Matrizes Autossimilares: Definições e Cenários de Aplicação em Processamento de Sinais

L. B. da Silva, H. B. A. Barbosa, G. Jerônimo da Silva Jr. e R. M. Campello de Souza .

***Resumo*— Este trabalho introduz os conceitos de matriz autossimilar e de matriz quase autossimilar assim como uma métrica entre uma matriz quase autossimilar e uma matriz autossimilar de sua classe. Um método sistemático para converter uma matriz quase autossimilar numa matriz autossimilar e eventuais fatores de ajuste é apresentado. Um método de decomposição de uma matriz autossimilar arbitrária em uma combinação linear de matrizes de posto-1 é apresentado. Como ilustração das técnicas propostas, algoritmos ótimos para a computação de uma DFT de comprimento 8 e de uma convolução cíclica de comprimento 4 são apresentados.**

***Palavras-Chave*— Matrizes autossimilares, algoritmos rápidos, decomposição de matrizes, matrizes de posto-1, complexidade multiplicativa.**

***Abstract*— This work introduces the concepts of self-similar matrix and quasi self-similar matrix, as well as a metric between a quasi self-similar matrix and a self-similar matrix of its class. A systematic method for converting a quasi self-similar matrix into a self-similar matrix and possible adjustment factors is presented. A method of expanding an arbitrary self-similar matrix as a linear combination of rank-one matrices is presented. As an illustration of the proposed techniques, optimum algorithms for computing a DFT of blocklength 8 and a cyclic convolution of blocklength 4 are obtained.**

***Keywords*— Self-Similar matrices, fast algorithms, matrix decomposition, rank-one matrices, multiplicative complexity.**

I. INTRODUÇÃO

Aplicações como multimídia, radar, sonar, tomografia computadorizada, dentre outras, processam volumes cada vez maiores de dados. Esse processamento pode ser computacionalmente caro, exigindo um número excessivo de multiplicações e adições [1]. Algoritmos rápidos são fundamentais para a implementação eficiente da computação de diversas ferramentas na engenharia tais como transformadas discretas (DFT – Discrete Fourier Transform, DCT – Discrete Cosine Transform, DHT - Discrete Hartley Transform, dentre outras) e a filtragem digital em dispositivos como um processador digital de sinais (DSP). Nesse sentido, pesquisadores buscam estipular o limite teórico na computação dessas ferramentas e produzem algoritmos rápidos que alcancem esse limite. Autores como Lafon [2] mostraram que a computação de baixa complexidade multiplicativa de formas bilineares está intimamente ligada ao posto tensorial das matrizes associadas a essas formas e pode ser implementada por meio da decomposição dessas matrizes em matrizes de posto-1. Posteriormente, em [3], foi proposto um algoritmo sistemático de busca para encontrar a decomposição formada pelo menor número de matrizes de posto-1 para um dado conjunto finito de matrizes racionais.

Neste artigo, são apresentados os conceitos de matrizes autossimilares e quase autossimilares, além de um procedimento sistemático para a decomposição de matrizes autossimilares em matrizes de posto-1. A Seção II conceitua matrizes autossimilares e quase autossimilares, além de propor uma métrica de dissimilaridade entre as mesmas e um método de converter uma matriz quase autossimilar numa autossimilar mais próxima de sua classe. A Seção III apresenta resultados fundamentais sobre a teoria das matrizes autossimilares, tal como a sua decomposição em matrizes de posto-1. Na Seção IV, são apresentados cenários possíveis de aplicação e são obtidos algoritmos rápidos utilizando a metodologia exposta. Na Seção V são apresentadas as conclusões do artigo.

L. B. da Silva, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco / UNIFBV - Centro Universitário Boa Viagem, Recife - PE, e-mail: luciano.lucianobarboza@gmail.com: ; H. B. A. Barbosa, e-mail: helder.alves@ufpe.br; G. Jerônimo da Silva Jr., e-mail: gilson.silvajr@ufpe.br; R. M. Campello de Souza, e-mail: ricardo.csouza@ufpe.br, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife - PE.

II. MATRIZES AUTOSSIMILARES

Definição 1: Uma matriz $\mathbf{A}$ de ordem 2 é autossimilar se apresenta a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}.$$

Em geral uma matriz de ordem 2^n é denominada autossimilar se tem a forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{11} \end{bmatrix},$$

em que $\mathbf{A}_{11}$ e $\mathbf{A}_{12}$ são autossimilares de ordem 2^{n-1}. Uma matriz autossimilar de ordem 2^n é denominada aqui por AS_{2^n}.

Exemplo 1: A matriz AS_8 é dada por

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\
z_2 & z_1 & z_4 & z_3 & z_6 & z_5 & z_8 & z_7 \\
-- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\
z_3 & z_4 & z_1 & z_2 & z_7 & z_8 & z_5 & z_6 \\
z_4 & z_3 & z_2 & z_1 & z_8 & z_7 & z_6 & z_5 \\
-- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\
z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\
z_6 & z_5 & z_8 & z_7 & z_2 & z_1 & z_4 & z_3 \\
-- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\
z_7 & z_8 & z_5 & z_6 & z_3 & z_4 & z_1 & z_2 \\
z_8 & z_7 & z_6 & z_5 & z_4 & z_3 & z_2 & z_1
\end{array}\right].$$

Definição 2: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz de ordem 2^n. Diz-se que $\mathbf{A}$ é quase autossimilar, denominada por QAS_{2^n}, se a matriz formada pelos valores absolutos dos seus elementos, denotada por $\mathbf{A}_{|.|}$, é autossimilar de ordem 2^n. Denota-se por Q_{2^n} a classe de matrizes QAS_{2^n}.

Exemplo 2: A matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -z_1 & z_2 & -z_3 & z_4 \\ -z_2 & z_1 & -z_4 & z_3 \\ z_3 & -z_4 & z_1 & z_2 \\ z_4 & z_3 & -z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

é QAS_4, visto que

$$\mathbf{A}_{|.|} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_2 & z_1 & z_4 & z_3 \\ z_3 & z_4 & z_1 & z_2 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

é AS_4.

Considere agora uma matriz $\mathbf{A} \in Q_2$ dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}.$$

Pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2z_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{bmatrix} -z_1 & -z_2 \\ -z_2 & -z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2z_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2z_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2z_1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Note que em (1) e (2) a matriz QAS_2 $\mathbf{A}$ foi expressa como uma matriz AS_2 adicionada a uma ou mais matrizes de posto unitário. As matrizes adicionais, de posto unitário, são denominadas fatores de ajuste. O número desses fatores de ajuste pode ser interpretado como uma medida de dissimilaridade entre a matriz QAS_2 $\mathbf{A}$ e uma matriz AS_2 pertencente a Q_2, em que cada fator de ajuste não nulo corresponde a uma unidade dessa dissimilaridade.

Definição 3: Seja $\mathbf{A} \in Q_{2^n}$ e considere

i) $\sigma_A(+z_j)$ o número de ocorrências positivas do elemento z_j na matriz $\mathbf{A}$. Por definição $z_j = 0$ será contabilizado como um elemento positivo;
ii) $\sigma_A(-z_j)$ o número de ocorrências negativas do elemento z_j na matriz $\mathbf{A}$.

Define-se a dissimilaridade de uma matriz QAS_{2^n} $\mathbf{A} \in Q_{2^n}$, denotada por $D(\mathbf{A})$, como sendo o menor número de fatores de ajuste necessários para expressá-la por meio de uma matriz AS_{2^n} pertencente a Q_{2^n}.

Pode-se calcular essa dissimilaridade como sendo

$$D(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{2^n} \min\{\sigma_A(+z_j), \sigma_A(-z_j)\}. \quad (3)$$

Exemplo 3: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -z_1 & z_2 & -z_3 & z_4 \\ z_2 & -z_1 & -z_4 & z_3 \\ -z_3 & z_4 & -z_1 & z_2 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

uma matriz QAS_4. Então

$$\begin{aligned} \sigma_A(+z_1) &= 1, & \sigma_A(-z_1) &= 3, \\ \sigma_A(+z_2) &= 4, & \sigma_A(-z_2) &= 0, \\ \sigma_A(+z_3) &= 2, & \sigma_A(-z_3) &= 2, \\ \sigma_A(+z_4) &= 3, & \sigma_A(-z_4) &= 1. \end{aligned}$$

Utilizando (3) verifica-se que $D(\mathbf{A}) = 4$, o que significa que existe uma matriz AS_4, em Q_4, a 4 fatores de ajuste de $\mathbf{A}$.

Embora esse método determine o número de fatores de ajuste que serve como medida de dissimilaridade entre uma matriz quase autossimilar e a mais próxima matriz autossimilar de sua classe, não há indicativo de como conseguir tais fatores. Para encontrá-los utiliza-se o seguinte procedimento:

1) Se $\sigma_A(+z_j) \geq \sigma_A(-z_j)$, substituir, em $\mathbf{A}$, $-z_j$ por $z_j - 2z_j$;
2) Se $\sigma_A(+z_j) < \sigma_A(-z_j)$, substituir, em $\mathbf{A}$, z_j por $-z_j + 2z_j$;
3) Se $\sigma_A(+z_j) = 0$ ou $\sigma_A(-z_j) = 0$ nenhuma modificação deve ser feita.

Exemplo 4: Aplicando o procedimento acima ao exemplo anterior, resulta:

1) $\sigma_A(+z_1) = 1$ e $\sigma_A(-z_1) = 3$, logo deve-se substituir em $\mathbf{A}$ z_1 por $-z_1 + 2z_1$;
2) $\sigma_A(+z_2) = 4$ e $\sigma_A(-z_2) = 0$, nenhuma modificação deve ser feita;
3) $\sigma_A(+z_3) = 2$ e $\sigma_A(-z_3) = 2$, logo deve-se substituir em $\mathbf{A}$ $-z_3$ por $z_3 - 2z_3$;
4) $\sigma_A(+z_4) = 3$ e $\sigma_A(-z_4) = 1$, deve-se substituir em $\mathbf{A}$ $-z_4$ por $z_4 - 2z_4$.

Pode-se reescrever $\mathbf{A}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -z_1 & z_2 & z_3 - 2z_3 & z_4 \\ z_2 & -z_1 & z_4 - 2z_4 & z_3 \\ z_3 - 2z_3 & z_4 & -z_1 & z_2 \\ z_4 & z_3 & z_2 & -z_1 + 2z_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_2 & -z_1 & z_4 & z_3 \\ z_3 & z_4 & -z_1 & z_2 \\ z_4 & z_3 & z_2 & -z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z_1 \end{bmatrix}.$$

Note que todos os fatores de ajuste calculados são matrizes de posto unitário.

III. RESULTADOS IMPORTANTES SOBRE AS MATRIZES AUTOSSIMILARES

Teorema 1: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz AS_{2^n}. Então existe um conjunto $\mathcal{B}_{2^n} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_{2^n}\}$ em que cada $\mathbf{B}_j$ é uma matriz de posto unitário, $j = 1, 2, \ldots, 2^n$, de modo que

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{2^n} \beta_j(\mathbf{A})\mathbf{B}_j,$$

em que $\mathbf{B}_j = \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_j^T$, $\mathbf{b}_j = [b_i]_{2^n \times 1}$, $b_i \in \{-1, +1\}$, $\beta_j(\mathbf{A}) = \frac{1}{2^n}[\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \ldots & z_{2^n} \end{array}] \cdot \mathbf{b}_j$, $[\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \ldots & z_{2^n} \end{array}]$ é a primeira linha da matriz $\mathbf{A}$, $\cdot$ indica o produto interno e $\otimes$ indica o produto de Kronecker.

Demonstração: Por indução em n.

1) Para $n = 2$ considere $\mathbf{A}$ uma matriz AS_2 dada por

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{array}\right].$$

Pode-se escrever $\mathbf{A}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = z_1 \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] + z_2 \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2} z_1 \left[\begin{array}{cc} 1+1 & 1-1 \\ 1-1 & 1+1 \end{array}\right] + \frac{1}{2} z_2 \left[\begin{array}{cc} 1-1 & 1+1 \\ 1+1 & 1-1 \end{array}\right].$$

Logo, pode-se escrever

$$\mathbf{A} = \beta_0(\mathbf{A})\mathbf{B}_0 + \beta_1(\mathbf{A})\mathbf{B}_1, \tag{4}$$

em que

$$\beta_0(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}[z_1 + z_2], \quad \beta_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}[z_1 - z_2],$$

$$\mathbf{B}_0 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_1 = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right].$$

Observe que $\mathbf{B}_0 = \mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{b}_0^T = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] \otimes [\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}]$,

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_1^T = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right] \otimes [\begin{array}{cc} 1 & -1 \end{array}],$$

$\beta_0(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}[\begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array}] \cdot \mathbf{b}_0$ e $\beta_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}[\begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array}] \cdot \mathbf{b}_1$.

Note adicionalmente que o conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1\}$ é composto apenas por matrizes de posto unitário.

2) Hipótese de Indução
Seja $\mathbf{A}$ uma matriz AS_{2^k} e seja o conjunto $\mathcal{B}_{2^k} = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_{2^k}\}$, em que $\mathbf{B}_j$, $j = 1, 2, \ldots, 2^k$, é uma matriz de posto unitário. Considere que

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{2^k} \beta_j(\mathbf{A})\mathbf{B}_j, \tag{5}$$

em que $\mathbf{B}_j = \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_j^T$, $\mathbf{b}_j = [b_i]_{2^n \times 1}$, $b_i \in \{-1, +1\}$, $\beta_j(\mathbf{A}) = \frac{1}{2^k}[\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \ldots & z_{2^k} \end{array}] \cdot \mathbf{b}_j$ e $[\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \ldots & z_{2^k} \end{array}]$ é a primeira linha da matriz $\mathbf{A}$.

Para $n = 2^{k+1}$, seja $\mathbf{A}$ uma matriz $AS_{2^{k+1}}$. Pela Definição 1,

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right],$$

em que $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}$ são AS_{2^k}, ambas com a primeira linha dada por $\{z_1, z_2, \ldots, z_{2^k}\}$, e $\mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{21}$ são AS_{2^k}, ambas com a primeira linha dada por $\{z_{2^k+1}, z_{2^k+2}, \ldots, z_{2^{k+1}}\}$. Assim pode-se escrever

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

e, pela hipótese de indução em (5) e pela Definição 1,

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{2^k} \left(\beta_j(\mathbf{A}_{11}) \left[\begin{array}{cc} \mathbf{B}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_j \end{array}\right] \right) + \sum_{j=1}^{2^k} \left(\beta_j(\mathbf{A}_{12}) \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{B}_j \\ \mathbf{B}_j & \mathbf{0} \end{array}\right] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2^k} (\beta_j(\mathbf{A}_{11}) + \beta_j(\mathbf{A}_{12})) \left[\begin{array}{cc} \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_j \\ \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_j \end{array}\right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2^k} (\beta_j(\mathbf{A}_{11}) - \beta_j(\mathbf{A}_{12})) \left[\begin{array}{cc} \mathbf{B}_j & -\mathbf{B}_j \\ -\mathbf{B}_j & \mathbf{B}_j \end{array}\right].$$

Considere $\beta_{j0}(\mathbf{A}) \triangleq \frac{1}{2}[\beta_j(\mathbf{A}_{11}) + \beta_j(\mathbf{A}_{12})]$

$$= \frac{1}{2^{k+1}} [[\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \ldots & z_{2^k} \end{array}] \cdot \mathbf{b}_j + [\begin{array}{cccc} z_{2^k+1} & z_{2^k+2} & \ldots & z_{2^{k+1}} \end{array}] \cdot \mathbf{b}_j]$$
$$= \frac{1}{2^{k+1}} [\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \ldots & z_{2^{k+1}} \end{array}] \cdot [\begin{array}{cc} \mathbf{b}j^T & \mathbf{b}j^T \end{array}]^T$$

e $\beta_{j1}(\mathbf{A}) \triangleq \frac{1}{2}[\beta_j(\mathbf{A}_{11}) - \beta_j(\mathbf{A}_{12})]$

$$= \frac{1}{2^{k+1}} [[\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \ldots & z_{2^k} \end{array}] \cdot \mathbf{b}_j - [\begin{array}{cccc} z_{2^k+1} & z_{2^k+2} & \ldots & z_{2^{k+1}} \end{array}] \cdot \mathbf{b}_j]$$
$$= \frac{1}{2^{k+1}} [\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \ldots & z_{2^{k+1}} \end{array}] \cdot [\begin{array}{cc} \mathbf{b}j^T & -\mathbf{b}j^T \end{array}]^T.$$

Sejam

$$\mathbf{B}_{j0} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_j \\ \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_j \end{array}\right] \text{ e } \mathbf{B}_{j1} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{B}_j & -\mathbf{B}_j \\ -\mathbf{B}_j & \mathbf{B}_j \end{array}\right]. \tag{6}$$

Como $\mathbf{B}_j = \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_j^T$, pode-se escrever

$$\mathbf{B}_{j0} = \mathbf{b}_{j0} \otimes \mathbf{b}_{j0}^T \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_{j1} = \mathbf{b}_{j1} \otimes \mathbf{b}_{j1}^T,$$

em que

$$\mathbf{b}_{j0} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_j \\ \mathbf{b}_j \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_{j1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_j \\ -\mathbf{b}_j \end{array}\right].$$

Assim

$$\mathbf{A} = \sum_{r=1}^{2^{k+1}} \beta_r(\mathbf{A})\mathbf{B}_r, \tag{7}$$

em que, dado $\mathbf{z} = [\ z_1 \quad z_2 \quad \ldots \quad z_{2^{k+1}}\ ]$,

$$\beta_r(\mathbf{A}) = \begin{cases} \mathbf{z}\cdot\mathbf{b}_{r0}, & 1 \le r \le 2^k, \\ \mathbf{z}\cdot\mathbf{b}_{r1}, & 2^k+1 \le r \le 2^{k+1} \end{cases}$$

e

$$\mathbf{B}_r = \begin{cases} \mathbf{B}_{r0}, & 1 \le r \le 2^k, \\ \mathbf{B}_{r1}, & 2^k+1 \le r \le 2^{k+1}. \end{cases}$$

■

Definição 4: Sejam $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{B}_{11}, \mathbf{B}_{12}, \ldots, \mathbf{B}_{1m}\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{B}_{21}, \mathbf{B}_{22}, \ldots, \mathbf{B}_{2n}\}$ dois conjuntos de matrizes. Define-se o Produto de Kronecker desses dois conjuntos como sendo

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \cup_{i=1}^m \cup_{j=1}^n \{\mathbf{B}_{1i} \otimes \mathbf{B}_{2j}\}.$$

Posta esta definição, pode-se estabelecer o seguinte procedimento para a geração do conjunto $\mathcal{B}_{2^n}$ das matrizes de posto unitário, utilizadas no Teorema 1, na decomposição das matrizes AS_{2^n}:

Teorema 2: Seja $\mathcal{B}_{2^n}$ um conjunto de matrizes de posto unitário para decompor uma matriz AS_{2^n}, conforme Teorema 1. Para $n \ge 2$ tem-se $\mathcal{B}_{2^n} = \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_{2^{n-1}}$.

Demonstração: Pela Expressão (4) as matrizes AS_2 podem ser decompostas utilizando-se o conjunto de matrizes de posto unitário

$$\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1\},$$

em que $\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz AS_{2^n}. Pelo Teorema 1 pode-se escrever

$$\mathbf{A} = \sum_{r=1}^{2^n} \beta_r(\mathbf{A})\mathbf{B}_r,$$

em que $\mathbf{B}_r \in \mathcal{B}_{2^n}$. Mas, por (6), cada matriz $\mathbf{B}_r$ pode ser escrita de uma das seguintes formas:

$$\mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_j \\ \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_j \end{bmatrix} = \mathbf{B}_0 \otimes \mathbf{B}_j \tag{8}$$

ou

$$\mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_j & -\mathbf{B}_j \\ -\mathbf{B}_j & \mathbf{B}_j \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_j, \tag{9}$$

em que $\mathbf{B}_j \in \mathcal{B}_{2^{n-1}}$. Assim $\mathcal{B}_{2^n} = \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_{2^{n-1}}$. ■

IV. Aplicações em Processamento de Sinais

O conceito de matrizes autossimilares é útil para a criação de algoritmos rápidos. A ideia geral consiste em, dado um produto $\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{x}$, em que $\mathbf{V}$ é uma matriz $2^n \times 2^n$ e $\mathbf{x}$ um vetor $2^n \times 1$, expressar a matriz $\mathbf{V}$ como a soma de uma matriz autossimilar e eventuais fatores de ajuste. Como a decomposição da matriz autossimilar em matrizes de posto unitário pode ser obtida de modo sistemático, é possível obter algoritmos rápidos para alguns casos especiais de matrizes $\mathbf{V}$. Recentemente, foram propostos algoritmos rápidos para a computação da multiplicação de quatérnios [4] e octônios [5] utilizando esta técnica. Nesta seção, como exemplo, são mostrados algoritmos rápidos para o cálculo de uma convolução cíclica de comprimento 4 e de uma DFT de comprimento 8.

A. *Convolução Cíclica*

A convolução cíclica 4×4 pode ser definida como o produto

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{d},$$

em que

$$\mathbf{S}^T = [\ S_0 \quad S_1 \quad S_2 \quad S_3\ ],$$

$$\mathbf{d}^T = [\ d_0 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3\ ] \in \mathbb{R}^4$$

e

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}.$$

Calcular a convolução cíclica de comprimento 4 requer 5 multiplicações reais [1], [6]. Este resultado é bem conhecido na literatura sendo apresentado aqui a título de exemplificação da metodologia desenvolvida nesse artigo. Utilizando a decomposição estabelecida no Teorema 1, esse limite é alcançado. A matriz $\mathbf{H}$ pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{H}_{AS} + \mathbf{F}_H \\ &= \begin{bmatrix} h_0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_3 & h_0 & h_1 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_0 \end{bmatrix} + (h_1 - h_3)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Pelos Teoremas 1 e 2 tem-se

$$\mathbf{S} = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} \beta_{ij}(\mathbf{H}_{AS})\mathbf{B}_{ij}\mathbf{d} + \mathbf{F}_H\mathbf{d},$$

em que $\mathbf{B}_{ij} \in \mathcal{B}_4, i = 0,1$ e $j = 0,1$;

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_4 &= \{\mathbf{B}_{00}, \mathbf{B}_{01}, \mathbf{B}_{10}, \mathbf{B}_{11}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & -\mathbf{B}_0 \\ -\mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix}, \right. \\ &\left. \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & -\mathbf{B}_1 \\ -\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \right\},\end{aligned} \tag{10}$$

$$\beta_{00}(\mathbf{H}_{AS})\mathbf{B}_{00}\mathbf{d} = \frac{1}{4}(h_0{+}h_3{+}h_2{+}h_1)(d_0{+}d_1{+}d_2{+}d_3)\mathbf{b}_{00},$$

$$\beta_{01}(\mathbf{H}_{AS})\mathbf{B}_{01}\mathbf{d} = \frac{1}{4}(h_0{+}h_3{-}h_2{-}h_1)(d_0{+}d_1{-}d_2{-}d_3)\mathbf{b}_{01},$$

$$\beta_{10}(\mathbf{H}_{AS})\mathbf{B}_{10}\mathbf{d} = \frac{1}{4}(h_0{-}h_3{+}h_2{-}h_1)(d_0{-}d_1{+}d_2{-}d_3)\mathbf{b}_{10},$$

$$\beta_{11}(\mathbf{H}_{AS})\mathbf{B}_{11}\mathbf{d} = \frac{1}{4}(h_0{-}h_3{-}h_2{+}h_1)(d_0{-}d_1{-}d_2{+}d_3)\mathbf{b}_{11},$$

e $\mathrm{F}_H\mathbf{d} = (h_1 - h_3)[\ 0 \quad (d_0 - d_2) \quad 0 - (d_0 - d_2) \quad 0\ ]^T$. Dessa forma pode-se computar, de forma ótima, a convolução cíclica de comprimento 4 utilizando matrizes autossimilares.

B. DFT de Comprimento 8

A DFT de comprimento 8 é, por definição, dada por [1]

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x} \tag{11}$$

em que

$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & -\jmath & -\jmath\omega & -1 & -\omega & \jmath & \jmath\omega \\ 1 & -\jmath & -1 & \jmath & 1 & -\jmath & -1 & \jmath \\ 1 & -\jmath\omega & \jmath & \omega & -1 & \jmath\omega & -\jmath & -\omega \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega & -\jmath & \jmath\omega & -1 & \omega & \jmath & -\jmath\omega \\ 1 & \jmath & -1 & -\jmath & 1 & \jmath & -1 & -\jmath \\ 1 & \jmath\omega & \jmath & -\omega & -1 & -\jmath\omega & -\jmath & \omega \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{bmatrix}$$

e

$$\omega = \exp(\frac{-2\pi\jmath}{8}), \quad \jmath^2 = -1.$$

Observe-se que nesse cálculo nem todos os termos da matriz requerem multiplicações, pois multiplicações por -1, $+1$, $-\jmath$ e $+\jmath$ não exigem complexidade multiplicativa. Portanto, o cálculo pode ser expresso como

$$\mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{W}^{(0)}\mathbf{x} + \mathbf{W}^{(AS)}\mathbf{x},$$

em que

$$\mathbf{W}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\jmath & 0 & -1 & 0 & \jmath & 0 \\ 1 & -\jmath & -1 & \jmath & 1 & -\jmath & -1 & \jmath \\ 1 & 0 & \jmath & 0 & -1 & 0 & -\jmath & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -\jmath & 0 & -1 & 0 & \jmath & 0 \\ 1 & \jmath & -1 & -\jmath & 1 & \jmath & -1 & -\jmath \\ 1 & 0 & \jmath & 0 & -1 & 0 & -\jmath & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{(AS)} &= \mathbf{D} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega & -\jmath\omega & -\omega & \jmath\omega \\ -\jmath\omega & \omega & \jmath\omega & -\omega \\ -\omega & \jmath\omega & \omega & -\jmath\omega \\ \jmath\omega & -\omega & -\jmath\omega & \omega \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{12}$$

em que $\otimes$ representa o produto de Kronecker.

Observa-se que a matriz $\mathbf{D}$ da Expressão (12) é autossimilar de ordem 4, e pelo Teorema 1 tem decomposição em matrizes de posto unitário conhecida dada por

$$\mathbf{D} = \beta_{00}(\mathbf{D})\mathbf{B}_{00} + \beta_{01}(\mathbf{D})\mathbf{B}_{01} + \beta_{10}(\mathbf{D})\mathbf{B}_{10} + \beta_{11}(\mathbf{D})\mathbf{B}_{11},$$

em que

$$\mathbf{B}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\beta_{00}(\mathbf{D}) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \omega & -\jmath\omega & -\omega & \jmath\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = 0;$$

$$\begin{aligned} \beta_{01}(\mathbf{D}) &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \omega & -\jmath\omega & -\omega & \jmath\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{\omega(1-\jmath)}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{10}(\mathbf{D}) &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \omega & -\jmath\omega & -\omega & \jmath\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \\ &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{11}(\mathbf{D}) &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \omega & -\jmath\omega & -\omega & \jmath\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{\omega(1+\jmath)}{2}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{W}^{(0)}\mathbf{x} + \mathbf{W}^{(AS)}\mathbf{x}.$$

Note-se que o termo $\mathbf{W}^{(\mathbf{0})}\mathbf{x}$ não apresenta nenhuma multiplicação que interfira na complexidade e o termo $\mathbf{W}^{(\mathbf{AS})}\mathbf{x}$ requer apenas duas multiplicações. Assim o algoritmo obtido é ótimo, conforme o limite teórico obtido por Heideman [7].

V. Conclusões

Neste trabalho, foram introduzidos os conceitos de matrizes autossimilares, assim como matrizes quase autossimilares. Foi proposta uma medida de dissimilaridade entre uma matriz quase autossimilar e uma matriz autossimilar, assim como um procedimento sistemático para converter uma matriz quase autossimilar numa autossimilar mais próxima de sua classe. Além disso, foi apresentado um procedimento sistemático para decompor uma matriz autossimilar em matrizes de posto unitário, no intuito de construir algoritmos rápidos em processamento digital de sinais. Algoritmos ótimos para computar uma DFT de comprimento 8 e uma convolução cíclica de comprimento 4 foram apresentados como ilustração da técnica.

VI. Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Referências

[1] R. E. Blahut, Fast Algorithms for Signal Processing, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2010.

[2] J. Lafon, Optimum computation of p bilinear forms, Linear Algebra and its Applications, v. 10, n. 3 pp. 225-240, 1975.

[3] G. Jerônimo da Silva Jr. and R. M. Campello de Souza, Constructing Fast Algorithms by Expanding a Set of Matrices into Rank-1 Matrices, Circuits, Systems and Signal Processing, 39, 1630–1648, 2020.

[4] H. B. A. Barbosa, L. B. da Silva, G. Jerônimo da Silva Jr. e R. M. Campello de Souza, Um Algoritmo Rápido para a Multiplicação de Quatérnios, SBrT 2020.

[5] H. B. A. Barbosa, L. B. da Silva, G. Jerônimo da Silva Jr. e R. M. Campello de Souza, Um Algoritmo Rápido para a Multiplicação de Octônios, SBrT 2020.

[6] S. Winograd, Arithmetic complexity of computations, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1980.

[7] M. T. Heideman and C.S. Burrus, Multiplicative complexity, convolution, and the DFT, Springer-Verlag, 1988.