

# Uma abordagem de apoio à decisão multicritério baseado em predição probabilística e em uma representação tensorial de dados.

Betania S. C. Campello, Leonardo T. Duarte, João M. T. Romano

**Resumo**— O apoio à decisão multicritério visa ordenar alternativas considerando múltiplos critérios. Via de regra, utilizam-se os dados no instante de tempo em que a decisão é tomada. No entanto, esses dados não são representativos quando as consequências da escolha dependem dos valores futuros dos critérios. Assim, propomos utilizar a predição dos valores dos critérios, através de suas séries temporais estruturadas como um tensor. Utilizamos um método de predição probabilística, que fornece a probabilidade dos critérios assumirem certos valores. Através dessa probabilidade, quantificamos incertezas na tomada de decisão. Experimentos numéricos sugerem que a predição probabilística melhora o apoio à decisão.

**Palavras-Chave**— Predição probabilística, álgebra tensorial, apoio à decisão, incerteza.

**Abstract**— Multiple criteria decision analysis aims at ranking alternatives by means of multiple criteria. In general, the data classically used are the data in only the instant of time in which the decision is made. However, these data are not representative when the consequences of the choice depend on the future values of the criteria. Thus, we propose to predict the criteria value, through their time-series structured as a tensor. We use a probabilistic prediction method, which provides the probability of the criteria taking specific values. In this approach, it is possible to quantify the uncertainty in decision making. Numerical experiments suggest that probabilistic prediction improves decision support.

**Keywords**— Probabilistic prediction, tensor algebra, decision aid, Uncertainty.

## I. INTRODUÇÃO E DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Os métodos de apoio à decisão multicritério (MCDA) são amplamente utilizados em problemas onde um conjunto de alternativas  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  deve ser ordenado, baseado em um conjunto de critérios  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  [1]. O problema é modelado por uma *matriz de decisão*  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , em que cada elemento  $p_{ij}$  representa o desempenho da alternativa  $i$  no critério  $j$ . Em seguida é feita uma transformação da matriz  $\mathbf{P}$  para um vetor  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^m$ , onde  $\mathbf{g}$  representa as pontuações das alternativas pelas quais obtém-se o ordenamento. Essa transformação  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{g}$  é conhecida como *agregação* da matriz de decisão. Os métodos de MCDA vêm atraindo pesquisadores

Betania S. C. Campello e João M. T. Romano, Laboratório DSPCom, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, Brasil; Leonardo T. Duarte, Faculdade de Ciências Aplicadas, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Limeira, Brasil. E-mails: betania@decom.fee.unicamp.br, romano@fee.unicamp.br, leonardo.duarte@fca.unicamp.br. Este trabalho foi parcialmente financiado por Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), número de financiamento 168968/2018-5.

de diferentes campos tais como economia e finanças [2], medicina [3], desenvolvimento sustentável [4], entre outros [5].

De modo geral, os dados de entrada de  $\mathbf{P}$  são os valores dos critérios no instante de tempo em que a escolha é feita, denotado por  $t_T$ . Essa estrutura matricial com dados de  $t_T$  não considera a evolução dos valores dos critérios, isto é, suas séries temporais (sinais). Porém, acreditamos que considerar as séries temporais dos critérios pode ser importante, pois, através delas, podemos analisar tendências e fazer predições. Essa proposta é relevante em situações em que a decisão deve ser tomada no momento atual  $t_T$ , mas as consequências dela dependem do desempenho dos critérios em um instante futuro  $t_{T+\lambda}$ .

A fim de ilustrar e justificar nossa proposta, supomos que um tomador de decisão deseje realizar um investimento em um novo país. O conjunto de alternativas são os Países 1 e 2 e a escolha pode ser baseada em dois critérios de crescimento econômico: produto interno bruto (PIB) e paridade do poder de compra (PPC), conforme a Fig. 1. Se considerarmos apenas os dados em  $t_T$ , o País 1 fica melhor colocado que o País 2, devido à sua superioridade no PIB. Contudo, analisando as séries temporais dos dois países, nota-se que o País 1 tem uma tendência crescente no PIB, enquanto no País 2, essa tendência é decrescente. Assim, dado que o retorno do investimento depende do desempenho do país nos anos seguintes, consideramos relevante analisar as séries temporais dos critérios. Se fizermos uma predição desses valores, provavelmente o ordenamento seja diferente e o País 2 fique melhor colocado que o País 1.

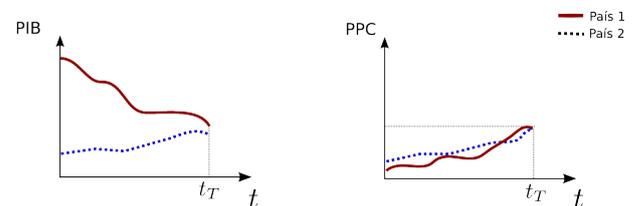


Fig. 1. Análise da série temporal dos critérios.

Desse modo, neste estudo vamos retomar a estratégia em [6], onde consideramos os critérios como sinais, estruturando o problema em MCDA como um tensor, e aplicamos posteriormente um método de predição pontual (isto é, obtemos um valor de predição para cada critério). Porém, neste trabalho introduzimos a ideia de predição probabilística no lugar da predição pontual. Assim, uma vez estruturado

o problema como tensor, aplicamos o método de *regressão linear com predição probabilística* [7], [8] na série temporal de cada critério. Esse método fornece os parâmetros ( $\mu$  e  $\sigma$ ) de uma distribuição normal. Ou seja, o valor de predição de cada critério é agora uma variável aleatória que segue uma distribuição normal de média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ . Os métodos de predição probabilística são utilizados quando há interesse em quantificar incertezas. Em nosso caso, nos permite verificar como se altera o ordenamento ao modificar os valores de predição dos critérios, analisando a incerteza em aceitar um determinado ordenamento.

A Fig. 2 ilustra a proposta deste artigo. Consideramos inicialmente um tensor em que suas entradas são as  $m$  alternativas, os  $n$  critérios e a terceira dimensão é relativa ao sinal de comprimento  $T$ , que representa a série temporal dos critérios, conforme mostrado na Fig. 2(a). Em seguida, aplicamos o método de regressão linear com predição probabilística em cada um dos  $n$  critérios, como mostrado na Fig. 2(b). Deste último passo, obtemos uma matriz  $\Phi$  de dimensão  $m \times n$ , que chamamos de *matriz de probabilidades*. Cada elemento  $\phi_{ij}$  dessa matriz está associado a uma distribuição normal de média  $\mu_{ij}$  e desvio padrão  $\sigma_{ij}$ ,  $\phi_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij})$ .

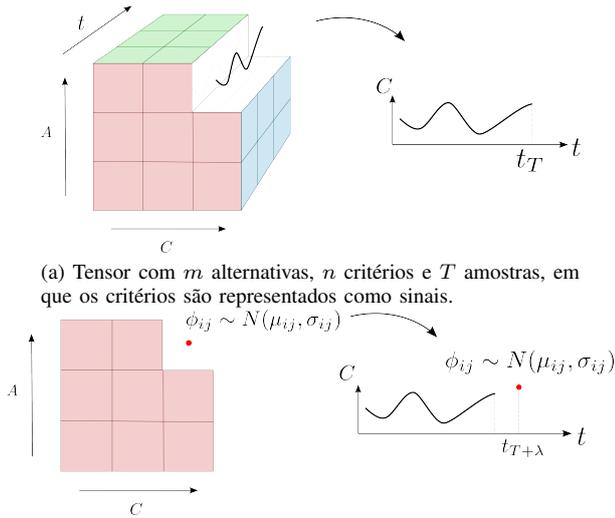


Fig. 2. Análise da série temporal de cada critério com predição probabilística.

O passo seguinte seria aplicar um método de agregação e obter um ordenamento para as alternativas. Porém, como a matriz  $\Phi$  não é determinística, não podemos usar diretamente os métodos de agregação tradicionais de MCDA. Assim, utilizamos um método para situações em que os valores dos critérios são variáveis aleatórias, conhecido como SMAA (do inglês *Stochastic multicriteria acceptability analysis*) [9], [10]. De forma resumida, esse método associa valores para os critérios, de acordo com suas distribuições de probabilidade, a fim de obter ordenamentos probabilísticos das alternativas. Através desses ordenamentos, é possível analisar a probabilidade de cada alternativa estar em cada posição, ou qual ordenamento é o mais provável, entre outras análises.

Não encontramos estudos em MCDA que utilizem essa metodologia. Poucos estudos consideram os critérios como sinais [4], [6], [11], [12]. Porém, nesses estudos os autores

propõem fazer uma agregação do tensor a fim de obter o ordenamento  $\mathbf{g}$ , sem usar métodos de predição probabilística.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção II, apresentamos brevemente a notação e convenções tensoriais usadas no texto. Nas Seções III, IV e V, apresentamos o método de regressão linear com predição probabilística, o SMAA e o método de agregação PROMETHEE II, respectivamente. Na Seção VI apresentamos o algoritmo proposto neste estudo. Por fim, nas Seções VII e VIII apresentamos os resultados computacionais e as conclusões deste estudo.

## II. NOTAÇÃO TENSORIAL

Denotamos um tensor de ordem três (três dimensões) por  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$ . Esse tensor apresenta três tipos de subtensores matriciais, mostrados na Fig. 3 e representados como: frontal  $\mathbf{P}(:, :, t)$ , vertical  $\mathbf{P}(:, j, :)$  e horizontal  $\mathbf{P}(i, :, :)$ . Nesse mesmo sentido, há três tipos de subtensores vetoriais que representamos por:  $\mathbf{p}(i, j, :)$ ,  $\mathbf{p}(i, :, t)$  e  $\mathbf{p}(:, j, t)$ . O subtensor vetorial  $\mathbf{p}(i, j, :)$  é ilustrado no tensor da Fig. 2 e representa a série temporal de cada critério em cada alternativa. Por fim, cada elemento do tensor é representado por  $p_{ijt}$ .

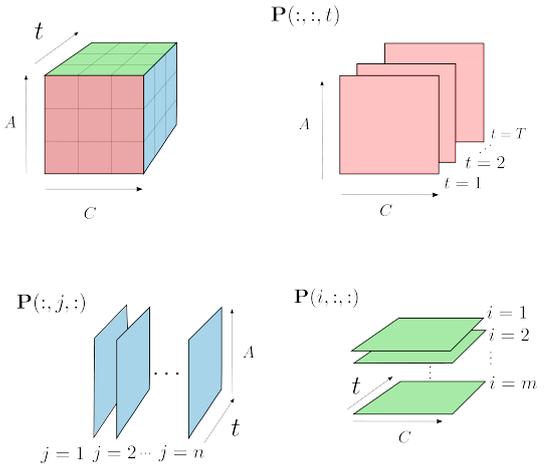


Fig. 3. Tipos de subtensores matriciais.

## III. REGRESSÃO LINEAR COM PREDIÇÃO PROBABILÍSTICA

Um modelo de regressão linear univariado visa representar um sinal  $\mathbf{p}(i, j, :)$  em função de outro sinal  $\mathbf{t}(i, j, :)$ , da forma:  $p_{ijt} = \hat{w}_{ij1} + \hat{w}_{ij2}t_{ijt} + e_{ijt}$ , sendo  $e_{ijt}$  um resíduo. O método de mínimos quadrados (MMQ) calcula os parâmetros do modelo  $\hat{w}_{ij\ell}$ ,  $\ell = 1, 2$ , minimizando a soma do quadrado das diferenças entre o valor estimado  $\hat{p}_{ijt} = \hat{w}_{ij1} + \hat{w}_{ij2}t_{ijt}$  e o observado  $p_{ijt}$ , obtendo ao final:

$$\hat{w}_{ij1} = \bar{\mathbf{p}}(i, j, :) - \hat{w}_{ij2}\bar{\mathbf{t}}(i, j, :) \quad \text{e} \quad (1)$$

$$\hat{w}_{ij2} = \frac{\sum_{t=1}^T (t_{ijt} - \bar{\mathbf{t}}(i, j, :))(p_{ijt} - \bar{\mathbf{p}}(i, j, :))}{\sum_{t=1}^T (t_{ijt} - \bar{\mathbf{t}}(i, j, :))^2}, \quad (2)$$

onde  $\bar{\mathbf{p}}(i, j, :)$  e  $\bar{\mathbf{t}}(i, j, :)$  representam a média de  $\mathbf{p}(i, j, :)$  e  $\mathbf{t}(i, j, :)$ . Desse modo, para obter o valor de  $\hat{p}_{ijt}$  no instante  $T + \lambda$ , usamos

$$\hat{p}_{ij(T+\lambda)} = \hat{w}_{ij1} + \hat{w}_{ij2}t_{ij(T+\lambda)}. \quad (3)$$

Para calcular a predição intervalar de  $\hat{p}_{ij(T+\lambda)}$ , os autores em [7] aplicam primeiro o método MMQ para encontrar  $\hat{p}_{ij(T+\lambda)}$ . Em seguida, encontram um limite superior  $LU^U$  e inferior  $LU^L$  pela equação  $\hat{p}_{ij(T+\lambda)} \pm z_{\alpha/2}\sigma$ , sendo  $z_{\alpha/2}$  o valor da variável normal padrão com probabilidade  $\alpha/2$ , e  $\sigma$  o desvio padrão do erro do modelo. Assumindo que a predição é não-enviesada, a variância do erro do modelo  $\sigma^2$  é igual ao erro médio quadrático [7]. Por fim, como  $\sigma^2$  não é conhecido, os autores utilizam o estimador não-enviesado como [7]:

$$s_{ij}^2 = \frac{1}{T-d} \sum_{t=1}^T (\hat{p}_{ij(t)} - p_{ij(t)})^2, \quad \forall i, j, \quad (4)$$

em que  $d$  representa o número de parâmetros do modelo  $w_{ij\ell}$ ,  $\ell = 1, \dots, d$ .

Assim, neste estudo, estimamos os valores de predição por uma distribuição normal de média  $\hat{p}_{ij(T+\lambda)}$  e desvio padrão  $s_{ij} = \sqrt{s_{ij}^2}$ , representado por  $N(\hat{p}_{ij(T+\lambda)}, s_{ij})$ .

#### IV. MÉTODO SMAA

Os métodos da família SMAA podem ser usados quando, em vez de valores determinísticos para os critérios, temos variáveis aleatórias  $\phi_{ij}$  com uma certa densidade de probabilidade. Neste caso, os elementos  $p_{ij}$  da matriz de decisão  $\mathbf{P}$  (do caso determinístico) são substituídos por variáveis aleatórias  $\phi_{ij}$  de uma matriz de probabilidades  $\Phi$ . Enquanto no caso determinístico o resultado é um ordenamento  $\mathbf{g}$  das alternativas, no SMAA, o resultado é uma matriz de probabilidade  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $m$  alternativas  $\times$   $m$  posições. Cada elemento  $m_{ik}$  dessa matriz representa a probabilidade da alternativa  $i$  ocupar a posição  $k$ .

Dado que o SMAA envolve funções de probabilidade, em consequência integrais multidimensionais, seu cálculo pode ser bastante complexo. No entanto, os cálculos numéricos podem ser substituídos por simulação Monte Carlo, obtendo boas aproximações [13]. O número de iterações na simulação é inversamente proporcional ao quadrado da precisão desejada, e não depende da dimensionalidade do problema [13]. Neste estudo observamos que com 10.000 simulações obtemos a precisão desejada.

Estruturamos o SMAA conforme os três passos apresentados abaixo, repetindo-os um grande número de vezes. Considere  $i, k = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ :

- P1 **Amostragem:** realizamos a variável aleatória  $\phi_{ij}$  de  $\Phi$ , a partir de sua função de probabilidade. Neste passo, obtemos uma matriz determinística  $\mathbf{P}$ ;
- P2 **Agregação:** aplicamos algum método de agregação MCDA, de onde obtemos um ordenamento  $\mathbf{g}$ . Utilizamos aqui o PROMETHE II, apresentado na Seção V;
- P3 **Cálculo da matriz  $\mathbf{M}$ :** utilizamos um contador de posições  $m_{ik}$ , elementos de uma matriz nula  $\mathbf{M}$ . A cada iteração, somamos 1 ao  $m_{ik}$  se a alternativa  $i$  se encontra na posição  $k$  do ordenamento  $\mathbf{g}$  obtido no P2. Ao final das iterações, dividimos os  $m_{ik}$  pelo número de iterações e multiplicamos por 100 para obter o percentual de cada alternativa em cada

posição. Se a alternativa  $i$  tiver o maior percentual na  $k$ -ésima posição, para todo  $i$  e  $k$  de  $\mathbf{M}$ , então é possível encontrar o ordenamento mais provável, representado por  $\hat{\mathbf{g}}$ .

Para exemplificar o método, considere uma matriz nula  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  (três alternativas a serem ordenadas) e que realizamos duas iterações. Supondo que na primeira iteração obtemos o ordenamento  $\mathbf{g} \Rightarrow a_1 \succ a_3 \succ a_2$ . Computamos  $m_{11} = 1$  (Alternativa 1 se encontra na posição 1),  $m_{32} = 1$  (Alternativa 3, na posição 2),  $m_{23} = 1$  (Alternativa 2, na posição 3) e mantemos os valores dos demais  $m_{ik}$ . Na segunda iteração obtemos  $\mathbf{g} \Rightarrow a_1 \succ a_2 \succ a_3$  e contamos  $m_{11} = 2$ ,  $m_{22} = 1$ ,  $m_{23} = 1$ . Por fim, dividimos os  $m_{ik}$  por 2 e multiplicamos por 100, de onde obtemos:

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & & \begin{matrix} 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 50 \\ 0 & 50 & 50 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Neste exemplo, não é possível estimar  $\hat{\mathbf{g}}$ , uma vez que as Alternativas 2 e 3 não obtiveram maior percentual em nenhuma posição. Supondo que aumentamos o número de iterações e obtemos ao final  $m_{11} = 100$  (Alternativa 1 aparece 100% das vezes em primeiro lugar),  $m_{32} = 80$  (Alternativa 3 aparece 80% das vezes em segundo lugar) e  $m_{23} = 90$  (Alternativa 2 aparece 90% das vezes em terceiro lugar). Nesse caso, é possível estimar  $\hat{\mathbf{g}} \Rightarrow a_1 \succ a_3 \succ a_2$ , sabendo que ele tem uma alta probabilidade de ocorrer.

Por fim, se for possível obter  $\hat{\mathbf{g}}$ , verificamos a proporção de vezes que esse ordenamento aparece nas iterações do SMAA.

#### V. MÉTODO DE AGREGAÇÃO MULTICRITÉRIO

Em [6] utilizamos métodos de predição adaptativa juntamente com o método de agregação *Preference Ranking Organisation Method for Enrichment Evaluations II* (PROMETHEE II) [14] no apoio à decisão. Dado que esse método de agregação mostrou bons resultados, optamos por manter o PROMETHEE II como método de agregação no presente trabalho. As entradas do método são a matriz de decisão  $\mathbf{P}$  e o vetor de pesos  $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ , que modela a importância de cada critério; assumimos que  $\delta \geq 0$  e  $\sum_{j=1}^n \delta = 1$ .

O primeiro passo do PROMETHEE II consiste em calcular a diferença entre o desempenho de cada par de alternativa  $a_i, a_k \in A$ , para cada critério  $j$ :

$$d_j(a_i, a_k) = p_{ij} - p_{kj} \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

De (5), obtemos o tensor  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{m \times m \times n}$ . Cada subtensor de  $\mathcal{D}$ ,  $\mathbf{D}(:, :, j) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , é uma matriz de comparação par a par.

Em seguida, aplicamos a chamada função de preferência  $F$ , em  $\mathbf{D}(:, :, j)$ :

$$F_j(d_j(a_i, a_k)) = F_j(\mathbf{D}(:, :, j)) \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

onde  $0 \leq F_j(\mathbf{D}(:, :, j)) \leq 1$ . Existem diversos tipos de função de preferência [15]. Escolhemos a seguinte:  $F_j(d_j(a_i, a_k)) = \frac{\text{sgn}(d_j(a_i, a_k)) + 1}{2}$ , em que  $\text{sgn}(d_j(a_i, a_k))$  modela a função sinal. Essa função é conhecida como *função usual de preferência*.

O passo seguinte consiste em mapear  $\mathbb{R}^{m \times m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ , que fornece um índice global de preferência de  $a_i$  sobre  $a_k \forall i, k$ :

$$\pi(a_i, a_k) = \sum_{j=1}^n \delta_j F_j(\mathbf{D}(:, :, j)). \quad (7)$$

Como  $F_j(\mathbf{D}(:, :, j)) \geq 0$  e  $\delta_j \geq 0$ , então  $\pi(a_i, a_k) \geq 0$ .

O passo final corresponde à agregação  $\mathbb{R}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  e consiste em comparar cada  $a_i$  com as outras  $(m-1)$  alternativas, obtendo uma pontuação  $\theta(a_i)$ :

$$\theta(a_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{a \in A} \pi(a, a_i) - \frac{1}{n-1} \sum_{a \in A} \pi(a_i, a) \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (8)$$

O vetor  $\theta(a)$  é formado por  $\theta(a_i) \in [-1, 1]$ , e pode ser utilizado para o estabelecimento de um ordenamento entre as alternativas.

## VI. ALGORITMO PROPOSTO

Na Seção III discutimos como calcular os parâmetros  $\hat{p}_{ij(T+\lambda)}$  e  $s_{ij}$ , para obter os possíveis valores de  $\mathbf{p}(i, j, :)$  no instante de tempo  $(T+\lambda)$ . No Algoritmo 1, calculamos esses parâmetros para cada vetor  $\mathbf{p}(i, j, :)$  do tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$ . Do cálculo anterior, obtemos uma matriz de probabilidades  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , em que cada elemento corresponde a uma variável aleatória  $\phi_{ij} \sim N(\hat{p}_{ij(T+\lambda)}, s_{ij})$ . Finalmente, aplicamos o método SMAA seguindo os passos P1 - P3 apresentados na Seção IV e obtemos  $\mathbf{M}$  e  $\hat{\mathbf{g}}$ .

### Algoritmo 1: Agregação do tensor com o método SMAA

```

Input:  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$ ,  $\delta \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda$ ,  $\mathbf{t}(i, j, :) = [1, 2, \dots, T]$ 
for  $i = 1$  to  $m$  do
  for  $j = 1$  to  $n$  do
     $\hat{p}_{ij(T+\lambda)}, s_{ij} \leftarrow$  Solve Eq. (1)-(4) (predição com método MMQ)
    usando as entradas  $\mathbf{t}(i, j, :)$  e  $\mathbf{p}(i, j, :)$ 
  end for
   $\phi_{ij} \sim N(\hat{p}_{ij(T+\lambda)}, s_{ij})$ 
end for
for  $l = 1$  to 10.000 do
   $\mathbf{M}, \hat{\mathbf{g}} \leftarrow$  Run método SMAA usando como entrada  $\Phi$  e  $\delta$ 
end for
Output:  $\mathbf{M}, \hat{\mathbf{g}}$ 
    
```

## VII. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Os testes computacionais foram realizados com dados sintéticos obtidos da seguinte forma. Consideramos um tensor  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{m \times n \times T}$ , onde  $m = 5$  alternativas,  $n = 3$  critérios, e  $T = 50$  amostras. Suas séries temporais são geradas como:

$$\mathbf{p}(i, j, :) = \mathbf{a}(i, j, :) + \mathbf{b}(i, j, :)\mathbf{t}(i, j, :),$$

sendo  $\mathbf{t}(i, j, :) = [1, 2, \dots, T]$ . Cada elemento  $a_{ijt}$  e  $b_{ijt}$  das séries temporais  $\mathbf{a}(i, j, :)$  e  $\mathbf{b}(i, j, :)$  são obtidos por uma distribuição uniforme contínua  $U$ , com parâmetros para o Critério 1  $a_{i1t} \sim U[2, 4]$  e  $b_{i1t} \sim U[0.01, 0.3]$ ; para o Critério 2,  $a_{i2t} \sim U[10, 12]$  e  $b_{i2t} \sim U[0.8, 0.85]$ ; e para o Critério 3,  $a_{i3t} \sim U[2, 4]$  e  $b_{i3t} \sim U[0.5, 0.7]$ . Aos sinais  $\mathbf{p}(i, j, :)$  são somados ruídos aleatórios  $\alpha \mathbf{r}$ , definido como  $\mathbf{r} \sim N(0, 1)$  e

$$\alpha = 10^{\left(\frac{10 \log \sigma_{\mathbf{p}(i, j, :)}^2 - SNR}{20}\right)},$$

em que  $\sigma_{\mathbf{p}(i, j, :)}^2$  representa a variância do sinal  $\mathbf{p}(i, j, :)$ . Testamos três valores para a relação sinal ruído (SNR, do inglês *signal-to-noise ratio*): 35 dB; 20 dB; 10 dB. Consideramos  $\lambda = 1$  e os pesos  $\delta$  iguais para todos os critérios. Para cada valor da SNR, calculamos três ordenamentos das alternativas:

(1) *Ordenamento com predição probabilística*  $\hat{\mathbf{g}}$ : obtido pelo Algoritmo 1;

(2) *Ordenamento verdadeiro*  $\mathbf{g}^*$ : este ordenamento é o que consideramos como o de referência ou desejado. Ele é obtido, montando a matriz de decisão  $\mathbf{P}$  com os valores verdadeiros dos critérios no instante  $T+1$  (valores futuros precisos) e aplicando o método PROMETHEE II nessa matriz  $\mathbf{P}$ . A intenção é comparar o ordenamento probabilístico com este ordenamento desejado;

(3) *Ordenamento com predição pontual*  $\bar{\mathbf{g}}$ : estruturamos a matriz de decisão  $\mathbf{P}$  com os valores de predição  $\hat{p}_{ij(T+\lambda)}$  e aplicamos o métodos PROMETHEE II. Pretendemos comparar o apoio à tomada de decisão utilizando apenas a predição pontual ou analisando os resultados com a predição pontual e a probabilística.

Em seguida apresentamos os resultados de acordo com o valor da SNR.

### A. Resultados para SNR = 35dB

Neste teste, obtivemos  $\hat{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{g}} \implies a_4 \succ a_5 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_3$  e a matriz  $\mathbf{M}$  é apresentada na Tabela I. Analisando a Tabela I, vemos que todas as alternativas apresentam uma probabilidade alta de estarem nas colocações que se encontram em  $\hat{\mathbf{g}}$ . Além disso, a proporção que  $\hat{\mathbf{g}}$  ocorre no SMAA também é de 93.53%. Com este resultado, vemos que a probabilidade de aceitar  $\hat{\mathbf{g}}$  sendo ele falso é bastante baixa. De fato obtemos que o ordenamento estimado é igual ao verdadeiro  $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g}^*$ .

TABELA I  
M EM (%) PARA SNR = 35.

	1°	2°	3°	4°	5°
$a_1$	0	0	0.03	99.97	0
$a_2$	1.53	5.11	93.33	0.03	0
$a_3$	0	0	0	0	100
$a_4$	98.26	0.73	1.01	0	0
$a_5$	0.21	94.16	5.63	0	0

### B. Resultados para SNR = 20dB

Para este valor da SNR, obtivemos  $\hat{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{g}} \implies a_5 \succ a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4$  e a  $\mathbf{M}$  é apresentada na Tabela II. Analisando a Tabela II, observamos que há uma probabilidade relativamente alta de que  $a_5$ ,  $a_3$  e  $a_4$  estejam em 1°, 4° e 5° lugar, respectivamente. Com relação a  $a_1$  e  $a_2$ , vemos que há uma certa disputa pelo segundo e terceiro lugar entre, mas com uma maior probabilidade de que  $a_2$  esteja em terceiro lugar. A proporção que  $\hat{\mathbf{g}}$  ocorre no SMAA é de 23%.

Assim, consideramos que aceitar  $\hat{\mathbf{g}}$  pode ser uma opção razoável, porém sabendo que há um risco alto de que não corresponda ao ordenamento verdadeiro. Mais especificamente, há um risco alto de que as alternativas  $a_1$  e  $a_2$  não estejam na

colocação que aparecem em  $\hat{\mathbf{g}}$ . Com este exemplo mostramos que é relevante analisar as estatísticas de  $\mathbf{M}$ , pois estimamos se há riscos de algumas alternativas estarem em diferentes colocações, no lugar de apenas aceitar o ordenamento  $\bar{\mathbf{g}}$ .

Por fim, neste teste obtemos  $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g}^*$ , que indica que a predição gera bons resultados.

TABELA II  
M EM (%) PARA SNR = 20dB.

	1°	2°	3°	4°	5°
$a_1$	28.26	34.04	31.94	5.52	0.24
$a_2$	11.27	31.40	50.21	6.99	0.13
$a_3$	0.13	2.26	10.43	77.68	9.5
$a_4$	0	0	0.21	9.66	90.13
$a_5$	60.34	32.3	7.21	0.15	0

### C. Resultados para SNR = 10dB

Para SNR = 10dB, não obtemos um ordenamento completo para  $\hat{\mathbf{g}}$ . Pela Tabela III, vemos que não é possível saber com precisão a posição das Alternativas 2 e 3. Entretanto, vemos que há uma convergência para  $a_1$ ,  $a_4$  e  $a_5$  estarem em primeiro, quarto e quinto colocados, respectivamente. De fato, o resultado verdadeiro é  $\mathbf{g}^* \implies a_1 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_5$ , o que confirma as posições de  $a_1$ ,  $a_4$  e  $a_5$ .

Com relação ao ordenamento de predição pontual, obtivemos  $\bar{\mathbf{g}} \implies a_1 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_5$ , onde  $a_3$ ,  $a_2$  e  $a_4$  estão em colocações diferentes das de  $\mathbf{g}^*$ . Se não analisarmos a  $\mathbf{M}$  da Tabela III, podemos aceitar um ordenamento sem verificar o risco de que ele seja diferente, e, neste caso, esse risco é bastante alto. Assim, a predição probabilística juntamente com a matriz  $\mathbf{M}$  permite uma análise mais completa no problema de apoio à decisão.

TABELA III  
M EM (%) PARA SNR = 10dB.

	1°	2°	3°	4°	5°
$a_1$	84.17	13.87	1.73	0.23	0
$a_2$	10.48	42.8	36.21	9.13	1.38
$a_3$	5.09	34.29	35.63	21.21	3.78
$a_4$	0.25	8.01	20.86	48.15	22.73
$a_5$	0.01	1.03	5.57	21.28	72.11

## VIII. CONCLUSÕES

Neste estudo, propusemos uma nova metodologia para o apoio à decisão multicritério. Estruturamos os dados do problema em MCDA na forma tensorial, sendo que a principal contribuição consiste em utilizar a predição probabilística, que nos permite analisar incertezas no ordenamento. Assim, para a agregação do tensor utilizamos primeiro o método de regressão linear probabilística, seguido do Método SMAA com o PROMETHEE II. Elaboramos testes computacionais para analisar como a predição probabilística pode trazer vantagens no apoio à decisão.

Vimos que é possível estimar se há um risco alto do ordenamento da predição estar errado. Essa análise foi feita para diferentes valores de SNR: para SNR = 30dB esse risco mostrou ser baixo; para SNR = 20dB vimos que é razoável aceitar o ordenamento probabilístico; e para SNR = 10dB esse risco se mostrou bastante alto. Por fim, para futuros trabalhos pretendemos desenvolver métodos de predição probabilística mais robustos, de modo a minimizar a variância do erro e obter melhores estimativas.

## REFERÊNCIAS

- [1] R. L. Keeney, and H. Raiffa. "Decisions with multiple objectives: preferences and value trade-offs." *Cambridge university press*, 1993.
- [2] H. Masri, B. Pérez-Gladish, and C. Zopounidis, eds. "Financial Decision Aid Using Multiple Criteria: Recent Models and Applications." Springer, 2018.
- [3] N. Belacel "Multicriteria assignment method PROAFTN: Methodology and medical application." *European Journal of Operational Research*, pp. 175-183, 2000.
- [4] A. Frini, and S. Ben-Amor. "MUPOM: A multi-criteria multi-period outranking method for decision-making in sustainable development context." *Environmental Impact Assessment Review*, pp. 10-25, 2019.
- [5] C. Zopounidis, and M. Doumpos. "Multicriteria classification and sorting methods: A literature review." *European Journal of Operational Research*, pp. 229-246, 2002.
- [6] B. S. C. Campello, L. T. Duarte, and J.M.T. Romano. "Adaptive Prediction of Financial Time-Series for Decision-Making Using A Tensorial Aggregation Approach." *In ICASSP 2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)* pp. 5435-5439. IEEE, 2020.
- [7] D. L. Shrestha, and D. P. Solomatine. "Machine learning approaches for estimation of prediction interval for the model output." *Neural Networks* pp. 225-235, 2006.
- [8] H. D. Kabir, A. Khosravi, M. A. Hosen, and S. Nahavandi. "Neural network-based uncertainty quantification: A survey of methodologies and applications." *IEEE access* 6, pp. 36218-36234, 2018.
- [9] R. Lahdelma, H. Joonas, and S. Pekka. "SMAA-stochastic multiobjective acceptability analysis." *European Journal of Operational Research*, pp. 137-143, 1998.
- [10] R. Pelissari, M. C. Oliveira, S. B. Amor, A. Kandakoglu, and A. L. Helleno. "SMAA methods and their applications: a literature review and future research directions." *Annals of Operations Research*, pp. 1-61, 2019.
- [11] I. Banamar, and S. Yves. "An extension of PROMETHEE II to temporal evaluations." *International journal of multicriteria decision making*, pp. 298-325, 2018.
- [12] B.S.C. Campello, L.T. Duarte, J.M.T. Romano. "Apoio à decisão multicritério em cenários dinâmicos: uma proposta baseada no método TOPSIS e em atributos temporais." *LI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO)*, vol 2, 2019.
- [13] T. Tervonen, and R. Lahdelma. "Implementing stochastic multicriteria acceptability analysis." *European Journal of Operational Research*, pp. 500-513, 2007.
- [14] J.P. Brans, and P. Vincke. "Note—A Preference Ranking Organisation Method: (The PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision-Making)." *Management science*, pp. 647-656, 1985.
- [15] J.P. Brans, and S. Yves. "PROMETHEE methods." *In Multiple criteria decision analysis*. Springer, pp.187-219, 2016.