, anteriormente citados ou em outros modelos na literatura, possuem uma variedade de aplicações, tais como a análise de desempenho em sistemas OFDM [8] ou o estudo da capacidade em canais MIMO [9].

O objetivo deste artigo é a proposição de uma distribuição conjunta η - μ complexa bivariável correlacionada com desbalanceamento entre o número de *clusters* de multipercursos das componentes em fase e quadratura, bem como a dedução de suas estatísticas conjuntas, tendo os trabalhos apresentados em [6] e em [7] como casos particulares do modelo apresentado.

O restante do artigo está organizado como segue. A Seção II apresenta alguns conceitos preliminares relacionados à distribuição η - μ , bem como também ao modelo complexo. Na Seção III apresenta-se o modelo proposto e as suas estatísticas conjuntas. Os resultados numéricos referentes à FDP conjunta da fase são apresentados e analisados na Seção IV. Na Seção V conclui-se o artigo.

II. PRELIMINARES

A distribuição η - μ é um modelo de desvanecimento que representa as variações de curto prazo do sinal desvanecido

quando não há linha de visada [1]. Esse modelo possui dois diferentes formatos, Formato 1 e Formato 2, em que o parâmetro η caracteriza dois fenômenos físicos distintos. No Formato 1 o parâmetro η representa a razão entre as potências das componentes em fase e quadratura, e no Formato 2 ele é o coeficiente de correlação entre as componentes em fase e quadratura. Matematicamente, um formato pode ser obtido a partir de outro por meio das seguintes relações: $\eta_{\text{Format1}} = (1 - \eta_{\text{Format2}})/(1 + \eta_{\text{Format2}})$ e $\eta_{\text{Format2}} = (1 - \eta_{\text{Format1}})/(1 + \eta_{\text{Format1}})$, com $0 < \eta_{\text{Format1}} < \infty$ e $-1 < \eta_{\text{Format2}} < 1$. O Formato 2 não será utilizado neste trabalho. Sendo assim, o parâmetro η , deste ponto em diante, representará apenas o modelo no Formato 1. O número de *clusters* de multipercurso é representado pelo parâmetro $\mu > 0$.

A envoltória η - μ univariável é representada por

$$R^2 = X^2 + Y^2 = \sum_{i=1}^{2\mu} \mathcal{X}_i^2 + \sum_{i=1}^{2\mu} \mathcal{Y}_i^2, \quad (1)$$

em que X e Y são as componentes em fase e quadratura do modelo η - μ , respectivamente, e \mathcal{X}_i e \mathcal{Y}_i são variáveis aleatórias (VAs) Gaussianas com médias nulas, i.e. $\mathbb{E}[\mathcal{X}_i] = \mathbb{E}[\mathcal{Y}_i] = 0$, e variâncias $\sigma_{\mathcal{X}_i}^2 = \mathbb{E}[\mathcal{X}_i^2] = \hat{r}_X^2/(4\mu)$ e $\sigma_{\mathcal{Y}_i}^2 = \mathbb{E}[\mathcal{Y}_i^2] = \hat{r}_Y^2/(4\mu)$, respectivamente, com $\mathbb{E}[X^2] = \hat{r}_X^2/2$ e $\mathbb{E}[Y^2] = \hat{r}_Y^2/2$. A raiz do valor médio quadrático (RMS) de R é dada por $\hat{r} = \sqrt{\mathbb{E}[R^2]}$. Os parâmetros \hat{r}_X e \hat{r}_Y correspondem ao valor RMS das componentes em fase e quadratura, respectivamente. O operador matemático Esperança é representado por $\mathbb{E}[\cdot]$.

A variável complexa da distribuição η - μ N , a envoltória R e a fase Θ são relacionadas por $N = X + jY$, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ e $\Theta = \arg(N)$. No Formato 1, X e Y são processos independentes com, em geral, diferentes variâncias e o parâmetro η ($0 < \eta < \infty$) é obtido por $\eta = \hat{r}_X^2/\hat{r}_Y^2 = \sigma_X^2/\sigma_Y^2$, em termos das variâncias das componentes em fase e quadratura.

A FDP conjunta da envoltória-fase η - μ é dada por [10, eq. (8)]

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{2\mu^2 h^2 \mu r^{4\mu-1} |\sen 2\theta|^{2\mu-1}}{(h^2 - H^2)^\mu \hat{r}^{4\mu} \Gamma^2(\mu)} \times \exp\left(-\frac{2\mu h r^2 (h + H \cos 2\theta)}{\hat{r}^2 (h^2 - H^2)}\right), \quad (2)$$

em que $h = (2 + \eta^{-1} + \eta)/4$, $H = (\eta^{-1} - \eta)/4$, $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma [11, eq. (8.310.1)], $r \geq 0$ e $-\pi \leq \theta < \pi$.

As FDPs marginais η - μ são determinadas a partir de (2) via integração, ou seja, $f_R(r) = \int_{-\pi}^{\pi} f_{R,\Theta}(r,\theta) d\theta$ e $f_\Theta(\theta) = \int_0^\infty f_{R,\Theta}(r,\theta) dr$. Assim [10, eqs. (8) e (9)]

$$f_R(r) = \frac{4\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}} h^\mu}{\Gamma(\mu) H^{\mu-\frac{1}{2}} \hat{r}} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^{2\mu} \exp\left(-2\mu h \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right) \times I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right), \quad (3)$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{(h^2 - H^2)^\mu \Gamma(2\mu) |\sen 2\theta|^{2\mu-1}}{2^{2\mu} \Gamma^2(\mu) (h + H \cos 2\theta)^{2\mu}}, \quad (4)$$

em que $I_\nu(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem ν [12, eq. (9.6.3)].

III. MODELO PROPOSTO

A FDP conjunta das componentes em fase, $Z = X$, ou quadratura, $Z = Y$, para dois sinais η - μ correlacionados, conforme [7, eq. (1)], é dada por

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = \frac{|z_1 z_2|^\mu \mu^{\mu+1} \lambda^{(1-\mu)} (\Omega_{Z_1} \Omega_{Z_2})^{-\frac{1}{2}(1+\mu)}}{(1 - \lambda^2) \Gamma(\mu)} \times \exp\left(\frac{-\mu(z_2^2 \Omega_{Z_1} + z_1^2 \Omega_{Z_2}) + 2\mu \lambda z_1 z_2 \sqrt{\Omega_{Z_1} \Omega_{Z_2}}}{(1 - \lambda^2) \Omega_{Z_1} \Omega_{Z_2}}\right) \times I_{\mu-1}\left(\frac{2\mu |z_1 z_2| \lambda}{\sqrt{\Omega_{Z_1} \Omega_{Z_2}} (1 - \lambda^2)}\right) \text{sech}\left(\frac{2\mu |z_1 z_2| \lambda}{\sqrt{\Omega_{Z_1} \Omega_{Z_2}} (1 - \lambda^2)}\right) \quad (5)$$

com $-\infty < z_1, z_2 < \infty$ e λ representando o coeficiente de correlação entre as VAs Gaussianas ($-1 < \lambda < 1$).

Sejam N_1 e N_2 duas variáveis complexas η - μ correlacionadas, tais que

$$\begin{aligned} N_1 &= X_1 + jY_1, \\ N_2 &= X_2 + jY_2, \end{aligned} \quad (6)$$

com $\Omega_{X_1} = \mathbb{E}(X_1^2) = \hat{r}_{X_1}^2/2$, $\Omega_{Y_1} = \mathbb{E}(Y_1^2) = \hat{r}_{Y_1}^2/2$, $\Omega_{X_2} = \mathbb{E}(X_2^2) = \hat{r}_{X_2}^2/2$ e $\Omega_{Y_2} = \mathbb{E}(Y_2^2) = \hat{r}_{Y_2}^2/2$. Os parâmetros η são dados por $\eta_1 = \hat{r}_{X_1}^2/\hat{r}_{Y_1}^2$ e $\eta_2 = \hat{r}_{X_2}^2/\hat{r}_{Y_2}^2$. Sendo assim:

$$\hat{r}_{X_1}^2 + \hat{r}_{Y_1}^2 = 2\hat{r}_1^2, \quad (7)$$

$$\hat{r}_{X_2}^2 + \hat{r}_{Y_2}^2 = 2\hat{r}_2^2, \quad (8)$$

$$\hat{r}_{X_1}^2 = \eta_1 \hat{r}_{Y_1}^2, \quad (9)$$

$$\hat{r}_{X_2}^2 = \eta_2 \hat{r}_{Y_2}^2. \quad (10)$$

Substituindo (9) em (7) e (10) em (8) e deixando os resultados em função dos parâmetros $\Omega_{X_1}, \Omega_{X_2}, \Omega_{Y_1}$ e Ω_{Y_2} , as seguintes relações são estabelecidas

$$\Omega_{X_1} = \hat{r}_1^2 \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + 1}\right), \quad (11)$$

$$\Omega_{X_2} = \hat{r}_2^2 \left(\frac{\eta_2}{\eta_2 + 1}\right), \quad (12)$$

$$\Omega_{Y_1} = \frac{\hat{r}_1^2}{\eta_1 + 1}, \quad (13)$$

$$\Omega_{Y_2} = \frac{\hat{r}_2^2}{\eta_2 + 1}. \quad (14)$$

Para que a envoltória R seja uma FDP η - μ é preciso que o número total de *clusters* de multipercurso μ seja a soma do número de *clusters* das componentes em fase (μ_X) e quadratura (μ_Y), i.e.

$$\mu_X + \mu_Y = 2\mu. \quad (15)$$

Um parâmetro de fase p , $-1 \leq p \leq 1$, foi definido em [5, eq. (4)]. Para o modelo η - μ sob análise, obtém-se o parâmetro de fase em função de μ_X e μ_Y , ou seja

$$p = \frac{\mu_X - \mu_Y}{\mu_X + \mu_Y}. \quad (16)$$

Substituindo (15) em (16), tem-se:

$$\mu_X = (1 + p)\mu, \quad (17)$$

$$\mu_Y = (1 - p)\mu. \quad (18)$$

Notar que o desbalanceamento representado pelo parâmetro p quantifica a diferença normalizada entre o número de *clusters* μ_X da componente em fase X e o número de *clusters* μ_Y da componente em quadratura Y , para cada processo η - μ analisado. Desta maneira, se $\mu_X = \mu_Y$ tem-se a condição balanceada em termos do número de *clusters*, portanto $p = 0$. Se $\mu_X > \mu_Y$ ou $\mu_X < \mu_Y$ tem-se a condição desbalanceada em termos do número de *clusters*, resultando em $p > 0$ ou $p < 0$, respectivamente. Vale a pena ressaltar que o possível desbalanceamento representado pelo parâmetro η está ligado ao desbalanceamento entre as potências das componentes em fase e quadratura. Matematicamente, $\eta = \hat{r}_X^2 / \hat{r}_Y^2 = \sigma_X^2 / \sigma_Y^2$.

Considerando o mesmo número de *clusters* para as componentes em fase e quadratura, e o mesmo parâmetro p para ambos os sinais complexos N_1 e N_2 , as seguintes relações são estabelecidas: $\mu_{X_1} = \mu_{X_2} = \mu_X$, $\mu_{Y_1} = \mu_{Y_2} = \mu_Y$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ e $p_1 = p_2 = p$. Os parâmetros $(\mu_{X_1}, \mu_{Y_1}, p_1)$ e $(\mu_{X_2}, \mu_{Y_2}, p_2)$ referem-se aos processos complexos N_1 e N_2 , respectivamente, ambos expressos em (6).

Para $Z = X$, substituindo (11), (12) e (17) em (5) e para $Z = Y$, substituindo (13), (14) e (18) em (5), são obtidas as FDPs conjuntas das componentes em fase e quadratura, respectivamente escritas como

$$\begin{aligned}
 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \frac{((1+p)\mu)^{\mu(1+p)+1} \lambda_x^{1-\mu(1+p)}}{(1-\lambda_x^2) \Gamma(\mu(1+p))} \\
 &\times \frac{|x_1 x_2|^{\mu(1+p)} (\eta_1 \eta_2 \hat{r}_1^2 \hat{r}_2^2)^{-\frac{1}{2}(\mu(1+p)+1)}}{((\eta_1 + 1)(\eta_2 + 1))^{-\frac{1}{2}(\mu(1+p)+1)}} \\
 &\times \exp\left(-\frac{\mu(1+p) (\eta_1(\eta_2 + 1) \hat{r}_1^2 x_2^2 + \eta_2(\eta_1 + 1) \hat{r}_2^2 x_1^2)}{\eta_1 \eta_2 (1 - \lambda_x^2) \hat{r}_1^2 \hat{r}_2^2}\right) \\
 &\times \exp\left(\frac{2\lambda_x \mu(1+p) \hat{r}_1 \hat{r}_2 x_1 x_2 \sqrt{\eta_1 \eta_2} \sqrt{(\eta_1 + 1)(\eta_2 + 1)}}{\eta_1 \eta_2 (1 - \lambda_x^2) \hat{r}_1^2 \hat{r}_2^2}\right) \\
 &\times I_{\mu(1+p)-1}\left(\frac{2\lambda_x \mu(1+p) \sqrt{(\eta_1 + 1)(\eta_2 + 1)} |x_1 x_2|}{(1 - \lambda_x^2) \hat{r}_1 \hat{r}_2 \sqrt{\eta_1 \eta_2}}\right) \\
 &\times \operatorname{sech}\left(\frac{2\lambda_x \mu(1+p) \sqrt{(\eta_1 + 1)(\eta_2 + 1)} |x_1 x_2|}{(1 - \lambda_x^2) \hat{r}_1 \hat{r}_2 \sqrt{\eta_1 \eta_2}}\right), \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= \frac{(\mu(1-p))^{\mu(1-p)+1} \lambda_y^{1-\mu(1-p)}}{(1-\lambda_y^2) \Gamma(\mu(1-p))} \\
 &\times \frac{|y_1 y_2|^{\mu(1-p)} (\hat{r}_1^2 \hat{r}_2^2)^{-\frac{1}{2}(\mu(1-p)+1)}}{((\eta_1 + 1)(\eta_2 + 1))^{-\frac{1}{2}(\mu(1-p)+1)}} \\
 &\times \exp\left(-\frac{\mu(1-p) ((\eta_2 + 1) \hat{r}_1^2 y_2^2 + (\eta_1 + 1) \hat{r}_2^2 y_1^2)}{(1 - \lambda_y^2) \hat{r}_1^2 \hat{r}_2^2}\right) \\
 &\times \exp\left(\frac{2\lambda_y \mu(1-p) \hat{r}_1 \hat{r}_2 y_1 y_2 \sqrt{(\eta_1 + 1)(\eta_2 + 1)}}{(1 - \lambda_y^2) \hat{r}_1^2 \hat{r}_2^2}\right) \\
 &\times I_{\mu(1-p)-1}\left(\frac{2\lambda_y \mu(1-p) \sqrt{(\eta_1 + 1)(\eta_2 + 1)} |y_1 y_2|}{(1 - \lambda_y^2) \hat{r}_1 \hat{r}_2}\right) \\
 &\times \operatorname{sech}\left(\frac{2\lambda_y \mu(1-p) \sqrt{(\eta_1 + 1)(\eta_2 + 1)} |y_1 y_2|}{(1 - \lambda_y^2) \hat{r}_1 \hat{r}_2}\right), \quad (20)
 \end{aligned}$$

em que $-\infty < x_1, x_2, y_1, y_2 < \infty$, (X_1, X_2) e (Y_1, Y_2) representam as componentes em fase e quadratura do modelo η - μ , λ_X e λ_Y correspondem ao coeficiente de correlação entre Gaussianas das componentes em fase e quadratura, respectivamente, e $\hat{r}_1 = \sqrt{\mathbb{E}[R_1^2]}$ e $\hat{r}_2 = \sqrt{\mathbb{E}[R_2^2]}$ são os valores RMS das envoltórias R_1 e R_2 , respectivamente.

Como X_1 e Y_1 e também X_2 e Y_2 são VAs independentes, então $f_{X_1, Y_1, X_2, Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \times f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$.

A FDP conjunta da envoltória-fase bivariável é obtida por meio do processo de transformação de variáveis $f_{R_1, \Theta_1, R_2, \Theta_2}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) = f_{X_1, Y_1, X_2, Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) |J|$, em que $X_1 = R_1 \cos \Theta_1$, $Y_1 = R_1 \sin \Theta_1$, $X_2 = R_2 \cos \Theta_2$, $Y_2 = R_2 \sin \Theta_2$ e $|J| = r_1 r_2$. A envoltória normalizada em relação ao valor RMS é dada por $f_{P_1, \Theta_1, P_2, \Theta_2}(\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2) = f_{R_1, \Theta_1, R_2, \Theta_2}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) |J|$, em que $P_1 = R_1 / \hat{r}_1$, $P_2 = R_2 / \hat{r}_2$ e $|J| = \hat{r}_1 \hat{r}_2$. Após o processo de transformação de variáveis e considerando $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$, a FDP conjunta envoltória-fase normalizada obtida é dada em (22), no topo da próxima página, com $0 \leq \rho_1, \rho_2 < \infty$ e $-\pi \leq \theta_1, \theta_2 < \pi$. Integrando (22), a FDP conjunta da fase é obtida por

$$f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{P_1, \Theta_1, P_2, \Theta_2}(\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2) d\rho_1 d\rho_2. \quad (21)$$

A expressão em (22) se reduz ao modelo η - μ bivariável com condição balanceada em termos do número de *clusters* [7] para $p = 0$ e o modelo Nakagami- m bivariável [6] é obtido para o caso em que $p = 0$, $\eta_1 = \eta_2 = 1$ e $\mu = m/2$.

IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

A Figura 1 apresenta alguns gráficos da FDP conjunta de fase $f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2)$ para um valor fixo $\mu = 2,25$, no cenário descorrelacionado, $\lambda = 0$, e correlacionado, $\lambda = \{0, 1; 0, 6\}$, e variando-se os parâmetros p e $\eta = \eta_1 = \eta_2$. Nos comentários a seguir, para facilitar a identificação, serão denominadas de *elevações* as concentrações de massa de probabilidade.

Na Figura 1(a) observa-se que a FDP conjunta de fase apresenta as elevações uniformemente distribuídas ao longo do plano (θ_1, θ_2) dado $p = 0$ (caso em que existe um balanceamento do número de *clusters* entre as componentes em fase e quadratura) e $\eta = 1$ (caso em que existe um balanceamento de potência entre as componentes em fase e quadratura). Comparando-se as Figuras 1(a) e 1(b), em que ocorre um aumento no coeficiente de correlação λ de 0 para 0,1, nota-se que as elevações que continuam em destaque são apenas aquelas nas quais o par de ângulos de localização, (θ_1, θ_2) , são iguais em módulo entre si ($|\theta_1| = |\theta_2|$), ou, em outras palavras, as que estão na diagonal do plano (θ_1, θ_2) . Estes cenários são relativos ao modelo clássico Nakagami- m com $m = 2,25$ abordado em [6].

Comparando-se os cenários correlacionados das Figuras 1(b) e 1(c), quando ocorre um desbalanceamento de potência representado pelo parâmetro $\eta = 0,3$, $\eta \rightarrow 0$ ($0 < \eta < 1$), as elevações tendem a se distribuir no plano (θ_1, θ_2) da seguinte maneira: dois grupos com duas elevações, sendo que cada grupo localiza-se em torno de $(\pm\pi/2, \pm\pi/2)$.

Nos cenários correlacionados e com desbalanceamento do número de *clusters* das Figuras 1(d) e 1(e), os parâmetros

$$\begin{aligned}
 f_{P_1, \Theta_1, P_2, \Theta_2}(\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2) &= \frac{\lambda^{2-2\mu} ((1+p)\mu)^{\mu(1+p)+1} (\rho_1 \rho_2)^{2\mu+1} |\cos \theta_1 \cos \theta_2|^{\mu(1+p)}}{(1-\lambda^2)^2 \Gamma(\mu(1+p))} \\
 &\times \frac{(\mu(1-p))^{\mu(1-p)+1} |\sin \theta_1 \sin \theta_2|^{\mu(1-p)}}{\Gamma(\mu(1-p))} (\eta_1 \eta_2)^{-\frac{1}{2}(\mu(1+p)+1)} \left(\frac{1}{(\eta_1+1)(\eta_2+1)} \right)^{-1(1+\mu)} \\
 &\times \exp\left(-\frac{\mu(1+p)(\eta_1(\eta_2+1)\rho_2^2 \cos^2 \theta_2 + \eta_2(\eta_1+1)\rho_1^2 \cos^2 \theta_1)}{\eta_1 \eta_2 (1-\lambda^2)} \right) \exp\left(-\frac{\mu(1-p)((\eta_2+1)\rho_2^2 \sin^2 \theta_2 + (\eta_1+1)\rho_1^2 \sin^2 \theta_1)}{(1-\lambda^2)} \right) \\
 &\times \exp\left(\frac{2\lambda \mu(1+p) \rho_1 \rho_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sqrt{\eta_1 \eta_2} \sqrt{(\eta_1+1)(\eta_2+1)}}{\eta_1 \eta_2 (1-\lambda^2)} \right) \exp\left(\frac{2\lambda \mu(1-p) \rho_1 \rho_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sqrt{(\eta_1+1)(\eta_2+1)}}{(1-\lambda^2)} \right) \\
 &\times I_{\mu(1+p)-1} \left(\frac{2\lambda \mu(1+p) \sqrt{(\eta_1+1)(\eta_2+1)} \rho_1 \rho_2 |\cos \theta_1 \cos \theta_2|}{(1-\lambda^2) \sqrt{\eta_1 \eta_2}} \right) I_{\mu(1-p)-1} \left(\frac{2\lambda \mu(1-p) \sqrt{(\eta_1+1)(\eta_2+1)} \rho_1 \rho_2 |\sin \theta_1 \sin \theta_2|}{(1-\lambda^2)} \right) \\
 &\times \operatorname{sech} \left(\frac{2\lambda \mu(1+p) \sqrt{(\eta_1+1)(\eta_2+1)} \rho_1 \rho_2 |\cos \theta_1 \cos \theta_2|}{(1-\lambda^2) \sqrt{\eta_1 \eta_2}} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{2\lambda \mu(1-p) \sqrt{(\eta_1+1)(\eta_2+1)} \rho_1 \rho_2 |\sin \theta_1 \sin \theta_2|}{(1-\lambda^2)} \right) \quad (22)
 \end{aligned}$$

foram ajustados de tal forma que $\eta \rightarrow 0$ ($0 < \eta < 1$) juntamente com $p \rightarrow -1$ ou à medida que $p \rightarrow -1$ mantendo o valor de $\eta = 1$. Nestes casos, assim como no cenário da Figura 1(c), as elevações se distribuem ao longo do plano (θ_1, θ_2) da seguinte forma: dois grupos com quatro elevações em cada grupo e localizados em torno de $(\pm\pi/2, \pm\pi/2)$. Nestes casos, a potência média total tende a ficar mais na componente em quadratura e menos na componente em fase em qualquer uma dessas três situações: i) $\eta \rightarrow 0$ ($0 < \eta < 1$ e $p = 0$), ii) à medida que $p \rightarrow -1$ (para $\eta_1 = \eta_2 = 1$), ou iii) $p \rightarrow -1$ juntamente com $\eta \rightarrow 0$ ($0 < \eta < 1$).

Observa-se que para η crescente ($\eta > 1$ e $p = 0$), comparando-se agora as Figuras 1(b) e 1(f), as elevações tendem a se distribuir ao longo do plano (θ_1, θ_2) , da seguinte maneira: quatro elevações ao redor de $(\pm\pi, \pm\pi)$ e um grupo de quatro elevações ao redor de $(0,0)$.

Sobre os resultados nas Figuras 1(g) e 1(h), à medida que $p \rightarrow 1$ para η constante em $\eta_1 = \eta_2 = 1$ e para η crescente ($\eta > 1$) juntamente com $p \rightarrow 1$, as elevações tendem a se distribuir da seguinte forma: quatro elevações localizadas em torno de $(\pm\pi, \pm\pi)$ e um grupo de quatro elevações localizado em torno de $(0,0)$, assim como no cenário da Figura 1(f). Nestes casos, a potência média total tende a ficar mais concentrada na componente em fase e menos na componente em quadratura em quaisquer das três situações: i) η crescente ($\eta > 1$ e $p = 0$), ii) à medida que $p \rightarrow 1$ para η constante em $\eta_1 = \eta_2 = 1$, ou iii) para η crescente ($\eta > 1$) juntamente com $p \rightarrow 1$.

Observa-se da Figura 1(i) – agora com um valor de coeficiente de correlação $\lambda = 0,6$ – que o valor de $p = -0,8$ está próximo do seu limite ($p = -1$), para $\eta = 1,8$, e mesmo assim as elevações, que estão na diagonal do plano (θ_1, θ_2) , permanecem concentradas em torno de $(\pm\pi, \pm\pi)$ e de $(0,0)$ (deveriam estar mais ao redor de $(\pm\pi/2, \pm\pi/2)$). Fato semelhante acontece no cenário da Figura 1(j) em que $p = 0,78$ está próximo do seu limite ($p = 1$), para $\eta = 0,5$ e $\lambda = 0,6$, e mesmo assim as elevações, que estão na diagonal do plano (θ_1, θ_2) , permanecem concentradas em torno de $(\pm\pi/2, \pm\pi/2)$ (deveriam estar mais ao redor de $(\pm\pi, \pm\pi)$ e de $(0,0)$). Esses dois casos mostram que o controle de potência total das componentes em fase e quadratura é mais sensível

ao parâmetro η do que ao parâmetro p .

Adicionalmente, na comparação das Figura 1(i) e 1(j) com as Figuras 1(d) até 1(h), onde o parâmetro lambda foi aumentado de 0,1 para 0,6, observa-se, também, que à medida que a correlação aumentar ($\lambda \rightarrow 1$), para os demais parâmetros fixos, as elevações que continuam em destaque são apenas aquelas que estão na diagonal do plano (θ_1, θ_2) .

V. CONCLUSÕES

Neste artigo foi proposto a inclusão do desbalanceamento do número de *clusters* entre as componentes em fase e quadratura no modelo complexo η - μ , através do acréscimo de um parâmetro de fase, envolvendo dois processos correlacionados. O modelo proposto permitiu uma modelagem mais geral em que dois modelos já existentes na literatura são casos particulares do modelo aqui apresentado. A análise de desempenho de sistemas de comunicação sem fio, a banda de coerência, o tempo de coerência e a distância de coerência, agora com um modelo mais próximo da realidade prática, podem ser realizados em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- [1] M. D. Yacoub, “The κ - μ distribution and the η - μ distribution,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 49, no. 1, pp. 68–81, Feb. 2007.
- [2] M. D. Yacoub, J. E. V. Bautista, and L. G. R. Guedes, “On higher order statistics of the Nakagami- m distribution,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 48, no. 3, pp. 790–794, May. 1999.
- [3] D. B. Costa, J. C. S. S. Filho, M. D. Yacoub, and G. Fraidenraich, “Second-order statistics of η - μ ,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 7, no. 3, pp. 819–824, Mar. 2008.
- [4] J. C. S. S. Filho, M. D. Yacoub, and G. Fraidenraich, “A simple accurate method for generating autocorrelated Nakagami- m envelope sequences,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 11, no. 3, pp. 231–233, Mar. 2007.
- [5] M. D. Yacoub, “Nakagami- m phase-envelope joint distribution: A new model,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 59, no. 3, pp. 1552–1557, Mar. 2010.
- [6] T. A. M. Bairros and M. D. Yacoub, “Distribuição conjunta fase-envoltória Nakagami- m bivariável,” in *Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT2015)*, Set. 2015.
- [7] A. P. Oliveira, T. A. M. Bairros, R. A. A. Souza, and M. D. Yacoub, “A bivariate η - μ complex fading model,” in *Proceedings of the 2019 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC)-Aveiro-Portugal*, Nov. 2019.
- [8] K. A. Hamdi, “Analysis of OFDM over Nakagami- m fading with non-uniform phase distributions,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 11, no. 2, pp. 488–492, Feb. 2012.

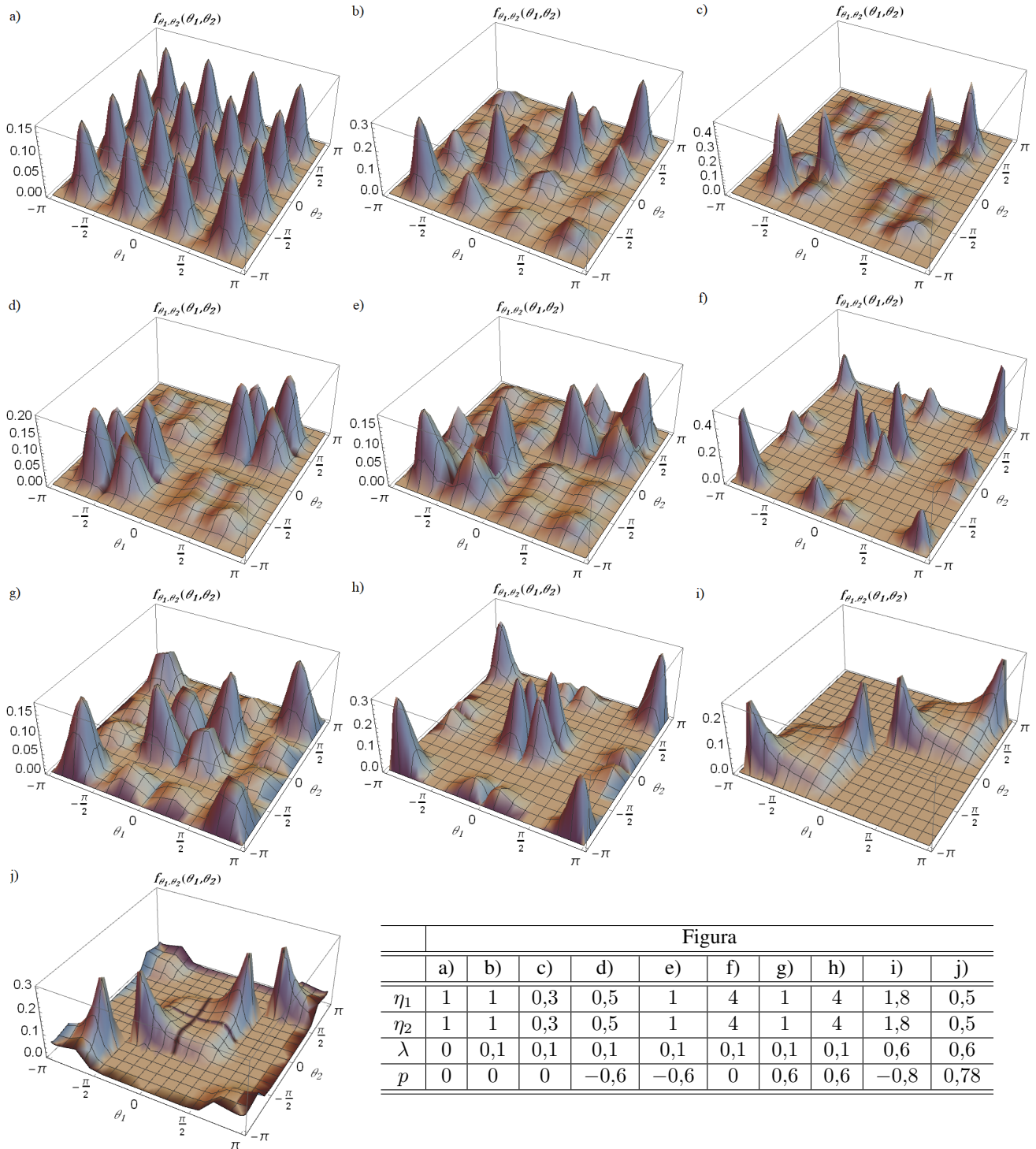


Fig. 1. FDPs conjunta de fase para $\mu = 2,25$ fixo, variando-se os parâmetros de balanceamento do número de clusters p , balanceamento de potência $\eta = \eta_1 = \eta_2$ e correlação λ .

- [9] T. R. C. Zhong, S. Jin and K. k. Wong, "On the capacity of non-uniform phase MIMO Nakagami- m fading channels," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 14, no. 6, pp. 536–538, Jun. 2010.
- [10] D. B. da Costa and M. D. Yacoub, "The η - μ joint phase-envelope distribution," *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 6, pp. 195–198, Apr. 2007.
- [11] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 17th ed. Burlington, MA, USA: Academic Press, 2007.
- [12] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications, Incorporated, 1972.