

Um Algoritmo Rápido para a Multiplicação de Quatérnios

H. B. A. Barbosa, L. B. da Silva, G. Jerônimo da Silva Jr. e R. M. Campello de Souza .

Resumo— Este trabalho propõe um algoritmo rápido para multiplicar dois quatérnios. A computação direta desse produto exige 16 multiplicações e 12 adições. O algoritmo proposto aqui utiliza 8 multiplicações e 28 adições, reduzindo, assim, a complexidade multiplicativa para computação do produto de quatérnios.

Palavras-Chave— Complexidade multiplicativa, quatérnios, algoritmos rápidos, matrizes autossimilares, números hipercomplexos.

Abstract— This work proposes a fast algorithm for computing a product of two quaternions. The direct computation of this product requires 16 multiplications and 12 additions. The algorithm proposed here uses 8 multiplications and 28 additions, thus reducing the multiplicative complexity for computing the quaternion product.

Keywords— Multiplicative complexity, quaternions, fast algorithms, self-similar matrices, hypercomplex numbers.

I. INTRODUÇÃO

Os números hipercomplexos foram criados com o objetivo de fornecer uma álgebra que generalizasse os números complexos em dimensões maiores [1].

A necessidade de processamentos cada vez mais complexos, envolvendo dados multidimensionais, tem estimulado a comunidade de processamento de sinais a buscar na álgebra de números hipercomplexos, em especial dos quatérnios, ferramentas analíticas que possibilitem a análise e a síntese de sinais. Os quatérnios possuem a característica de representar transformações afins sobre figuras geométricas num espaço tridimensional de forma compacta e eficiente, sendo bastante utilizados no contexto de processamento de imagens coloridas. Recentemente, foram criadas diversas transformadas usando a álgebra dos quatérnios: Fourier [2], [3] e [4], wavelet [5], além de filtros adaptativos [6] e [7]. Além dessas aplicações, tem crescido o uso de quatérnios para desenvolver perceptrons multicamadas [8] e [9], sendo utilizados em áreas como predição de séries caóticas [10] e robótica [11].

Sobre a complexidade multiplicativa dessas álgebras hipercomplexas, entretanto, pouco tem sido feito. Desenvolvimentos importantes sobre a complexidade de produto de quatérnios foram conseguidos na década de 70, com trabalhos como [12] e [13]. Nesses trabalhos são construídos algoritmos de baixa complexidade multiplicativa para o produto de dois quatérnios.

L. B. da Silva, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco / UNIFBV - Centro Universitário Boa Viagem, Recife - PE, e-mail: luciano.lucianobarboza@gmail.com; ; H. B. A. Barbosa, e-mail: helder.alves@ufpe.br; G. Jerônimo da Silva Jr., e-mail: gilson.silvajr@ufpe.br; R. M. Campello de Souza, e-mail: ricardo.csouza@ufpe.br, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife - PE.

Neste artigo retoma-se o tema e propõe-se um algoritmo rápido para a multiplicação de quatérnios com a mesma complexidade multiplicativa, porém com menor complexidade aditiva.

Na Seção II, os quatérnios e seu produto são definidos. Na Seção III são apresentados os conceitos de matrizes autossimilares e de matrizes quase autossimilares e sua relação com o produto de quatérnios é estabelecida. A Seção IV apresenta o algoritmo proposto e a Seção V examina as complexidades multiplicativa e aditiva do mesmo. As conclusões do trabalho são apresentadas na Seção VI.

II. QUATÉRNIOS

Os quatérnios foram descobertos por William Rowan Hamilton, que buscava uma generalização dos números complexos, de tal forma que a interpretação geométrica da multiplicação desses números consistisse numa rotação no espaço tridimensional. Os quatérnios, também conhecidos como quatérnios reais ou quatérnios de Hamilton, constituem uma álgebra de divisão 4-dimensional sobre os reais e podem ser obtidos pelo processo de duplicação de Cayley-Dickson a partir de dois números complexos [1].

Um quatérnio sobre o corpo \mathbb{R} é um número da forma

$$a = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4,$$

em que $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3, 4$, $\mathbf{e}_1 = 1$ e \mathbf{e}_j , $j = 2, 3, 4$, são unidades imaginárias com multiplicações definidas segundo a Tabela I.

TABELA I

TABELA DE MULTIPLICAÇÕES DAS UNIDADES IMAGINÁRIAS DE UM QUATÉRNIO.

\times	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_4
\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_4
\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_2	$-\mathbf{e}_1$	\mathbf{e}_4	$-\mathbf{e}_3$
\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_3	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_1$	\mathbf{e}_2
\mathbf{e}_4	\mathbf{e}_4	\mathbf{e}_3	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$

Por essa definição, o produto ab de dois quatérnios, em que

$$a = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4,$$

$$b = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + b_4 \mathbf{e}_4,$$

pode ser representado como o produto matricial

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}_4 \mathbf{X},$$

em que

$$\mathbf{Y} = [-y_1, y_2, y_3, y_4]^T,$$

$$\mathbf{X} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$$

e

$$\mathbf{Q}_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} -b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_1 & b_4 & -b_3 \\ \hline b_3 & -b_4 & b_1 & b_2 \\ b_4 & b_3 & -b_2 & b_1 \end{array} \right],$$

\mathbf{X} representando o quatérnio a e \mathbf{Q}_4 representando o quatérnio b .

Observa-se que através do método direto, o produto de dois quatérnios pode ser computado utilizando-se 16 multiplicações e 12 adições.

III. MATRIZES AUTOSSIMILARES

O conceito de matrizes autossimilares é introduzido por [14] e toda esta seção baseia-se nas ideias desenvolvidas neste artigo, o qual apresenta a metodologia necessária para construção do algoritmo para o produto de dois quatérnios.

Definição 1: Uma matriz \mathbf{A} de ordem 2 é definida como autossimilar se apresenta a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}.$$

Em geral uma matriz de ordem 2^n é denominada autossimilar se tem a forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{11} \end{bmatrix},$$

em que \mathbf{A}_{11} e \mathbf{A}_{12} são autossimilares de ordem 2^{n-1} . Uma matriz autossimilar de ordem 2^n é denominada aqui por AS_{2^n} .

Exemplo 1: Como um caso de particular interesse para este artigo, ilustra-se o conceito com a matriz AS_4 , dada por

$$\left[\begin{array}{cc|cc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_2 & z_1 & z_4 & z_3 \\ \hline z_3 & z_4 & z_1 & z_2 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 \end{array} \right].$$

Definição 2: Seja \mathbf{A} uma matriz de ordem 2^n . Diz-se que \mathbf{A} é quase autossimilar, denominada por QAS_{2^n} , se a matriz formada pelos valores absolutos dos seus elementos, denotada por $\mathbf{A}_{|\cdot|}$, é autossimilar de ordem 2^n . Denota-se por Q_{2^n} a classe de matrizes QAS_{2^n} .

Exemplo 2: A matriz \mathbf{Q}_4 , que representa b no produto ab de quatérnios, definida na Seção II deste artigo, é um exemplo de matriz QAS_4 , pois $\mathbf{Q}_{4|\cdot|}$, dada por

$$\mathbf{Q}_{4|\cdot|} = \left[\begin{array}{cc|cc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_1 & b_4 & b_3 \\ \hline b_3 & b_4 & b_1 & b_2 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \end{array} \right],$$

é uma matriz AS_4 .

Considere agora, uma matriz $QAS_2 \mathbf{A}$ dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & -z_1 \end{bmatrix}.$$

Pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & -z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2z_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{bmatrix} -z_1 & -z_2 \\ -z_2 & -z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2z_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2z_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2z_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Note que em (1) e (2) a matriz $QAS_2 \mathbf{A}$ foi expressa como uma matriz AS_2 adicionada a uma ou mais matrizes de posto unitário. As matrizes adicionais, de posto unitário, são denominadas fatores de ajuste.

O número desses fatores de ajuste pode ser interpretado como uma medida de dissimilaridade entre a matriz $QAS_2 \mathbf{A}$ e uma matriz AS_2 pertencente a Q_2 , em que cada fator de ajuste não nulo corresponde a uma unidade dessa dissimilaridade.

Definição 3: Seja $\mathbf{A} \in Q_{2^n}$ e considere

- i) $\sigma_A(+z_j)$ o número de ocorrências positivas do elemento z_j na matriz \mathbf{A} . Por definição $z_j = 0$ será contabilizado como um elemento positivo;
- ii) $\sigma_A(-z_j)$ o número de ocorrências negativas do elemento z_j na matriz \mathbf{A} .

Define-se a dissimilaridade de uma matriz $QAS \mathbf{A} \in Q_{2^n}$, denotada por $D(\mathbf{A})$, como sendo o menor número de fatores de ajuste necessários para expressá-la por meio de uma matriz AS_{2^n} pertencente a Q_{2^n} .

Calcula-se essa dissimilaridade como sendo

$$D(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{2^n} \min\{\sigma_A(+z_j), \sigma_A(-z_j)\}. \quad (3)$$

Exemplo 3: Considere mais uma vez a matriz \mathbf{Q}_4 , que representa b no produto de quatérnios ab definido na Seção II:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_1 & b_4 & -b_3 \\ \hline b_3 & -b_4 & b_1 & b_2 \\ b_4 & b_3 & -b_2 & b_1 \end{array} \right].$$

Note que

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{Q}_4}(+b_1) &= 3, & \sigma_{\mathbf{Q}_4}(-b_1) &= 1, \\ \sigma_{\mathbf{Q}_4}(+b_2) &= 3, & \sigma_{\mathbf{Q}_4}(-b_2) &= 1, \\ \sigma_{\mathbf{Q}_4}(+b_3) &= 3, & \sigma_{\mathbf{Q}_4}(-b_3) &= 1, \\ \sigma_{\mathbf{Q}_4}(+b_4) &= 3, & \sigma_{\mathbf{Q}_4}(-b_4) &= 1. \end{aligned}$$

Utilizando (3) verifica-se que $D(\mathbf{Q}_4) = 4$, o que significa que existe uma matriz AS_4 , em Q_4 , a 4 fatores de ajuste de \mathbf{Q}_4 .

Embora esse método determine o número de fatores de ajuste que serve como medida de dissimilaridade entre uma matriz quase autossimilar e a mais próxima matriz autossimilar de sua classe, não há indicativo de como conseguir tais fatores. Para encontrá-los utiliza-se o seguinte procedimento:

- 1) Se $\sigma_A(+z_j) \geq \sigma_A(-z_j)$, substituir, em \mathbf{A} , $-z_j$ por $z_j - 2z_j$;
- 2) Se $\sigma_A(+z_j) < \sigma_A(-z_j)$, substituir, em \mathbf{A} , z_j por $-z_j + 2z_j$;
- 3) Se $\sigma_A(+z_j) = 0$ ou $\sigma_A(-z_j) = 0$ nenhuma modificação deve ser feita.

Exemplo 4: Aplicando o procedimento acima ao exemplo anterior verifica-se que, para $k = 1, 2, 3, 4$ resulta $\sigma_{\mathbf{Q}_4}(+b_k) = 3$ e $\sigma_{\mathbf{Q}_4}(-b_k) = 1$, deve-se substituir em \mathbf{Q}_4 os valores $-b_k$ por $b_k - 2b_k$. Dessa forma \mathbf{Q}_4 é reescrito da seguinte forma:

$$\mathbf{Q}_4 = \mathbf{Q}_{4|\cdot|} - 2\mathbf{F}_4, \quad (4)$$

em que

$$\mathbf{F}_4 = b_1\mathbf{F}_4(1, 1) + b_3\mathbf{F}_4(2, 4) + b_4\mathbf{F}_4(3, 2) + b_2\mathbf{F}_4(4, 3) \quad (5)$$

e $\mathbf{F}_4(r, s) = [f_{ij}]$ com

$$f_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = r \text{ e } j = s, \quad r, s \in \{1, 2, \dots, 4\}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que todos os fatores de ajuste calculados são matrizes de posto unitário.

Em [14] o seguinte resultado garante que uma matriz autossimilar pode ser decomposta como uma combinação linear de matrizes de posto unitário

Teorema 1: Seja \mathbf{A} uma matriz AS_{2^n} . Então existe um conjunto $\mathcal{B}_{2^n} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{2^n}\}$ em que cada \mathbf{B}_j é uma matriz de posto unitário, $j = 1, 2, \dots, 2^n$, de modo que

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{2^n} \beta_j(\mathbf{A})\mathbf{B}_j,$$

em que $\mathbf{B}_j = \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_j^T$, $\mathbf{b}_j = [b_i]_{2^n \times 1}$, $b_i \in \{-1, +1\}$, $\beta_j(\mathbf{A}) = \frac{1}{2^n} [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{2^n}] \cdot \mathbf{b}_j$, $[z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{2^n}]$ é a primeira linha da matriz \mathbf{A} , \cdot indica o produto interno e \otimes indica o produto de Kronecker.

Para a utilização do Teorema 1, é necessário um método para a geração das matrizes do conjunto \mathcal{B}_{2^n} . Considere a seguinte definição, encontrada em [14]:

Definição 4: Sejam $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{B}_{11}, \mathbf{B}_{12}, \dots, \mathbf{B}_{1m}\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{B}_{21}, \mathbf{B}_{22}, \dots, \mathbf{B}_{2n}\}$ dois conjuntos de matrizes. Define-se o Produto de Kronecker desses dois conjuntos como sendo

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \cup_{i=1}^m \cup_{j=1}^n \{\mathbf{B}_{1i} \otimes \mathbf{B}_{2j}\}.$$

Posta esta definição, é proposto, também em [14], o seguinte procedimento:

Teorema 2: Seja \mathcal{B}_{2^n} um conjunto de matrizes de posto unitário utilizadas para decompor uma matriz AS_{2^n} , conforme Teorema 1. Para $n \geq 2$ tem-se $\mathcal{B}_{2^n} = \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_{2^{n-1}}$.

Exemplo 5: A título de exemplo, utiliza-se o Teorema 2 e gerar as matrizes utilizadas para a decomposição de uma AS_4 . Conforme [14] verifica-se primeiramente que

$$\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1\},$$

em que

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, pelo Teorema 2,

$$\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_2 = \{\mathbf{B}_{00}, \mathbf{B}_{01}, \mathbf{B}_{10}, \mathbf{B}_{11}\},$$

em que

$$\mathbf{B}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De modo geral, ainda pode-se escrever

$$\mathbf{B}_{ij} = \mathbf{B}_i \otimes \mathbf{B}_j = \mathbf{b}_{ij} \otimes \mathbf{b}_{ij}^T, \quad i, j, \in \{0, 1\},$$

$$\mathbf{b}_{00}^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1],$$

$$\mathbf{b}_{01}^T = [1 \ -1 \ 1 \ -1],$$

$$\mathbf{b}_{10}^T = [1 \ 1 \ -1 \ -1],$$

$$\mathbf{b}_{11}^T = [1 \ -1 \ -1 \ 1]. \quad (6)$$

IV. ALGORITMO RÁPIDO PARA O PRODUTO DE DOIS QUATÉRNIOS

Pela Expressão (4) pode-se escrever o produto de dois quatérnios como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}_4\mathbf{X} = \mathbf{Q}_{4|\cdot|}\mathbf{X} - 2\mathbf{F}_4\mathbf{X}, \quad (7)$$

em que $\mathbf{Q}_{4|\cdot|}$ é AS_4 e, como pode-se observar em (5), \mathbf{F}_4 é uma soma de matrizes de posto unitário, de modo que $\mathbf{F}_4\mathbf{X}$ consiste em 4 termos de ajuste, em que cada termo de ajuste contribui com uma multiplicação na execução do algoritmo.

Pelo Teorema 1 pode-se escrever:

$$\mathbf{Q}_{4|\cdot|} = \beta_{00}(\mathbf{Q}_{4|\cdot|})\mathbf{B}_{00} + \beta_{01}(\mathbf{Q}_{4|\cdot|})\mathbf{B}_{01} + \beta_{10}(\mathbf{Q}_{4|\cdot|})\mathbf{B}_{10} + \beta_{11}(\mathbf{Q}_{4|\cdot|})\mathbf{B}_{11}, \quad (8)$$

em que

$$\beta_{ij}(\mathbf{Q}_{4|\cdot|}) = \frac{1}{4} [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4] \cdot \mathbf{b}_{ij},$$

e \mathbf{B}_{ij} , \mathbf{b}_{ij} são definidos em (6).

Note-se assim que a matriz $\mathbf{Q}_{4|\cdot|}$, assim como \mathbf{F}_4 , também é uma soma de matrizes de posto unitário, de modo que o produto de quatérnios como um todo, definido em (7), pode ser escrito como o produto de uma soma de matrizes de posto unitário por um vetor.

V. COMPLEXIDADE ARITMÉTICA DA MULTIPLICAÇÃO DE QUATÉRNIOS

O produto de quatérnios, conforme definição estabelecida na Seção II, exige 16 multiplicações e 12 adições reais quando é computada por meio do método direto.

Em geral, a complexidade multiplicativa mínima em uma álgebra de divisão de dimensão n é $2n - 1$ multiplicações reais, conforme estabelecido em [15]. Os quatérnios formam uma álgebra de divisão 4-dimensional, logo a cota inferior da complexidade multiplicativa dos quatérnios é de 7 multiplicações reais.

Neste artigo define-se o produto de quatérnios como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}_4 \mathbf{X} = \mathbf{Q}_{4|\cdot} \mathbf{X} - 2\mathbf{F}_4 \mathbf{X}.$$

Note que

- 1) $\beta_{ij}(\mathbf{Q}_{4|\cdot})$ é um número real;
- 2) Usando a notação definida em (6) tem-se que $\mathbf{B}_{ij} \mathbf{X} = (\mathbf{b}_{ij} \otimes \mathbf{b}_{ij}^T) \mathbf{X} = \mathbf{b}_{ij} (\mathbf{b}_{ij}^T \cdot \mathbf{X})$, com $i, j \in \{0, 1\}$. Essa operação tem como resultado um vetor cujas linhas são iguais ou divergem apenas em valor absoluto.

Dessa forma, pela Expressão (8), pode-se verificar que o produto $\mathbf{Q}_{4|\cdot} \mathbf{X}$ pode ser computado com 4 multiplicações enquanto pela Expressão (5) o termo $\mathbf{F}_4 \mathbf{X}$ pode ser computado com 4 multiplicações. Assim a complexidade multiplicativa do produto de quatérnios, para o algoritmo aqui proposto, é de 8 multiplicações.

Para o cálculo do número de adições utiliza-se o seguinte esquema:

- 1) Pela Expressão (5) observa-se que $\mathbf{F}_4 \mathbf{X}$ pode ser computado com 3 adições e a própria expressão $\mathbf{Q}_{4|\cdot} \mathbf{X} - 2\mathbf{F}_4 \mathbf{X}$ adiciona uma soma ao processo, totalizando 4 adições;
- 2) Para o número de adições do termo $\mathbf{Q}_{4|\cdot} \mathbf{X}$, como definido em (8), é necessário calcular os coeficientes $\beta_{ij}(\mathbf{Q}_{4|\cdot})$, $i, j \in \{0, 1\}$, que envolvem várias adições, e os produtos $\mathbf{B}_{ij} \mathbf{X}$, $i, j \in \{0, 1\}$, que também envolvem adições. Considere o esquema da Figura 1. Note que para se obter os coeficientes $\beta_{ij}(\mathbf{Q}_{4|\cdot})$ da expressão são necessárias 8 adições:

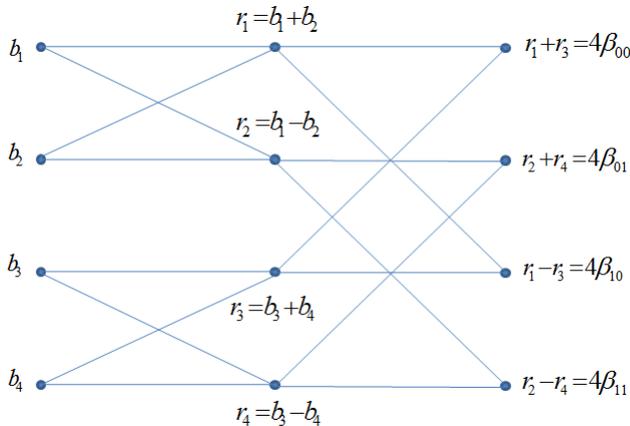


Fig. 1. Diagrama de adições para Coeficientes da Expansão Autossimilar de \mathbf{Q}_4 .

- 3) Para cada produto $\mathbf{B}_{ij} \mathbf{X} = \mathbf{b}_{ij} (\mathbf{b}_{ij}^T \cdot \mathbf{X})$, com $i, j \in \{0, 1\}$, é necessário fazer adições com os componentes do vetor \mathbf{X} , para calcular o termo $\mathbf{b}_{ij}^T \cdot \mathbf{X}$. Assim, de forma absolutamente similar, pela Figura 2, pode-se ver que também são necessárias 8 adições:

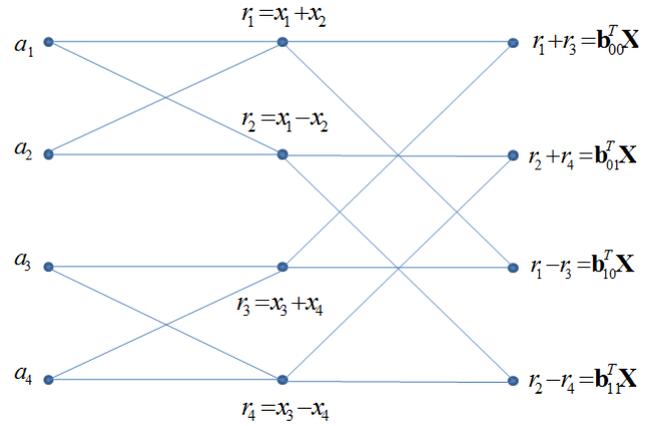


Fig. 2. Diagrama de adições para o Produto das Matrizes Autossimilares da Expansão de $\mathbf{Q}_{4|\cdot}$ pelo vetor \mathbf{X} .

- 4) Uma vez computados os produtos $\mathbf{B}_{ij} \mathbf{X}$, $i, j \in \{0, 1\}$, calcula-se os termos $P_{ij} = \beta_{ij}(\mathbf{Q}_{4|\cdot})(\mathbf{B}_{ij} \mathbf{X})$, $i, j \in \{0, 1\}$, dados por:

$$\begin{aligned} P_{00} &= [p_1 \quad p_1 \quad p_1 \quad p_1]^T, \\ P_{01} &= [p_2 \quad -p_2 \quad p_2 \quad -p_2]^T, \\ P_{10} &= [p_3 \quad p_3 \quad -p_3 \quad -p_3]^T, \\ P_{11} &= [p_4 \quad -p_4 \quad -p_4 \quad p_4]^T, \end{aligned} \quad (9)$$

em que

$$\begin{aligned} p_1 &= \beta_{00}(\mathbf{Q}_{4|\cdot})(\mathbf{b}_{00}^T \cdot \mathbf{X}), & p_2 &= \beta_{01}(\mathbf{Q}_{4|\cdot})(\mathbf{b}_{01}^T \cdot \mathbf{X}), \\ p_3 &= \beta_{10}(\mathbf{Q}_{4|\cdot})(\mathbf{b}_{10}^T \cdot \mathbf{X}), & p_4 &= \beta_{11}(\mathbf{Q}_{4|\cdot})(\mathbf{b}_{11}^T \cdot \mathbf{X}). \end{aligned}$$

Desta forma tem-se:

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 P_{ij},$$

o que implica, e esse fato pode ser observado na Figura 3, que para calcular o vetor \mathbf{Y} são necessárias outras 8 adições.

Desta forma, o número total de adições para calcular o produto de dois quatérnios é 28. A Tabela II faz uma comparação entre o algoritmo aqui proposto e alguns outros referidos na literatura.

Dentre os algoritmos mostrados na tabela, o algoritmo proposto tem a mesma complexidade multiplicativa que o algoritmo de Makarov e o algoritmo de Howell/Lafon, porém apresenta menor complexidade aditiva.

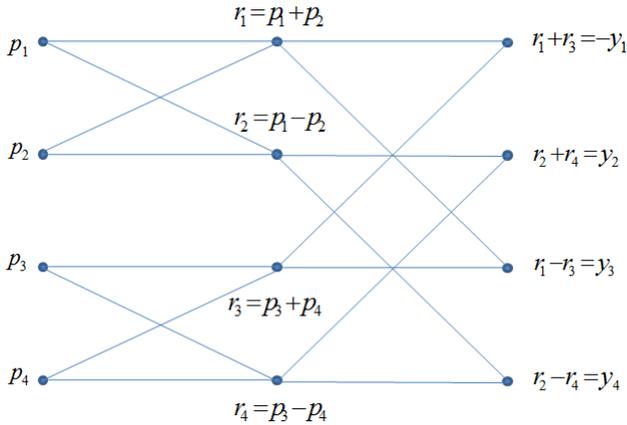


Fig. 3. Diagrama de adições do Vetor Y .

TABELA II

COMPARAÇÃO DAS COMPLEXIDADES ADITIVA E MULTIPLICATIVA DE ALGUNS ALGORITMOS CITADOS NA LITERATURA PARA MULTIPLICAÇÃO DE QUATÉRNIOS.

Método de Computação	Multiplicações	Adições
Método direto	16	12
Algoritmo de Makarov (em [13])	8	40
Algoritmo de Howell/Lafon (em [12])	8	40
Algoritmo Proposto neste Artigo	8	28

VI. CONCLUSÕES

Este artigo propõe uma nova abordagem para a multiplicação de quatérnios. Foi mostrado que a matriz que define o produto de quatérnios é quase autossimilar, podendo ser convertida numa autossimilar e alguns fatores de ajuste. Por meio da expansão da matriz autossimilar obtida em matrizes de posto-1, foi obtido um algoritmo rápido para multiplicação de dois quatérnios. O algoritmo obtido utiliza 8 multiplicações e 28 adições, enquanto o método direto utiliza 16 multiplicações e 12 adições. Em relação aos algoritmos propostos na literatura para a multiplicação de quatérnios, o algoritmo proposto neste trabalho é o que apresenta a menor complexidade aditiva.

VII. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

REFERÊNCIAS

- [1] I.L. Kantor and A.S. Solodovnikov. Hypercomplex numbers: An Elementary Introduction to Algebras. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [2] T. A. Ell and S. J. Sangwine, Hypercomplex Fourier Transforms of Color Images, IEEE Transactions on of Image Processing, v. 16, pp. 22–35, Jan 2007.
- [3] T.A. Ell, N. Le Bihan, S.J. Sangwine, Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing (Wiley, New York, 2014).
- [4] L. C. da Silva e J. B Lima, The Quaternion Fourier Number Transform. Circuits Syst Signal Process 37, 5486–5506 (2018).
- [5] P. Fletcher, S.J. Sangwine, The development of the quaternion wavelet transform. Signal Process. 136(7), 2–15 (2017).
- [6] T. Ogunfunmi, Adaptive filtering using complex data and quaternions. Proc. Comput. Sci. v. 61, pp. 334–340 (2015).
- [7] F. Ortolani, D. Commiello, M. Scarpiniti, A. Uncini, Frequency domain quaternion adaptive filters: algorithms and convergence performance. Signal Process. 136(7), 69–80 (2017).
- [8] T. Nitta, An Extension of the Back-propagation Algorithm to Quaternions. In Proceedings of International Conference on Neural Information Processing (ICONIP'96), volume 1, pages 247–250, 1996.
- [9] P. Arena, L. Fortuna, G. Muscato, M.G. Xibilia. Multilayer Perceptrons to Approximate Quaternion Valued Functions. Neural Networks, 10(2): 335–342, 1997.
- [10] P. Arena, S. Baglio, L. Fortuna, M. G. Xibilia, "Chaotic time-series prediction via quaternionic MLPs", Proceedings of the 1995 IEEE Int. Conf. on System Man and Cybernetics, 1995-Oct.
- [11] L. Fortuna, G. Muscato, M. Andxibilia, An hypercomplex neural network platform for robot positioning. In Circuits and Systems, 1996. ISCAS '96., Connecting the World., 1996 IEEE International Symposium on (May 1996), vol. 3, pp. 609–612.
- [12] T. D. Howell, J. C. Lafon, The complexity of the quaternion product, TR 75-245, Cornell Univ., <http://citeseer.nj.nec.com/howell75complexity.html>, June 1975.
- [13] O. M. Makarov, An algorithm for the multiplication of two quaternions, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 17:6 (1977), 221–222.
- [14] L. B. da Silva, H. B. A. Barbosa, G. Jerônimo da Silva Jr. e R. M. Campello de Souza, Matrizes Autossimilares: Definições e Cenários de Aplicação em Processamento de Sinais, SBrT 2020.
- [15] C. Fiduccia and Y. Zalcstein, Algebras Having Linear Multiplicative Complexities, Journal of the ACM (JACM), v. 24, pp. 311–331, April 1977.