

Representação linear e caracterização espectral de sinais caóticos usando filtros lineares

Rafael Alves da Costa e Marcio Eisencraft

Resumo— Neste artigo, apresenta-se uma representação linear de um mapa linear por partes que gera sinais caóticos usando filtro recursivo em tempo discreto. Ele pode ser usado para deduzir facilmente fórmulas analíticas para a densidade espectral de potência de sinais caóticos, fornecendo resultados úteis para sistemas de comunicação baseados em caos e processamento de sinais. Simulações numéricas são usadas para validar os resultados teóricos.

Palavras-Chave— sinais caóticos, sistemas não lineares, Densidade espectral de potência, filtros recursivos.

Abstract— In this paper, we present a discrete-time linear recursive filter representation for a piecewise-linear map that generates chaotic signals. It can be used to easily deduce analytical formulae for power spectral density of chaotic signals, providing useful results for chaos-based communication systems and signal processing. Numerical simulations are used to validate the theoretical results.

Keywords— chaotic signals, nonlinear systems, power spectral density, recursive filters.

I. INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos não lineares de tempo discreto que geram sinais caóticos [1] têm sido considerados em muitas aplicações de processamento de sinais tais como comunicações sem fio e subaquática [2]–[7], radar [8], encriptação de imagem [9], marca d'água [10], entre outras.

Para viabilizar essas aplicações é de fundamental importância obter precisamente a densidade espectral de potência (DEP) dos sinais caóticos envolvidos e, conseqüentemente, sua largura de banda. Isso não é uma tarefa fácil devido à natureza não linear desses sinais e à falta de fórmulas fechadas que descrevam a evolução temporal deles. Embora alguns resultados foram obtidos recentemente [11]–[15], muitos resultados estão ainda sob investigação.

A ideia geral de [11]–[15] é obter uma fórmula recursiva para a n -ésima iteração de mapas lineares por partes, levando a expressões para sequência de autocorrelação (SAC) e, conseqüentemente, para a DEP de mapas específicos. Considera-se aqui uma abordagem diferente, baseada no trabalho de Drake e Willians [16]. Eles mostraram que é possível obter sinais caóticos usando filtros lineares não causais em tempo discreto. Mais precisamente, eles usam um filtro para gerar com sucesso órbitas caóticas do mapa dente de serra no intervalo $[0, 1]$.

No presente artigo, estende-se essa representação linear para uma classe de mapas lineares por partes com inclinações

positivas ou negativas. Em seguida, utiliza-se da representação linear para derivar a DEP de sinais caóticos de forma direta. Organiza-se esse trabalho da seguinte forma: Na Seção II, o mapa linear por partes considerado é apresentado. Na Seção III a representação linear é deduzida e exemplificada. Em seguida, na Seção IV, utiliza-se a representação linear para calcular a DEP dos sinais caóticos gerados. Finalmente, na Seção V tecem-se as considerações finais.

II. MAPA CONSIDERADO

Seja $f : [-1, 1[\rightarrow [-1, 1[$ definido como

$$f(s) = 2g\left(r\frac{s+1}{2}\right) - 1, \quad (1)$$

com

$$g(y) = y - \lfloor y \rfloor, \quad (2)$$

r é inteiro com $|r| \geq 2$ e $s(0) = s_0 \in [-1, 1[$.

Considere-se o mapa

$$s(n+1) = f(s(n)), \quad (3)$$

com $n \geq 0$ e $s(0) \in [-1, 1[$. Uma generalização do mapa dente de serra estudado em [16] permitindo r negativo e um domínio simétrico de sinais gerados com média nula.

Na Fig. 1(a) exemplifica-se $f(s)$ para um caso particular, $r = -3$. Na Fig. 1(b) ilustram-se sinais gerados com condições iniciais $s(0) = -0.73$ (linha contínua) e $s(0) = -0.73000001$ (linha tracejada). Nota-se aperiódicidade, limitação em amplitude e dependência sensível às condições iniciais característica de sinais caóticos [1].

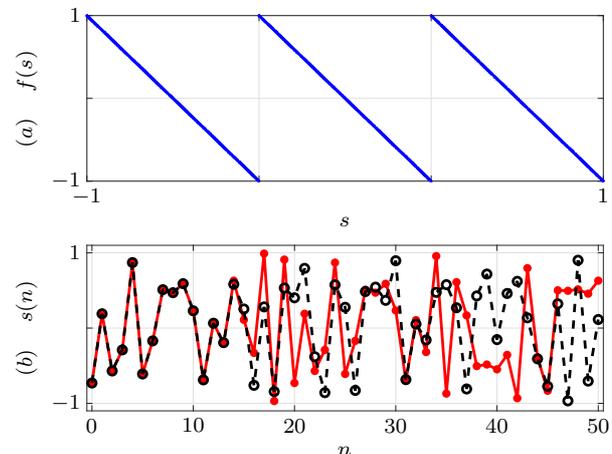


Fig. 1. (a) O mapa $f(\cdot)$ com $r = -3$ e (b) duas órbitas com condições iniciais próximas.

O mapa f pode ser decomposto em três:

- $x(n) = \frac{s(n)+1}{2} = f_1(s(n))$ - transformação linear do domínio $[-1, 1]$ para $[0, 1]$;
- $x(n+1) = g(rx(n)) = f_2(x(n))$;
- $s(n+1) = 2x(n+1) - 1 = f_3(x(n+1)) = f_1^{-1}(x(n+1))$ - transformação linear do domínio $[0, 1]$ para $[-1, 1]$;

tal que $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$.

Portanto, $f_1(\cdot)$ e $f_3(\cdot)$ são funções inversas,

$$s(n) = f^n(s_0) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3)^n(s_0) = (f_1 \circ g^n \circ f_3)(s_0). \quad (4)$$

Para r positivo, $f_2(\cdot) = g(\cdot)$ consiste em deslocar a representação na base $|r|$ de $x(n)$, i.e., se

$$x(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{|r|^{k+1}} = (0, d_0 d_1 d_2 \dots)_{|r|}, \quad (5)$$

então $x(1) = (0, d_1 d_2 d_3 \dots)_{|r|}$, com $0 \leq d_k < |r|$, tal que para $r > 0$ têm-se

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{k+n}}{|r|^{k+1}}. \quad (6)$$

Para r negativo, quando n é par, as amostras $x(n)$ para o mapa com parâmetros r e $-r$ são iguais para mesma condição inicial $x(0)$. Dessa forma, tomando-se (5) e (6) deriva-se uma expressão de $x(n)$ para $r < 0$. Assim,

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{k+n}}{|r|^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d_{2k+n}}{|r|^{2k+1}} + \frac{1}{|r|^{2k+1}} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d_{2k-1+n}}{|r|^{2k}} - \frac{1}{|r|^{2k-1}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(d_{2k+n} + 1)}{r^{2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k-1+n} - |r|}{r^{2k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{2k+n}}{r^{2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d'_{2k-1+n}}{r^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}}, \end{aligned} \quad (7)$$

definindo-se

$$d'_k = \begin{cases} -(d_k + 1), & k \text{ par} \\ d_k - |r|, & k \text{ ímpar} \end{cases}. \quad (8)$$

Para n ímpar, tem-se também a operação complementar, i.e., $x(1) = 1 - (0, d_1 d_2 d_3 \dots)_{|r|}$. Então,

$$\begin{aligned} x(n) &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{k+n}}{|r|^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|r|^{2k}} - \frac{d_{2k+n}}{|r|^{2k+1}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|r|^{2k}} + \frac{d_{2k-1+n}}{|r|^{2k}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{2k+n} - |r|}{r^{2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(d_{2k-1+n} + 1)}{r^{2k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{2k+n}}{r^{2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d'_{2k-1+n}}{r^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}}, \end{aligned} \quad (9)$$

e, de forma geral, para r negativo tem-se

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}}. \quad (10)$$

Nas próximas seções, desenvolve-se uma representação linear para este mapa e utiliza-se isso para calcular a DEP de $s(n)$.

III. REPRESENTAÇÃO LINEAR

O Algoritmo 1 sistematiza a proposta de gerar uma órbita $\hat{s}(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ de (3) dado r , N e $s(0)$ usando um filtro linear.

Algoritmo 1: Obtendo-se o sinal $\hat{s}(n)$ usando filtro linear.

Dados: r , N , $s(0)$, $x_\ell(-1) = 0$.

Resultado: $\hat{s}(n)$, para $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

início

$$1 \quad x(0) \leftarrow \frac{s(0) + 1}{2} \quad (11)$$

2 **Decompõem-se** $x(0)$ na base $|r|$, obtendo-se

$$x(0) = (0, d_0 d_1 d_2 \dots d_{N-1} \dots)_{|r|}, \quad (12)$$

com $d_k \in \{0, 1, \dots, |r| - 1\}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

3 **para** $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ **faça**

4 **se** $r > 0$ **então**

$$5 \quad \left[\begin{array}{l} v(n) \leftarrow d_{N-1-n} \end{array} \right. \quad (13)$$

6 **senão**

$$7 \quad \left[\begin{array}{l} v(n) \leftarrow d'_{N-1-n} = \begin{cases} -(d_{N-1-n} + 1), & n \text{ par} \\ d_{N-1-n} - |r|, & n \text{ ímpar} \end{cases} \end{array} \right. \quad (14)$$

$$8 \quad x_\ell(n) \leftarrow \frac{1}{r} [x_\ell(n-1) + v(n)] \quad (15)$$

9 **para** $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ **faça**

$$10 \quad \left[\begin{array}{l} \hat{s}(n) \leftarrow 2x_\ell(N-1-n) - 1 \end{array} \right. \quad (16)$$

fim

Na primeira etapa, a condição inicial $s(0) \in [-1, 1[$ é linearmente transformada em $x(0) \in [0, 1[$ usando $f_1(\cdot)$ em (11). Então $x(0)$ é decomposto na base $|r|$ com dígitos d_k . Usando-se d_k o Algoritmo 1 especifica a entrada $v(n)$ para o filtro linear descrito em (15) em que a saída é $x_\ell(n)$.

Solucionando (15) com $x_\ell(-1) = 0$ obtém-se [17]

$$x_\ell(n) = \sum_{j=0}^n \frac{v(j)}{r^{n-j+1}}. \quad (17)$$

Finalmente, estima-se $\hat{s}(n)$ para órbita com condição inicial $s(0)$ obtendo-se (16) pela mudança de índices de $x_\ell(n)$ e aplicando $f_3(\cdot)$ em (15).

O Teorema 1 fornece um limite superior para $|s(n) - \hat{s}(n)|$.

Teorema 1: Sejam $s(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ obtido usando (3) com condição inicial $s(0)$ e r fixo, e $\hat{s}(n)$ gerado como mostrado no Algoritmo 1 com a mesma condição inicial e parâmetros. Então,

$$\varepsilon(n) = |s(n) - \hat{s}(n)| \leq |r|^{n-N}, \quad (18)$$

para $0 \leq n \leq N-1$.

Demonstração: Divide-se a demonstração em dois casos:

A) Caso $r \geq 2$:

Aplicando-se $f_1(\cdot)$ em (16) e usando-se (17) e (13) tem-se

$$\hat{x}(n) = x_\ell(N-1-n) = \sum_{j=0}^{N-1-n} \frac{d_{N-1-j}}{r^{N-1-n-j+1}}. \quad (19)$$

Fazendo $N-1-n-j = k$ em (19) tem-se

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1-n} \frac{d_{k+n}}{r^{k+1}}. \quad (20)$$

De (6) e (20) e tendo-se em mente que $d_k \leq r-1$, tem-se

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{k+n}}{r^{k+1}} - \sum_{k=0}^{N-1-n} \frac{d_{k+n}}{r^{k+1}} \right| = \left| \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{d_{k+n}}{r^{k+1}} \right| \\ &\leq \left| (r-1) \sum_{k=N-n}^{\infty} r^{-(k+1)} \right| \\ &\leq \left| (r-1) \frac{r^{-(N-n+1)}}{(1-\frac{1}{r})} \right| = |r|^{n-N}. \end{aligned} \quad (21)$$

B) Caso $r \leq -2$:

Aplicando-se $f_1(\cdot)$ em (16) e usando-se (17) e (14) tem-se

$$\hat{x}(n) = x_\ell(N-1-n) = \sum_{j=0}^{N-1-n} \frac{d'_{N-1-j}}{r^{N-1-n-j+1}}. \quad (22)$$

Fazendo $N-1-n-j = k$ em (22) tem-se

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1-n} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}}. \quad (23)$$

Usando-se (23) e (10), obtêm-se

$$\varepsilon(n) = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}} - \sum_{k=0}^{N-1-n} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}} \right| = \left| \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{d'_{k+n}}{r^{k+1}} \right|. \quad (24)$$

Para n par e ímpar, tem-se $1 \leq |d'_{k+n}| \leq |r|$ em (24). Então,

$$\varepsilon(n) \leq \sum_{k=N-n}^{\infty} \frac{|d'_{k+n}|}{|r|^{k+1}} = \frac{|r|^{n-N}}{1-|r|} \leq |r|^{n-N}. \quad (25)$$

Para exemplificar, considere-se $r = -3$, $N = 51$ e

$$s(0) = \frac{2}{\pi} - 1. \quad (26)$$

Então,

$$x(0) = (s(0) + 1)/2 = 1/\pi = (0,0221210010\dots)_3. \quad (27)$$

Na Fig. 2(a) é mostrado o gráfico de d_n e na Fig. 2(b) é apresentado o gráfico do sinal $v(n)$ na entrada do filtro linear. Já na Fig. 2(c) tem as órbitas geradas usando o mapa não linear e o filtro linear e, finalmente, o erro $\varepsilon(n)$ junto com seu limite superior (18) são apresentados na Fig. 2(d). Observe que, para $n < 20$, $\varepsilon(n)$ está abaixo da precisão de máquina (10^{-16}) e não é mostrado.

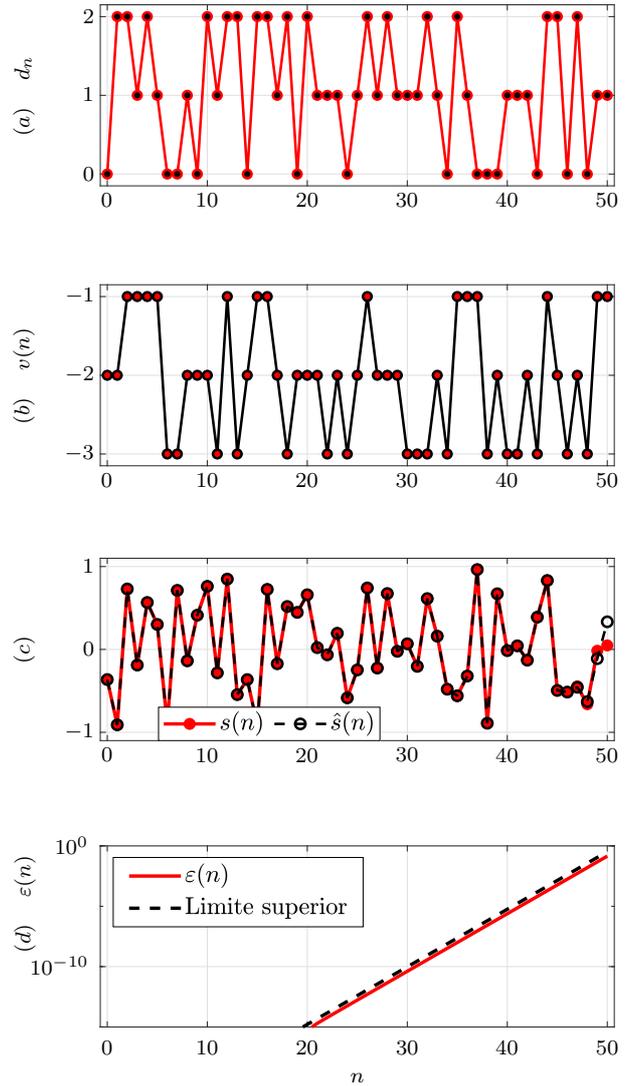


Fig. 2. (a) d_n , (b) $v(n)$, (c) $s(n)$ e $\hat{s}(n)$, (e) $\varepsilon(n)$ para $s(0) = \frac{2}{\pi} - 1$.

IV. DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA

O sistema linear (15) pode ser representado pela função de transferência $H(\omega)$,

$$H(\omega) = \frac{r^{-1}}{1 - r^{-1}e^{-i\omega}}, \quad \text{com } i = \sqrt{-1}. \quad (28)$$

Divide-se em três etapas o cálculo da SAC e da DEP do sistema proposto no Algoritmo 1. No diagrama em blocos da Fig. 3 sistematiza-se o cálculo.

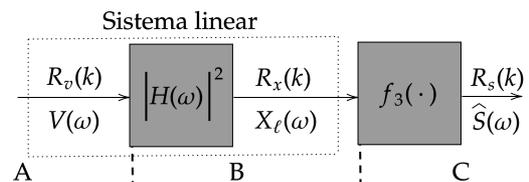


Fig. 3. Diagrama em bloco da SAC e DEP através do sistema proposto no Algoritmo 1.

Na primeira etapa (A), calcula-se a SAC e, em seguida, a DEP do sinal $v(n)$ na entrada do filtro linear. Na segunda etapa (B), obtém-se a DEP e, conseqüentemente, a SAC do sinal caótico $x_\ell(n)$ na saída do filtro recursivo. Finalmente, na terceira etapa (C), calcula-se a SAC e a DEP dos sinais caóticos $\hat{s}(n)$ gerados na saída do Algoritmo 1.

A) A entrada $v(n)$ do filtro linear para uma condição inicial aleatória pode ser modelada como uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Além disso, elas são equiprováveis com probabilidade $1/|r|$. A sequência $v(n)$ pertence ao conjunto $A^{\mathbb{Z}}$ com $A = \{0, 1, \dots, |r| - 1\}$ para r positivo e $A = \{r, \dots, -2, -1\}$ para r negativo. Sua média é $\bar{m}_v = (r - 1)/2$ e sua variância σ^2 é dada por

$$\sigma^2 = \frac{r^2 - 1}{12}. \quad (29)$$

Assim, a SAC na entrada do filtro é

$$R_v(k) = \left[\frac{r^2 - 1}{12} \right] \delta(k) + \left[\frac{r - 1}{2} \right]^2, \quad (30)$$

em que $\delta(\cdot)$ é a função impulso unitário. A DEP $V(\omega)$ é dada pela transformada de Fourier de tempo discreto (TFTD) de (30)

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_v(k) e^{-i\omega k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{r^2 - 1}{12} \right] \delta(k) + \left[\frac{r - 1}{2} \right]^2 \right\} e^{-i\omega k} \\ &= \left[\frac{r^2 - 1}{12} \right] + 2\pi \left[\frac{r - 1}{2} \right]^2 \delta(\omega) \text{ para } \omega \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (31)$$

B) Como a DEP da entrada e da saída de um filtro são relacionadas por [18]

$$X_\ell(\omega) = V(\omega) |H(\omega)|^2, \quad (32)$$

tem-se

$$\begin{aligned} X_\ell(\omega) &= \left\{ \left[\frac{r^2 - 1}{12} \right] + 2\pi \left[\frac{r - 1}{2} \right]^2 \delta(\omega) \right\} \frac{1}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega)} \\ &= \frac{r^2 - 1 + 6\pi (r - 1)^2 \delta(\omega)}{12(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))} \\ &= \frac{r^2 - 1}{12(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))} + \frac{\pi}{2} \delta(\omega). \end{aligned} \quad (33)$$

Usando-se o par transformado

$$\left(\frac{1}{r} \right)^{|k|} \rightleftharpoons \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega)} \quad (34)$$

em (33), segue que a TFTD inversa de $X_\ell(\omega)$ resulta em

$$\begin{aligned} R_x(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_\ell(\omega) e^{-i\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{r^2 - 1 + 6\pi (r - 1)^2 \delta(\omega)}{12(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))} \right\} e^{-i\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{r} \right)^{|k|} + \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (35)$$

C) Na implementação do Algoritmo 1 sua saída é dada pela aplicação de $f_3(\cdot)$ em (15). Então, pode-se calcular a SAC de (16) como

$$\begin{aligned} R_s(k) &= \mathbb{E} [(2x_\ell(n) - 1)(2x_\ell(n+k) - 1)] \\ &= 4\mathbb{E} [x_\ell(n)x_\ell(n+k)] - 2\mathbb{E} [x_\ell(n)] \\ &\quad - 2\mathbb{E} [x_\ell(n+k)] + 1 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{r} \right)^{|k|}, \end{aligned} \quad (36)$$

em que $\mathbb{E}[\cdot]$ é o operador valor esperado.

Finalmente, toma-se a TFTD de (36) obtendo-se a DEP na saída do Algoritmo 1,

$$\hat{S}(\omega) = \frac{r^2 - 1}{3(1 + r^2 - 2r \cos(\omega))}. \quad (37)$$

Este resultado concorda completamente com o obtido usando-se fórmula recursiva para $f^n(\cdot)$ em [11].

Para exemplificar, considere-se $r = -3$ para $N \rightarrow \infty$ e condição inicial aleatória. Então, na Fig. 4 tem-se os gráficos resultantes para SAC e DEP como proposto na Fig. 3.

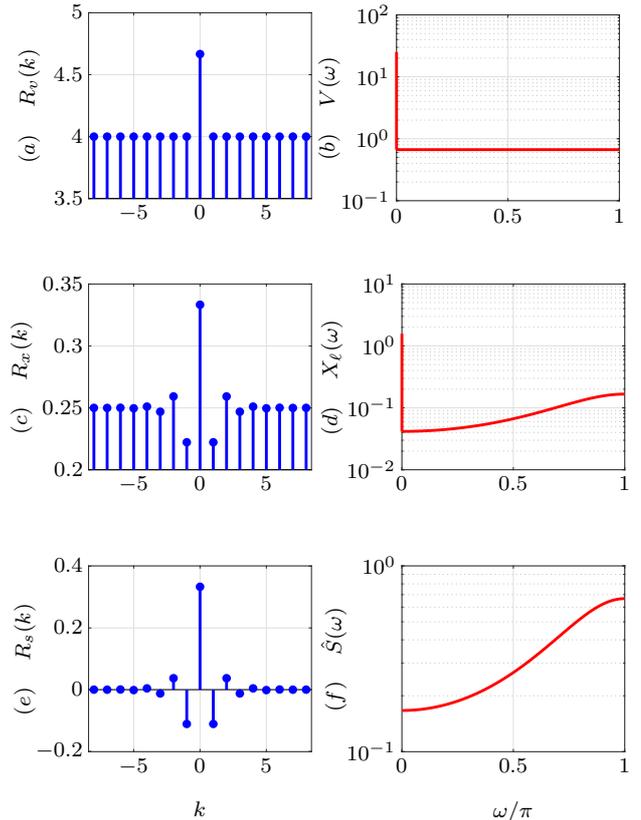


Fig. 4. (a) SAC e (b) DEP de $v(n)$, (c) SAC e (d) DEP de $x_\ell(n)$, (e) SAC e (f) DEP de $\hat{s}(n)$ para $r = -3$.

Nas Figs. 4(a) e (b) são mostradas a SAC e a DEP na entrada do filtro. Como esperado, a SAC é impulsiva e a DEP possui um espectro plano e componente dc. Já nas Figs. 4(c) e (d) são mostradas a SAC e a DEP na saída do sistema linear. Como pode se ver, a SAC oscila e decai rapidamente

convergiendo assintoticamente para $1/4$, e a DEP concentra-se nas altas frequências. Por fim, nas Figs. 4(e) e (f) são mostradas a SAC e a DEP do sinal $\hat{s}(n)$ em (16). Como o sinal na saída do Algoritmo 1 é a aplicação de $f_3(\cdot)$ sobre $x_\ell(n)$, conseqüentemente, o sinal resultante possui média nula.

Na Fig. 5 são ilustrados gráficos da SAC $R_s(k)$ para diferentes valores de r . Quando r é positivo $R_s(k)$ decai monotonicamente com $|k|$, e quando r é negativo $R_s(k)$ oscila. Quando $|r| \rightarrow \infty$ a SAC aproxima-se da forma impulsiva.

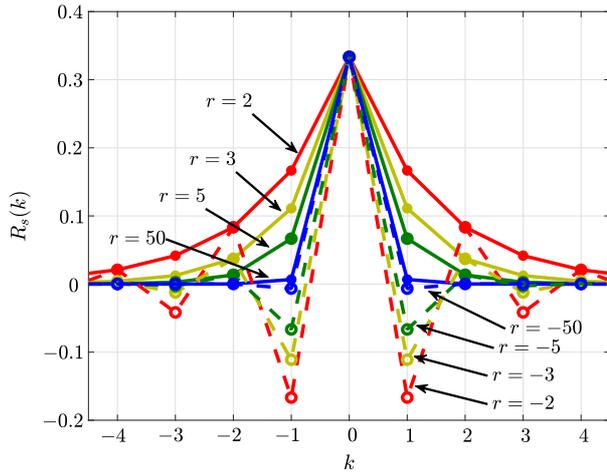


Fig. 5. SAC de (36) para diferentes valores de r .

Na Fig. 6 são mostrados gráficos da DEP de $\hat{S}(\omega)$ para diferentes valores de r . Quando r é positivo, $\hat{S}(\omega)$ tem máximo em $\omega = 0$ e mínimo para $\omega = \pi$, confirmando as propriedades passa-baixas dos sinais gerados. Por outro lado, quando r é negativo, $\hat{S}(\omega)$ tem máximo em $\omega = \pi$ e mínimo em $\omega = 0$, resultando em sinais passa alta. Nota-se a simetria entre r positivo e negativo.

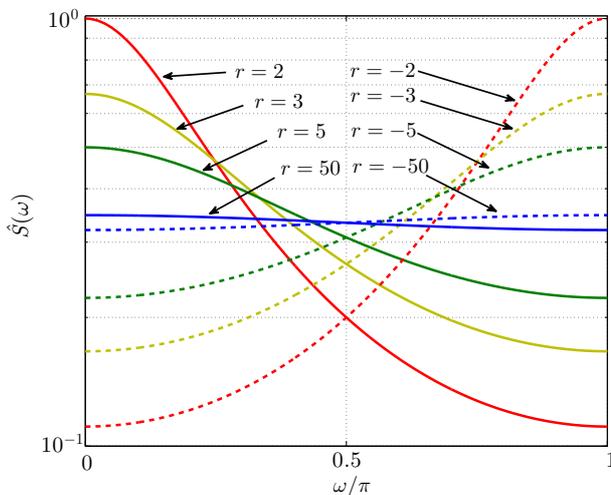


Fig. 6. DEP de (37) para diferentes valores de r .

V. CONCLUSÃO

Nesse artigo estendeu-se a representação linear de sinais caóticos proposta em [16] incluindo mapas lineares por partes com segmentos de inclinações negativas. Além disso, obteve-se a DEP desses sinais de forma direta utilizando-se da teoria de sistemas lineares. Os resultados analíticos obtidos foram verificados por meio de simulações numéricas e estão de acordo com resultados anteriores da literatura. Atualmente, os autores estão trabalhando na extensão dos resultados para mapas lineares por partes mais gerais.

REFERÊNCIAS

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos*, ser. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer New York, 2000.
- [2] H.-P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi, “Wireless communication with chaos,” *Physical Review Letters*, vol. 110, no. 18, p. 184101, apr 2013.
- [3] G. Kaddoum, “Wireless chaos-based communication systems: A comprehensive survey,” *IEEE Access*, vol. 4, pp. 2621–2648, 2016.
- [4] C. E. C. Souza, D. P. B. Chaves, and C. Pimentel, “Digital communication systems based on three-dimensional chaotic attractors,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 10 523–10 532, 2019.
- [5] M. Eisenkraft and G. Abib, “Sobre o desempenho em canal com ruído de um sistema de comunicação baseado em caos,” in *Anais de XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2013.
- [6] H.-P. Ren, C. Bai, Q. Kong, M. S. Baptista, and C. Grebogi, “A chaotic spread spectrum system for underwater acoustic communication,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 478, pp. 77 – 92, 2017.
- [7] C. Li, F. Marzani, and F. Yang, “Demodulation of chaos phase modulation spread spectrum signals using machine learning methods and its evaluation for underwater acoustic communication,” *Sensors*, vol. 18, no. 12, p. 4217, 2018.
- [8] H. Xu, Y. Li, J. Zhang, H. Han, B. Zhang, L. Wang, Y. Wang, and A. Wang, “Ultra-wideband chaos life-detection radar with sinusoidal wave modulation,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 27, no. 13, p. 1730046, dec 2017.
- [9] C. Pak and L. Huang, “A new color image encryption using combination of the 1d chaotic map,” *Signal Processing*, vol. 138, pp. 129–137, 2017.
- [10] N. A. Loan, N. N. Hurreh, S. A. Parah, J. W. Lee, J. A. Sheikh, and G. M. Bhat, “Secure and robust digital image watermarking using coefficient differencing and chaotic encryption,” *IEEE Access*, vol. 6, pp. 19 876–19 897, 2018.
- [11] R. A. Costa, M. B. Loiola, and M. Eisenkraft, “Correlation and spectral properties of chaotic signals generated by a piecewise-linear map with multiple segments,” *Signal Processing*, vol. 133, pp. 187–191, apr 2017.
- [12] A. Sahnoune and D. Berkani, “On the correlation of chaotic signals generated by multimodal skew tent map,” *Signal, Image and Video Processing*, vol. 12, no. 7, pp. 1273–1278, mar 2018.
- [13] R. A. da Costa and M. Eisenkraft, “Spectral characteristics of a general piecewise linear chaotic signal generator,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 72, pp. 441–448, jun 2019.
- [14] D. M. Kato and M. Eisenkraft, “Caracterização espectral de sinais caóticos: resultados analíticos,” in *Anais do XXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2008, pp. 1–6.
- [15] R. A. da Costa, M. B. Loiola, and M. Eisenkraft, “Caracterização espectral de sinais caóticos gerados pelo mapa de bernoulli com 2 e 3 segmentos,” in *Anais de XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*. Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2015, pp. 1–5.
- [16] D. F. Drake and D. B. Williams, “Linear, random representations of chaos,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 4, pp. 1379–1389, apr 2007.
- [17] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Addison Wesley Pub CO Inc, 2009.
- [18] S. S. Haykin, *Communication systems*, 4th ed. New York: Wiley, 2001.