

# Um Algoritmo Rápido para a Multiplicação de Octônios

H. B. A. Barbosa, L. B. da Silva, G. Jerônimo da Silva Jr. e R. M. Campello de Souza .

**Resumo**— Este trabalho propõe um algoritmo rápido para multiplicar dois octônios. Enquanto utilizando o método direto são necessárias 64 multiplicações e 56 adições, o algoritmo proposto utiliza 30 multiplicações e 94 adições, reduzindo a complexidade multiplicativa para computação do produto de octônios.

**Palavras-Chave**— Complexidade multiplicativa, octônios, algoritmos rápidos, matrizes autossimilares, números hipercomplexos, números de Cayley.

**Abstract**— This work proposes a fast algorithm for computing a product of two octonions. The direct computation of an octonion product requires 64 multiplications and 56 additions, while the proposed algorithm uses 30 multiplications and 94 additions, reducing the multiplicative complexity necessary to compute this product.

**Keywords**— Multiplicative complexity, octonions, fast algorithms, self-similar matrices, hypercomplex numbers.

## I. INTRODUÇÃO

A álgebra de números hipercomplexos foi criada no intuito de generalizar números complexos e, por muito tempo, permaneceu restrita ao contexto da matemática pura [1].

Recentemente, com a necessidade de processar um volume cada vez maior de dados, tem sido investigado na literatura o uso dessas álgebras no contexto de processamento de sinais. Foram propostos filtros digitais com coeficientes hipercomplexos [2] e [3], além de diversas transformadas hipercomplexas, especialmente para imagens coloridas [4] e [5].

Pouco se tem estudado, porém, a complexidade para se multiplicar dois números hipercomplexos. Este artigo se dedica a estudar e propor um algoritmo rápido para um caso particular desses números hipercomplexos, os octônios.

Na seção II, são conceituados os octônios, assim como o seu produto. Na seção III, são introduzidos os conceitos de matriz autossimilar e de matriz quase autossimilar e é mostrada a relação dessas matrizes com o produto de octônios. A seção IV apresenta o algoritmo proposto e a seção V examina as complexidades multiplicativa e aditiva do mesmo. As conclusões do trabalho são apresentadas na Seção VI.

## II. OCTÔNIOS

Os octônios foram construídos por John Graves em 1843, inspirado pela descoberta dos quatérnios por William Rowan

L. B. da Silva, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco / UNIFBV - Centro Universitário Boa Viagem, Recife - PE, e-mail: luciano.lucianobarboza@gmail.com; ; H. B. A. Barbosa, e-mail: helder.alves@ufpe.br; G. Jerônimo da Silva Jr., e-mail: gilson.silvajr@ufpe.br; R. M. Campello de Souza, e-mail: ricardo.csouza@ufpe.br, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife - PE.

Hamilton [6]. Independentemente, porém, Arthur Cayley registrou sua descoberta num artigo, antes de Graves. Os octônios, também conhecidos como números de Cayley, constituem uma álgebra de divisão 8-dimensional sobre os reais e podem ser obtidos pelo processo de duplicação de Cayley-Dickson por meio dos quatérnios [7].

De acordo com [8] um octônio sobre o corpo  $\mathbb{R}$  é um número da forma

$$a = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4 + a_5\mathbf{e}_5 + a_6\mathbf{e}_6 + a_7\mathbf{e}_7 + a_8\mathbf{e}_8,$$

em que  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 8$ ,  $\mathbf{e}_1 = 1$  e  $\mathbf{e}_j$ ,  $j = 2, \dots, 8$ , são unidades imaginárias com multiplicação definida segundo a Tabela I.

TABELA I

TABELA DE MULTIPLICAÇÃO DAS UNIDADES IMAGINÁRIAS DE UM OCTÔNIO.

$\times$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_8$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_8$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_8$	$\mathbf{e}_7$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_8$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_6$
$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_8$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_5$
$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_8$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_8$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_8$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_8$	$\mathbf{e}_8$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$

Por essa definição o produto  $ab$ , de dois octônios, em que

$$a = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4 + a_5\mathbf{e}_5 + a_6\mathbf{e}_6 + a_7\mathbf{e}_7 + a_8\mathbf{e}_8,$$

$$b = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 + b_4\mathbf{e}_4 + b_5\mathbf{e}_5 + b_6\mathbf{e}_6 + b_7\mathbf{e}_7 + b_8\mathbf{e}_8,$$

pode ser representado como o produto matricial

$$\mathbf{Y} = \mathbf{O}_8 \mathbf{X}$$

em que

$$\mathbf{Y} = [-y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8]^T,$$

$$\mathbf{X} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8]^T,$$

e

$$\mathbf{O}_8 = \begin{bmatrix} -b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ b_2 & b_1 & b_4 & -b_3 & b_6 & -b_5 & -b_8 & b_7 \\ b_3 & -b_4 & b_1 & b_2 & b_7 & b_8 & -b_5 & -b_6 \\ b_4 & b_3 & -b_2 & b_1 & b_8 & -b_7 & b_6 & -b_5 \\ b_5 & -b_6 & -b_7 & -b_8 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_6 & b_5 & -b_8 & b_7 & -b_2 & b_1 & -b_4 & b_3 \\ b_7 & b_8 & b_5 & -b_6 & -b_3 & b_4 & b_1 & -b_2 \\ b_8 & -b_7 & b_6 & b_5 & -b_4 & -b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{X}$  representando o octônio  $a$  e  $\mathbf{O}_8$  representando o octônio  $b$ .

Observa-se que, por meio do método direto, o produto de dois octônios pode ser computado utilizando-se 64 multiplicações e 56 adições.

### III. MATRIZES AUTOSSIMILARES

O conceito de matrizes autossimilares é introduzido por [9]. Toda essa seção baseia-se nas ideias desenvolvidas nesse artigo. Também aqui é apresentada a metodologia necessária para construção do algoritmo para o produto de dois octônios.

*Definição 1:* Uma matriz  $\mathbf{A}$  de ordem 2 é definida como autossimilar se apresenta a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}.$$

Em geral uma matriz de ordem  $2^n$  é denominada autossimilar se tem a forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{11} \end{bmatrix},$$

em que  $\mathbf{A}_{11}$  e  $\mathbf{A}_{12}$  são autossimilares de ordem  $2^{n-1}$ . Uma matriz autossimilar de ordem  $2^n$  é denominada aqui por  $AS_{2^n}$ .

*Exemplo 1:* Como um caso de particular interesse para este artigo, ilustra-se o conceito de matriz autossimilar com uma matriz  $AS_8$ , dada por

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ z_2 & z_1 & z_4 & z_3 & z_6 & z_5 & z_8 & z_7 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ z_3 & z_4 & z_1 & z_2 & z_7 & z_8 & z_5 & z_6 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 & z_8 & z_7 & z_6 & z_5 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_6 & z_5 & z_8 & z_7 & z_2 & z_1 & z_4 & z_3 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ z_7 & z_8 & z_5 & z_6 & z_3 & z_4 & z_1 & z_2 \\ z_8 & z_7 & z_6 & z_5 & z_4 & z_3 & z_2 & z_1 \end{bmatrix}.$$

*Definição 2:* Seja  $\mathbf{A}$  uma matriz de ordem  $2^n$ . Diz-se que  $\mathbf{A}$  é quase autossimilar, denominada por  $QAS_{2^n}$ , se a matriz formada pelos valores absolutos dos seus elementos, denotada por  $\mathbf{A}_{|\cdot|}$ , é autossimilar de ordem  $2^n$ . Denota-se por  $Q_{2^n}$  a classe de matrizes  $QAS_{2^n}$ .

*Exemplo 2:* A matriz  $\mathbf{O}_8$  que representa  $b$  no produto  $ab$  de octônios, definida na Seção II deste artigo, é um exemplo de matriz  $QAS_8$ , pois  $\mathbf{O}_8|_{|\cdot|}$ , dada por

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ b_2 & b_1 & b_4 & b_3 & b_6 & b_5 & b_8 & b_7 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ b_3 & b_4 & b_1 & b_2 & b_7 & b_8 & b_5 & b_6 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_8 & b_7 & b_6 & b_5 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_6 & b_5 & b_8 & b_7 & b_2 & b_1 & b_4 & b_3 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ b_7 & b_8 & b_5 & b_6 & b_3 & b_4 & b_1 & b_2 \\ b_8 & b_7 & b_6 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix},$$

é uma matriz  $AS_8$ .

Considere agora uma matriz  $QAS_2 \mathbf{A}$  dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}.$$

Pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} -z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2z_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{bmatrix} -z_1 & -z_2 \\ -z_2 & -z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2z_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2z_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2z_1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Note que em (1) e (2) a matriz  $QAS_2 \mathbf{A}$  foi expressa como uma matriz  $AS_2$  adicionada a uma ou mais matrizes de posto unitário. As matrizes adicionais, de posto unitário, são denominadas fatores de ajuste.

O número desses fatores de ajuste pode ser interpretado como uma medida de dissimilaridade entre a matriz  $QAS_2 \mathbf{A}$  e uma matriz  $AS_2$  pertencente a  $QAS_2$ , em que cada fator de ajuste não nulo corresponde a uma unidade dessa dissimilaridade.

*Definição 3:* Seja  $\mathbf{A} \in Q_{2^n}$  e considere

- i)  $\sigma_A(+z_j)$  o número de ocorrências positivas do elemento  $z_j$  na matriz  $\mathbf{A}$ . Por definição  $z_j = 0$  será contabilizado como um elemento positivo;
- ii)  $\sigma_A(-z_j)$  o número de ocorrências negativas do elemento  $-z_j$  na matriz  $\mathbf{A}$ .

Define-se a dissimilaridade de uma matriz  $QAS_{2^n} \mathbf{A} \in Q_{2^n}$ , denotada por  $D(\mathbf{A})$ , como sendo o menor número de fatores de ajuste necessários para expressá-la por meio de uma matriz  $AS_{2^n}$  pertencente a  $Q_{2^n}$ .

Pode-se calcular essa dissimilaridade como sendo

$$D(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{2^n} \min\{\sigma_A(+z_j), \sigma_A(-z_j)\}. \quad (3)$$

*Exemplo 3:* Considere mais uma vez a matriz  $\mathbf{O}_8$ , que representa  $b$  no produto de octônios  $ab$  definido Seção II:

$$\begin{bmatrix} -b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ b_2 & b_1 & b_4 & -b_3 & b_6 & -b_5 & -b_8 & b_7 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ b_3 & -b_4 & b_1 & b_2 & b_7 & b_8 & -b_5 & -b_6 \\ b_4 & b_3 & -b_2 & b_1 & b_8 & -b_7 & b_6 & -b_5 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ b_5 & -b_6 & -b_7 & -b_8 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_6 & b_5 & -b_8 & b_7 & -b_2 & b_1 & -b_4 & b_3 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ b_7 & b_8 & b_5 & -b_6 & -b_3 & b_4 & b_1 & -b_2 \\ b_8 & -b_7 & b_6 & b_5 & -b_4 & -b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{O}_8}(+b_1) &= 7, & \sigma_{\mathbf{O}_8}(-b_1) &= 1, \\ \sigma_{\mathbf{O}_8}(+b_2) &= 5, & \sigma_{\mathbf{O}_8}(-b_2) &= 3, \\ \sigma_{\mathbf{O}_8}(+b_3) &= 5, & \sigma_{\mathbf{O}_8}(-b_3) &= 3, \\ \sigma_{\mathbf{O}_8}(+b_4) &= 5, & \sigma_{\mathbf{O}_8}(-b_4) &= 3, \\ \sigma_{\mathbf{O}_8}(+b_5) &= 5, & \sigma_{\mathbf{O}_8}(-b_5) &= 3, \\ \sigma_{\mathbf{O}_8}(+b_6) &= 5, & \sigma_{\mathbf{O}_8}(-b_6) &= 3, \\ \sigma_{\mathbf{O}_8}(+b_7) &= 5, & \sigma_{\mathbf{O}_8}(-b_7) &= 3, \\ \sigma_{\mathbf{O}_8}(+b_8) &= 5, & \sigma_{\mathbf{O}_8}(-b_8) &= 3. \end{aligned}$$

Utilizando (3) verifica-se que  $D(\mathbf{O}_8) = 22$ , o que significa que existe uma matriz  $AS_8$ , em  $Q_8$ , a 22 fatores de ajuste de  $\mathbf{O}_8$ .

Embora esse método determine o número de fatores de ajuste que serve como medida de dissimilaridade entre uma matriz quase autossimilar e a mais próxima matriz autossimilar de sua classe, não há indicativo de como conseguir tais fatores. Para encontrá-los pode-se utilizar o seguinte procedimento:

- 1) Se  $\sigma_A(+z_j) \geq \sigma_A(-z_j)$ , substituir, em  $\mathbf{A}$ ,  $-z_j$  por  $z_j - 2z_j$ ;
- 2) Se  $\sigma_A(+z_j) < \sigma_A(-z_j)$ , substituir, em  $\mathbf{A}$ ,  $z_j$  por  $-z_j + 2z_j$ ;
- 3) Se  $\sigma_A(+z_j) = 0$  ou  $\sigma_A(-z_j) = 0$  nenhuma modificação deve ser feita.

*Exemplo 4:* Aplicando o procedimento acima ao exemplo anterior:

- 1)  $\sigma_{\mathbf{O}_8}(+b_1) = 7$  e  $\sigma_{\mathbf{O}_8}(-b_1) = 1$ , logo deve-se substituir em  $\mathbf{O}_8$   $-b_1$  por  $b_1 - 2b_1$ ;
- 2) Para  $k = 1, 2, \dots, 8$ ,  $\sigma_{\mathbf{O}_8}(+b_k) = 5$  e  $\sigma_{\mathbf{O}_8}(-b_k) = 3$ , deve-se substituir em  $\mathbf{O}_8$   $-b_k$  por  $b_k - 2b_k$ .

Pode-se reescrever  $\mathbf{O}_8$  da seguinte forma:

$$\mathbf{O}_8 = \mathbf{O}_8 \cdot | \cdot - 2\mathbf{F}_8, \quad (4)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_8 = & b_1\mathbf{F}_8(1, 1) + b_3\mathbf{F}_8(2, 4) + b_5\mathbf{F}_8(2, 6) + b_8\mathbf{F}_8(2, 7) \\ & + b_4\mathbf{F}_8(3, 2) + b_5\mathbf{F}_8(3, 7) + b_6\mathbf{F}_8(3, 8) + b_2\mathbf{F}_8(4, 3) \\ & + b_7\mathbf{F}_8(4, 6) + b_5\mathbf{F}_8(4, 8) + b_6\mathbf{F}_8(5, 2) + b_7\mathbf{F}_8(5, 3) \\ & + b_8\mathbf{F}_8(5, 4) + b_8\mathbf{F}_8(6, 3) + b_2\mathbf{F}_8(6, 5) + b_4\mathbf{F}_8(6, 7) \\ & + b_6\mathbf{F}_8(7, 4) + b_3\mathbf{F}_8(7, 5) + b_2\mathbf{F}_8(7, 8) + b_7\mathbf{F}_8(8, 2) \\ & + b_4\mathbf{F}_8(8, 5) + b_3\mathbf{F}_8(8, 6), \end{aligned} \quad (5)$$

em que o elemento  $f_{ij}$  da matriz  $\mathbf{F}_8(r, s)$  é definido como

$$f_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = r \text{ e } j = s, \quad r, s \in \{1, 2, \dots, 8\}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que todos os fatores de ajuste calculados são matrizes de posto unitário.

As matrizes autossimilares podem ser decompostas em uma base de matrizes de posto unitário. Em [9] encontra-se o seguinte resultado:

*Teorema 1:* Seja  $\mathbf{A}$  uma matriz  $AS_{2^n}$ . Então existe um conjunto  $\mathcal{B}_{2^n} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{2^n}\}$  em que cada  $\mathbf{B}_j$  é uma matriz de posto unitário,  $j = 1, 2, \dots, 2^n$ , de modo que

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{2^n} \beta_j(\mathbf{A})\mathbf{B}_j,$$

em que  $\mathbf{B}_j = \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_j^T$ ,  $\mathbf{b}_j = [b_i]_{2^n \times 1}$ ,  $b_i \in \{-1, +1\}$ ,  $\beta_j(\mathbf{A}) = \frac{1}{2^n} [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{2^n}] \cdot \mathbf{b}_j$ ,  $[z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{2^n}]$  é a primeira linha da matriz  $\mathbf{A}$ ,  $\cdot$  indica o produto interno e  $\otimes$  indica o produto de Kronecker.

*Exemplo 5:* Considere  $\mathbf{A}$  uma matriz  $AS_2$ . Usando o Teorema 1 pode-se escrever

$$\mathbf{A} = \beta_0(\mathbf{A})\mathbf{B}_0 + \beta_1(\mathbf{A})\mathbf{B}_1, \quad (6)$$

em que

$$\beta_0(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} [z_1 + z_2], \quad \beta_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} [z_1 - z_2],$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{b}_0^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes [1 \ 1]$ ,

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_1^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \otimes [1 \ -1],$$

$$\beta_0(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} [z_1 \ z_2] \cdot \mathbf{b}_0 \quad \text{e} \quad \beta_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} [z_1 \ z_2] \cdot \mathbf{b}_1.$$

Note adicionalmente que o conjunto  $\mathcal{B} = \{\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1\}$  é composto apenas por matrizes de posto unitário.

Para matrizes  $AS_{2^n}$ , com  $n \geq 2$ , as matrizes de posto unitário têm, naturalmente, dimensões compatíveis. Para gerar essas matrizes encontra-se em [9] a seguinte definição:

*Definição 4:* Sejam  $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{B}_{11}, \mathbf{B}_{12}, \dots, \mathbf{B}_{1m}\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{B}_{21}, \mathbf{B}_{22}, \dots, \mathbf{B}_{2n}\}$  dois conjuntos de matrizes. Define-se o Produto de Kronecker desses dois conjuntos como sendo

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \cup_{i=1}^m \cup_{j=1}^n \{\mathbf{B}_{1i} \otimes \mathbf{B}_{2j}\}.$$

Posta esta definição, [9] estabelece o seguinte procedimento para a geração do conjunto  $\mathcal{B}_{2^n}$  das matrizes de posto unitário, utilizadas no Teorema 1, na decomposição das matrizes  $AS_{2^n}$ :

*Teorema 2:* Seja  $\mathcal{B}_{2^n}$  um conjunto de matrizes de posto unitário para decompor uma matriz  $AS_{2^n}$ , conforme Teorema 1. Para  $n \geq 2$ , tem-se  $\mathcal{B}_{2^n} = \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_{2^{n-1}}$ .

*Exemplo 6:* Para o presente artigo são geradas como exemplo as matrizes da decomposição de uma  $AS_8$ . Pelo Teorema 2 tem-se

$$\mathcal{B}_8 = \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_2$$

$$= \{\mathbf{B}_{000}, \mathbf{B}_{001}, \mathbf{B}_{010}, \mathbf{B}_{011}, \mathbf{B}_{100}, \mathbf{B}_{101}, \mathbf{B}_{110}, \mathbf{B}_{111}\}$$

em que

$$\mathbf{B}_{ijk} = \mathbf{B}_i \otimes \mathbf{B}_j \otimes \mathbf{B}_k = \mathbf{b}_{ijk} \otimes \mathbf{b}_{ijk}^T, \quad i, j, k \in \{0, 1\},$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{b}_{000}^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1],$$

$$\mathbf{b}_{001}^T = [1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1],$$

$$\mathbf{b}_{010}^T = [1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1],$$

$$\mathbf{b}_{011}^T = [1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1],$$

$$\mathbf{b}_{100}^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1],$$

$$\mathbf{b}_{101}^T = [1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1],$$

$$\mathbf{b}_{110}^T = [1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1],$$

$$\mathbf{b}_{111}^T = [1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1]. \quad (7)$$

#### IV. ALGORITMO RÁPIDO PARA O PRODUTO DE DOIS OCTÔNIOS

Pela Expressão (4) pode-se escrever o produto de dois octônios como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{O}_8 \mathbf{X} = \mathbf{O}_{8|\cdot} \mathbf{X} - 2\mathbf{F}_8 \mathbf{X}, \quad (8)$$

em que  $\mathbf{O}_{8|\cdot}$  é  $AS_8$  e, como pode-se observar em (5),  $\mathbf{F}_8$  é uma soma de matrizes de posto unitário, de modo que  $\mathbf{F}_8 \mathbf{X}$  consiste em 22 termos de ajuste, em que cada termo de ajuste contribui com uma multiplicação na execução do algoritmo.

Pelo Teorema 1 pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_{8|\cdot} &= \beta_{000}(\mathbf{O}_{8|\cdot})\mathbf{B}_{000} + \beta_{001}(\mathbf{O}_{8|\cdot})\mathbf{B}_{001} \\ &+ \beta_{010}(\mathbf{O}_{8|\cdot})\mathbf{B}_{010} + \beta_{011}(\mathbf{O}_{8|\cdot})\mathbf{B}_{011} + \beta_{100}(\mathbf{O}_{8|\cdot})\mathbf{B}_{100} \\ &+ \beta_{101}(\mathbf{O}_{8|\cdot})\mathbf{B}_{101} + \beta_{110}(\mathbf{O}_{8|\cdot})\mathbf{B}_{110} + \beta_{111}(\mathbf{O}_{8|\cdot})\mathbf{B}_{111}, \end{aligned} \quad (9)$$

em que

$$\beta_{ijk}(\mathbf{O}_{8|\cdot}) = \frac{1}{8} [ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6 \ b_7 \ b_8 ] \cdot \mathbf{b}_{ijk},$$

e  $\mathbf{B}_{ijk}$ ,  $\mathbf{b}_{ijk}$  são definidos em (7).

Note-se assim que a matriz  $\mathbf{O}_{8|\cdot}$ , assim como  $\mathbf{F}_8$ , também é uma soma de matrizes de posto unitário, de modo que o produto de octônios como um todo, definido em (8), pode ser escrito como o produto de uma soma de matrizes de posto unitário por um vetor.

#### V. COMPLEXIDADE ARITMÉTICA DA MULTIPLICAÇÃO DE OCTÔNIOS

A complexidade aritmética do produto de dois números hipercomplexos está relacionada com o número de multiplicações e de adições do algoritmo utilizado. Dado um número de multiplicações, considera-se mais eficiente o algoritmo com menor número de adições.

Conforme estabelecido em [10], a cota inferior do número de multiplicações para uma álgebra de divisão  $n$ -dimensional sobre o corpo dos reais é  $2n - 1$ . Portanto, a cota inferior para o produto de octônios é de 15 multiplicações reais.

Neste artigo define-se o produto de octônios como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{O}_8 \mathbf{X} = \mathbf{O}_{8|\cdot} \mathbf{X} - 2\mathbf{F}_8 \mathbf{X}.$$

Pela Expressão (9) pode-se verificar que o produto  $\mathbf{O}_{8|\cdot} \mathbf{X}$  pode ser computado com 8 multiplicações enquanto pela expressão (5) o termo  $\mathbf{F}_8 \mathbf{X}$  pode ser computado com 22 multiplicações. Assim a complexidade multiplicativa do produto de octônios, para o algoritmo aqui proposto, é de 30 multiplicações reais.

A determinação da complexidade aditiva do produto de dois octônios é menos direta. Pela Expressão (5) observa-se que  $\mathbf{F}_8 \mathbf{X}$  pode ser computado com 21 adições e a própria expressão  $\mathbf{O}_{8|\cdot} \mathbf{X} - 2\mathbf{F}_8 \mathbf{X}$  adiciona uma adição ao processo, totalizando 22 adições.

Para calcular o número de adições do termo  $\mathbf{O}_{8|\cdot} \mathbf{X}$ , como definido em (9), é necessário calcular os coeficientes  $\beta_{ijk}(\mathbf{O}_{8|\cdot})$ ,  $i, j, k \in \{0, 1\}$ , que envolvem várias adições, e os produtos  $\mathbf{B}_{ijk} \mathbf{X}$ ,  $i, j, k \in \{0, 1\}$ , que também envolvem adições.

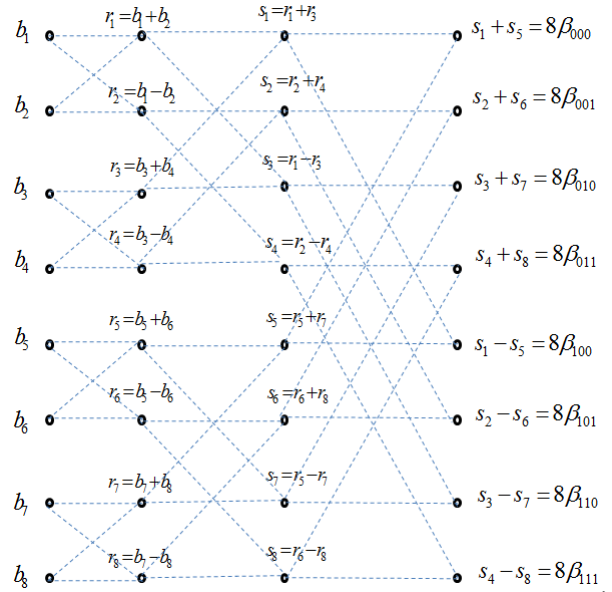


Fig. 1. Diagrama de adições para coeficientes da expansão autossimilar de  $\mathbf{O}_8$ .

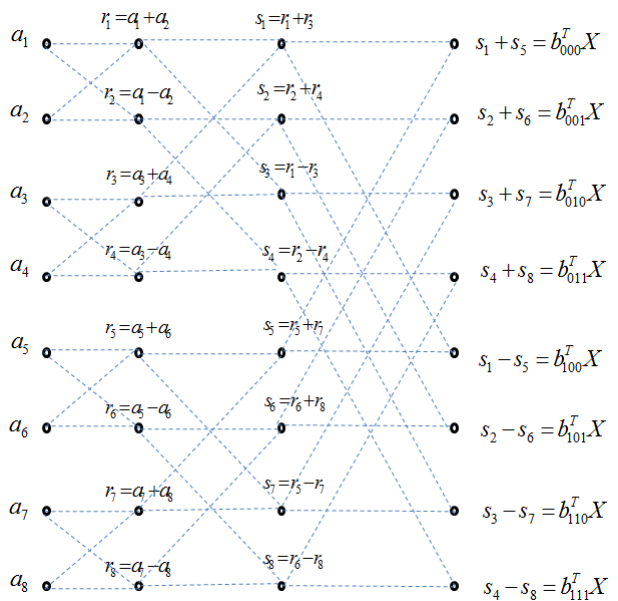


Fig. 2. Diagrama de adições dos coeficientes do vetor  $\mathbf{X}$ .

Considere o esquema da Figura 1. Note que para obtenção dos coeficientes  $\beta_{ijk}(\mathbf{O}_{8|\cdot})$  da expressão são necessárias 24 adições. Além disso para cada produto  $\mathbf{B}_{ijk} \mathbf{X}$ ,  $i, j, k \in \{0, 1\}$ , é necessário realizar adições com os componentes do vetor  $\mathbf{X}$ . Assim, de forma absolutamente similar, pela Figura 2, pode-se ver que também são necessárias 24 adições para obter todos os termos desse produto, totalizando assim um total de 48 adições.

Adicionalmente, a própria Expressão (9) apresenta adições unindo seus componentes. Essas adições são adições de vetores colunas  $8 \times 1$ , a saber,  $P_{ijk} = \beta_{ijk}(\mathbf{O}_{8|\cdot})\mathbf{B}_{ijk} \mathbf{X}$ ,  $i, j, k \in \{0, 1\}$ , dados por:

$$P_{000} = [ p_1 \ p_1 \ p_1 \ p_1 \ p_1 \ p_1 \ p_1 \ p_1 ]^T,$$

$$\begin{aligned}
 P_{001} &= [ p_2 & -p_2 & p_2 & -p_2 & p_2 & -p_2 & p_2 & -p_2 ]^T, \\
 P_{010} &= [ p_3 & p_3 & -p_3 & -p_3 & p_3 & p_3 & -p_3 & -p_3 ]^T, \\
 P_{011} &= [ p_4 & -p_4 & -p_4 & p_4 & p_4 & -p_4 & -p_4 & p_4 ]^T, \\
 P_{100} &= [ p_5 & p_5 & p_5 & p_5 & -p_5 & -p_5 & -p_5 & -p_5 ]^T, \\
 P_{101} &= [ p_6 & -p_6 & p_6 & -p_6 & -p_6 & p_6 & -p_6 & p_6 ]^T, \\
 P_{110} &= [ p_7 & p_7 & -p_7 & -p_7 & -p_7 & -p_7 & p_7 & p_7 ]^T, \\
 P_{111} &= [ p_8 & -p_8 & -p_8 & p_8 & p_8 & -p_8 & -p_8 & p_8 ]^T,
 \end{aligned} \tag{10}$$

em que

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \beta_{000}(\mathbf{O}_{8|1})(\mathbf{b}_{000}^T \cdot \mathbf{X}), & p_2 &= \beta_{001}(\mathbf{O}_{8|1})(\mathbf{b}_{001}^T \cdot \mathbf{X}), \\
 p_3 &= \beta_{010}(\mathbf{O}_{8|1})(\mathbf{b}_{010}^T \cdot \mathbf{X}), & p_4 &= \beta_{011}(\mathbf{O}_{8|1})(\mathbf{b}_{011}^T \cdot \mathbf{X}), \\
 p_5 &= \beta_{100}(\mathbf{O}_{8|1})(\mathbf{b}_{100}^T \cdot \mathbf{X}), & p_6 &= \beta_{101}(\mathbf{O}_{8|1})(\mathbf{b}_{101}^T \cdot \mathbf{X}), \\
 p_7 &= \beta_{110}(\mathbf{O}_{8|1})(\mathbf{b}_{110}^T \cdot \mathbf{X}), & p_8 &= \beta_{111}(\mathbf{O}_{8|1})(\mathbf{b}_{111}^T \cdot \mathbf{X}).
 \end{aligned}$$

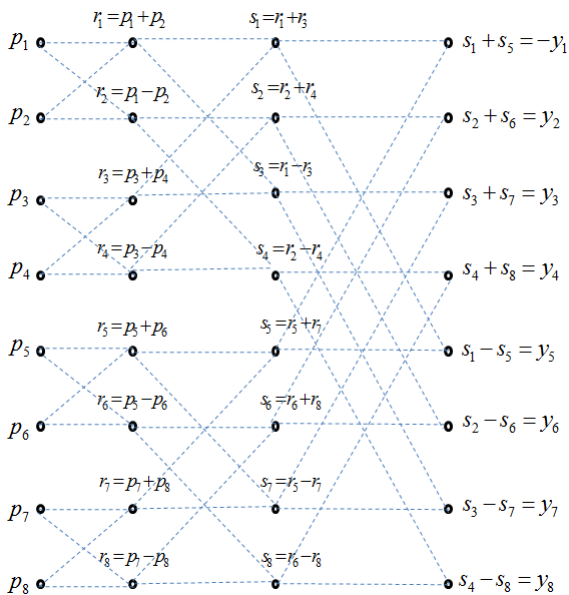


Fig. 3. Diagrama de adições do vetor  $\mathbf{Y}$ .

Desta forma, tem-se

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 P_{ijk},$$

o que implica, e esse fato pode ser observado na Figura 3, que para calcular o vetor  $\mathbf{Y}$  são necessárias outras 24 adições.

Desta forma, pela Expressão (8) o número total de adições para calcular o produto de dois octônios é 94. A Tabela II faz uma comparação entre o algoritmo aqui proposto e alguns outros referidos na literatura.

Dentre os algoritmos mostrados na tabela, o algoritmo proposto nesse artigo, juntamente ao algoritmo de Tariov, é o que possui a menor complexidade multiplicativa.

TABELA II

COMPARAÇÃO DAS COMPLEXIDADES ADITIVA E MULTIPLICATIVA DE ALGUNS ALGORITMOS CITADOS NA LITERATURA PARA MULTIPLICAÇÃO DE OCTÔNIOS.

Método de Computação	Multiplicações	Adições
Método direto	64	56
Algoritmo de Tariov (Citado em [8])	30	94
Algoritmo de Cariow, proposto em [8]	32	88
Algoritmo de Cariow, proposto em [11]	48	56
Algoritmo Proposto neste Artigo	30	94

## VI. CONCLUSÕES

Este artigo propõe um novo procedimento para a multiplicação de octônios. Foi mostrado que a matriz que define o produto de octônios é quase autossimilar, podendo ser convertida numa autossimilar e alguns fatores de ajuste. Com a expansão da matriz autossimilar obtida em matrizes de posto-1, foi proposto um algoritmo rápido para multiplicação de dois octônios. O algoritmo obtido utiliza 30 multiplicações e 94 adições, enquanto o método direto utiliza 64 multiplicações e 56 adições.

## VII. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## REFERÊNCIAS

- [1] D. Alfsmann; H. G. Göckler, S. J. Sangwine, and T. A. Ell, Hypercomplex Algebras in Digital Signal Processing: Benefits and Drawbacks (Tutorial), Proc. EURASIP 15th European Signal Processing Conf. EUSIPCO, Poznań, Poland, pp. 1322–1326, 2007.
- [2] K. Ueda and S. Takahashi, Digital Filters with Hypercomplex Coefficients, IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems (ISCAS'93), Chicago, USA, v. 1, pp. 479–482, 1993.
- [3] H.-D. Schütte and J. Wenzel, Hypercomplex Numbers in Digital Signal Processing, Proc. ISCAS '90, New Orleans, USA, pp. 1557–1560, 1990.
- [4] T. A. Ell and S. J. Sangwine, Hypercomplex Fourier Transforms of Color Images, IEEE Transactions on Image Processing, v. 16, pp. 22–35, Jan 2007.
- [5] S.-C. Pei, J.-H. Chang, and J.-J. Ding, Commutative Reduced Biquaternions and their Fourier Transform for Signal and Image Processing Applications, IEEE Transactions on Signal Processing, v. 52, n. 7, pp. 2012–2031, 2004.
- [6] T. Dray and C.A. Manogue, The Geometry of the Octonions. Singapore: World Scientific, 2015.
- [7] I.L. Kantor and A.S. Solodovnikov, Hypercomplex numbers: An Elementary Introduction to Algebras. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [8] A. Cariow and G. Cariowa, Algorithm for multiplying two octonions, Radioelectronics and Communications Systems, v. 55, pp. 464–473, n° 10, 2012.
- [9] L. B. da Silva, H. B. A. Barbosa, G. Jerônimo da Silva Jr. e R. M. Campello de Souza, Matrizes Autossimilares: Definições e Cenários de Aplicação em Processamento de Sinais, SBRT 2020.
- [10] C. Fiduccia and Y. Zalcstein, Algebras Having Linear Multiplicative Complexities, Journal of the ACM (JACM), v. 24, pp. 311–331, April 1977.
- [11] A. Cariow and A. Cariowa, Low Complexity Algorithm for Multiplying Octonions, Przegląd Elektrotechniczny, Szczecin, v. 90, pp. 109–112, Jan 2014.