

# Um Simulador Fase-Envoltória para o Processo $\alpha$ - $\mu$

Vanessa Mendes Rennó e José Cândido Silveira Santos Filho

**Resumo**— O esquema clássico para simulação de processos de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  restringe o parâmetro  $\mu$  a valores inteiros ou múltiplos de  $1/2$ . Neste trabalho, propõe-se um esquema de simulação mais realista, capaz de acomodar valores reais arbitrários para o parâmetro  $\mu$ , como observado na prática. Não menos importante, o esquema proposto abrange fase e envoltória, cumpre de forma exata as estatísticas de primeira ordem do modelo  $\alpha$ - $\mu$ , e bem aproxima as de segunda ordem. Todas essas estatísticas são analisadas em detalhe.

**Palavras-Chave**— distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , canais de desvanecimento, simulação.

**Abstract**— The classical simulation scheme for  $\alpha$ - $\mu$  fading processes restricts the parameter  $\mu$  to integer or half-integer values. In this work, we propose a more realistic simulation scheme that allows for arbitrary real values of the parameter  $\mu$ , as observed in practice. Not less important, the proposed scheme covers both phase and envelope, exactly matches the first-order statistics of the  $\alpha$ - $\mu$  model, and well approximates its second-order statistics. All those statistics are thoroughly analyzed.

**Keywords**—  $\alpha$ - $\mu$  distribution, fading channels, simulation.

## I. INTRODUÇÃO

Em sistemas de comunicações sem fio, o fenômeno de desvanecimento por múltiplos percursos é modelado por meio de distribuições estatísticas as mais diversas, tais como Rayleigh, Rice, Hoyt e Nakagami- $m$  [1]. A fim de atender ao constante aumento da demanda por serviços de dados, torna-se necessário descrever o canal de comunicação de forma mais aprofundada e realista, por meio de distribuições estatísticas mais flexíveis. Nesse sentido, a distribuição  $\alpha$ - $\mu$  [2] é um modelo estatístico generalizado que contempla o efeito conjunto de dois aspectos do fenômeno de desvanecimento em canais sem fio: a não-linearidade do meio de transmissão, representada pelo parâmetro  $\alpha$ , e a quantidade de agrupamentos de ondas de multipercursos, representada pelo parâmetro  $\mu$ .

Os modelos de desvanecimento são representações probabilísticas, uma vez que as características do canal de comunicação são de natureza aleatória. Portanto, o comportamento das variáveis envolvidas é descrito por meio de funções estatísticas, como por exemplo a função densidade de probabilidade (*probability density function*, PDF) ou, equivalentemente, sua forma integral, a função de distribuição acumulada (*cumulative distribution function*, CDF). Essas são as chamadas estatísticas de primeira ordem, que retratam apenas o comportamento estático do canal para um dado instante fixo de tempo. Por sua vez, a natureza dinâmica, variante no tempo, é retratada pelas estatísticas de segunda ordem (bem como de ordens superiores), tais como taxa de cruzamento de nível (*level crossing*

*rate*, LCR), duração média de desvanecimento (*average fading duration*, AFD) e taxa de cruzamento de nível de fase (*phase level crossing rate*, PCR).

Diante da complexidade dos sistemas modernos, a análise, o projeto e a otimização desses sistemas geralmente se baseiam em simulações de computador. Um simulador permite replicar características reais de um ambiente de operação, geralmente por meio de *software*. No contexto aqui descrito, a simulação é usada para emular um ambiente de desvanecimento, cobrindo muitos dos fenômenos de propagação. Como as distribuições estatísticas empregadas para descrever o comportamento do canal sem fio estão associadas a modelos físicos de desvanecimento, é possível em princípio implementar um simulador a partir do uso direto dos próprios modelos. Tais simuladores são comumente chamados de *clássicos*. Todavia, algumas vezes, a estrutura dos simuladores clássicos é insuficientemente flexível para acomodar a faixa de parâmetros observada na prática em sistemas reais. Na distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , por exemplo, o parâmetro  $\mu$  é um número real positivo, mas o simulador  $\alpha$ - $\mu$  clássico só permite valores de  $\mu$  inteiros ou múltiplos de  $1/2$  [2]. Até existem simuladores  $\alpha$ - $\mu$  que acomodam valores reais e arbitrários de  $\mu$  [3], mas estes se limitam a gerar amostras independentes, cumprindo portanto apenas as estatísticas de primeira ordem do processo. Gerar sequências autocorrelacionadas, que atendam a determinadas estatísticas de segunda ordem, é tarefa bem mais complexa. Exceto para o caso particularíssimo de desvanecimento Gaussiano, uma filtragem linear das amostras independentes não resolveria o problema, uma vez que essa operação arruinaria as estatísticas de primeira ordem [4]. Nesses casos, esquemas alternativos de simulação mostram-se necessários.

Ao que se sabe, não existe na literatura um simulador que (i) contemple as estatísticas de primeira e segunda ordens do processo  $\alpha$ - $\mu$ , (ii) considere a envoltória e a fase do canal e, sobretudo, (iii) permita valores reais e arbitrários para os parâmetros  $\alpha$  e  $\mu$ . Este trabalho visa preencher essa lacuna. O esquema proposto é baseado na combinação em cascata de duas técnicas de simulação: *random mixture* [5] e *rank matching* [6]. Essa abordagem foi explorada em [7] para o canal Nakagami- $m$ , tendo na ocasião sido denominada de simulador *random-mixture-rank-matching* (RM<sup>2</sup>). Aqui, a abordagem é generalizada para o canal  $\alpha$ - $\mu$ , do qual Nakagami- $m$  é um caso particular.

O restante do artigo está organizado como segue. Na Seção II, são apresentados o modelo  $\alpha$ - $\mu$  e a sua relação com o modelo Nakagami- $m$ , a serem explorados na construção do novo simulador. Na Seção III, são revisitados o simulador  $\alpha$ - $\mu$  clássico e as suas estatísticas de primeira e segunda ordens. O simulador proposto é detalhado na Seção IV, assim como suas estatísticas. Resultados numéricos são discutidos na Seção V. Por fim, a Seção VI apresenta as conclusões deste trabalho.

Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Brasil, E-mails: vmendesr@decom.fee.unicamp.br e candido@decom.fee.unicamp.br.

Este trabalho foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, Processo no. 2017/20189-9.

## II. O MODELO $\alpha$ - $\mu$ E SUA RELAÇÃO COM O MODELO NAKAGAMI- $m$

A distribuição  $\alpha$ - $\mu$  é um modelo generalizado de desvanecimento de curto prazo, originalmente proposto em [2]. Seu comportamento estatístico descreve o efeito conjunto de dois fenômenos de propagação em sistemas sem fio: a não-linearidade do meio de transmissão e os agrupamentos de multipercurso. Essa não-linearidade ocorre na forma de um parâmetro de potência  $\alpha$ , de modo que a envoltória do canal resulta na  $\alpha$ -ésima raiz da soma dos quadrados de  $2\mu$  componentes de multipercurso [2]:

$$R = \sqrt[\alpha]{\sum_{i=1}^{2\mu} G_i^2}, \quad (1)$$

em que  $G_i$  são processos Gaussianos independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) com  $\mathbb{E}(G_i) = 0$  e  $\mathbb{E}(G_i^2) = \hat{r}^\alpha / (2\mu)$ , sendo  $\mathbb{E}(\cdot)$  o operador esperança matemática e  $\hat{r} = \sqrt[\alpha]{\mathbb{E}(R^\alpha)}$ .

Como enunciado em [2], existe uma relação simples que conecta a envoltória do canal  $\alpha$ - $\mu$  à envoltória do canal Nakagami- $m$ . No modelo Nakagami- $m$ , a envoltória do canal, digamos  $R_N$ , com potência média  $\Omega = \mathbb{E}(R_N^2)$  e parâmetro de desvanecimento  $m = \mathbb{E}^2(R_N^2) / \mathbb{V}(R_N^2)$ , sendo  $\mathbb{V}(\cdot)$  o operador variância, é representada pela raiz quadrada da soma dos quadrados de  $2m$  processos Gaussianos i.i.d. [1], [8]:

$$R_N = \sqrt{\sum_{i=1}^{2m} G_i^2}, \quad (2)$$

em que  $\mathbb{E}(G_i) = 0$  e  $\mathbb{E}(G_i^2) = \Omega / (2m)$ . Comparando-se (1) e (2), nota-se portanto que, para  $m = \mu$  e  $\Omega = \hat{r}^\alpha$ , o quadrado da envoltória Nakagami- $m$  é igual à  $\alpha$ -ésima potência da envoltória  $\alpha$ - $\mu$ , ou seja,  $R^\alpha = R_N^2$ . Equivalentemente,  $R$  pode ser reescrito em termos de  $R_N$  como

$$R = R_N^{2/\alpha}. \quad (3)$$

O modelo estatístico  $\alpha$ - $\mu$  foi proposto originalmente apenas para a distribuição da envoltória do canal, deixando-se em aberto o comportamento da distribuição de fase associada [2]. Argumentou-se em [9] que o fenômeno da não-linearidade do meio de propagação não deveria afetar a distribuição de fase dos modelos de desvanecimento. Por outro lado, considerou-se em [10] que a não-linearidade afeta sim o comportamento da fase, com a relação em (3) mantendo-se válida em termos do canal complexo fase-envoltória:  $(Re^{j\Theta})^\alpha = (R_N e^{j\Theta_N})^2$ , sendo  $\Theta$  a fase  $\alpha$ - $\mu$  e  $\Theta_N$  a fase Nakagami- $m$ . Ou seja, não existe consenso sobre o modelo de fase mais apropriado para o canal  $\alpha$ - $\mu$ . Nem se pretende aqui apresentar argumentos em defesa de qualquer modelo. Em vez disso, por simplicidade, e um tanto quanto arbitrariamente, considera-se neste trabalho que o parâmetro de desvanecimento  $\alpha$  não afeta a distribuição de fase do canal, assim com feito em [9]. Dessa maneira, as estatísticas da fase  $\alpha$ - $\mu$  são as mesmas da fase Nakagami- $m$  com  $m = \mu$  e  $\Omega = \hat{r}^\alpha$ :

$$\Theta = \Theta_N. \quad (4)$$

Com base nas relações de envoltória e fase estabelecidas em (3) e (4), pode-se então aproveitar um esquema de simulação existente para canais Nakagami- $m$  a fim de se construir um esquema de simulação correspondente para canais  $\alpha$ - $\mu$ . Esse artifício é explorado tanto no simulador  $\alpha$ - $\mu$  clássico, revisitado na Seção III, quanto no simulador  $\alpha$ - $\mu$  proposto na Seção IV.

## III. O SIMULADOR $\alpha$ - $\mu$ CLÁSSICO

Os simuladores clássicos de desvanecimento são inspirados nos próprios modelos físicos do ambiente de propagação. Todavia, observa-se em (1) que o simulador  $\alpha$ - $\mu$  clássico só acomoda valores de  $\mu$  inteiros ou múltiplos de  $1/2$ . Apesar de tal limitação, o simulador clássico (ou, equivalentemente, o modelo físico) permite obter uma série de estatísticas importantes de primeira e segunda ordens para o canal  $\alpha$ - $\mu$ , assim chamadas de estatísticas clássicas. Diferentemente do modelo e do simulador associados, essas expressões estatísticas não apresentam qualquer restrição matemática a fim de que sejam utilizadas para valores reais arbitrários de  $\mu$ .

Seja  $X + jY = R_N e^{j\Theta_N}$  o canal complexo Nakagami- $m$  correspondente ao canal  $\alpha$ - $\mu$ , em que  $X$  é a componente em fase e  $Y$  a componente em quadratura. No método de simulação clássico,  $R_N$  é gerado pelo próprio modelo físico, dado em (2). Para incluir a fase  $\Theta_N$ , dividem-se as componentes Gaussianas em duas somas, que produzem  $X$  e  $Y$  separadamente, como detalhado em [7]. Por fim, com uso de (3) e (4), formam-se as amostras de envoltória e fase  $\alpha$ - $\mu$ . O simulador  $\alpha$ - $\mu$  clássico é ilustrado na Fig. 1, e as equações subjacentes são [7]

$$X = \text{sign} \left( \sum_{i=1}^{\mu} G_i \right) \sqrt{\sum_{i=1}^{\mu} G_i^2} \quad (5)$$

$$Y = \text{sign} \left( \sum_{i=\mu+1}^{2\mu} G_i \right) \sqrt{\sum_{i=\mu+1}^{2\mu} G_i^2} \quad (6)$$

$$R = \text{abs}(X + jY)^{\frac{2}{\alpha}} \quad (7)$$

$$\Theta = \arg(X + jY), \quad (8)$$

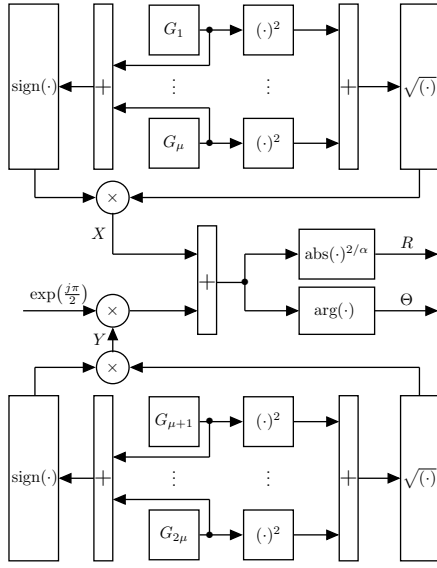
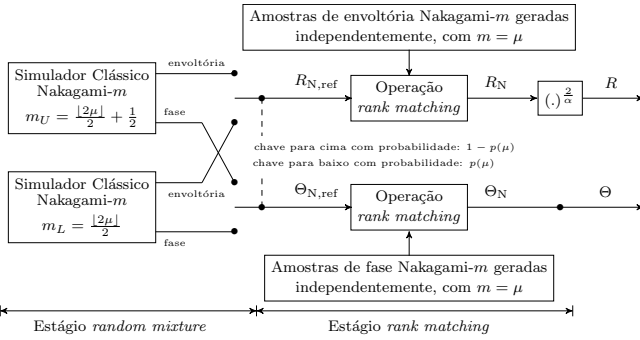
em que  $\text{sign}(\cdot)$  é a função sinal,  $\text{abs}(\cdot)$  denota valor absoluto e  $\arg(\cdot)$  denota a função argumento. Note que  $X$  e  $Y$  contêm  $\mu$  processos Gaussianos cada. Portanto, em princípio, esse esquema só funciona para  $\mu$  inteiro. Por outro lado, o esquema pode ser facilmente relaxado a fim de acomodar valores de  $\mu$  múltiplos de  $1/2$ , ao se incluir um termo Gaussiano extra em  $X$  ou em  $Y$ . Entretanto, esse é um cenário mais geral, pois  $X$  e  $Y$  deixam de ser i.i.d. [8]. Tal cenário não será discutido aqui.

Com base no modelo físico apresentado, a PDF da envoltória  $\alpha$ - $\mu$  pode ser obtida como [2]

$$f_R(r; \alpha, \mu, \hat{r}) = \frac{\alpha \mu^\mu r^{\alpha\mu-1}}{\hat{r}^\alpha \mu \Gamma(\mu)} \exp\left(\frac{-\mu r^\alpha}{\hat{r}^\alpha}\right), \quad (9)$$

em que  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama. Além disso, a LCR e a AFD, estatísticas de segunda ordem da envoltória  $\alpha$ - $\mu$ , são obtidas respectivamente como [2]

$$N_R(r; \alpha, \mu, \hat{r}) = \frac{\omega \mu^{(\mu-\frac{1}{2})} r^{\alpha(\mu-\frac{1}{2})}}{\sqrt{2\pi} \Gamma(\mu) \hat{r}^{\alpha(\mu-\frac{1}{2})} \exp(\mu \frac{r^\alpha}{\hat{r}^\alpha})} \quad (10)$$


 Fig. 1. O simulador  $\alpha$ - $\mu$  clássico.

 Fig. 2. O simulador  $\alpha$ - $\mu$  proposto.

$$T_R(r; \alpha, \mu, \hat{r}) = \frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(\mu, \mu \frac{r^\alpha}{\hat{r}^\alpha}) \exp\left(\mu \frac{r^\alpha}{\hat{r}^\alpha}\right) \hat{r}^{\alpha(\mu-\frac{1}{2})}}{\omega \mu (\mu-\frac{1}{2}) r^{\alpha(\mu-\frac{1}{2})}}, \quad (11)$$

em que  $\omega = 2\pi f_D$  é o desvio Doppler máximo e  $f_D = v/\lambda$ , sendo  $v$  a velocidade do móvel e  $\lambda$  o comprimento de onda. Por fim, com base em (4), a PDF da fase [11] e a PCR [12] para o modelo clássico  $\alpha$ - $\mu$  são obtidas respectivamente como

$$f_\Theta(\theta; \mu) = \frac{\Gamma(\mu) |\sin(2\theta)|^{(\mu-1)}}{2^\mu \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)^2} \quad (12)$$

$$N_\Theta(\theta; \mu) = \frac{\sqrt{\pi} f_D |\sin(2\theta)|^{(\mu-1)} \Gamma\left(\mu - \frac{1}{2}\right)}{2^{(\mu+\frac{1}{2})} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)^2}. \quad (13)$$

#### IV. O SIMULADOR $\alpha$ - $\mu$ PROPOSTO

Neste trabalho, adota-se o arcabouço eficiente de simulação introduzido para canais Nakagami- $m$  em [7], como base para uma proposta de simulador  $\alpha$ - $\mu$  que não apenas reproduz adequadamente as estatísticas clássicas de primeira e segunda ordens do processo  $\alpha$ - $\mu$ , mas também acomoda valores reais arbitrários dos parâmetros  $\alpha$  e  $\mu$ . O simulador proposto é ilustrado na Fig. 2, e descrito e analisado a seguir.

O esquema é baseado na combinação em cascata de duas técnicas de simulação, denominadas *random mixture* [5] e *rank matching* [6]. Primeiramente, no estágio *random mixture*, um processo de referência (digamos, envoltória  $R_{N,\text{ref}}$  e fase  $\Theta_{N,\text{ref}}$ ) é obtido a partir do sorteio entre ou, equivalentemente, da mistura aleatória de, dois diferentes processos Nakagami- $m$ . Esses processos têm valores inteiros ou múltiplos de  $1/2$  do parâmetro de desvanecimento, sendo imediatamente menor ou igual a (digamos,  $m_L$ ), e imediatamente maior que (digamos,  $m_U$ ), o parâmetro  $m$  desejado. Como estão sendo exploradas as relações de envoltória e fase em (3) e (4) entre os modelos Nakagami- $m$  e  $\alpha$ - $\mu$ , tem-se que  $m = \mu$  e, correspondentemente,  $m_L = \lfloor 2m \rfloor / 2 = \lfloor 2\mu \rfloor / 2$  e  $m_U = \lfloor 2m \rfloor / 2 + 1/2 = \lfloor 2\mu \rfloor / 2 + 1/2$ , em que  $\lfloor \cdot \rfloor$  é a função *floor*. Por exemplo, se o parâmetro de desvanecimento desejado for  $m = \mu = 1.6$ , então  $m_L = 1.5$  e  $m_U = 2$ , ou seja,  $m_L \leq \mu < m_U$ . As sequências Nakagami- $m$  com parâmetros de desvanecimento  $m_L$  e  $m_U$  podem ser gerados por qualquer método de simulação disponível, incluindo o método clássico [1], utilizado neste trabalho.

Note que o estágio *random mixture* é aplicável a valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento  $\mu$ . Note ainda que qualquer estatística do processo de saída do estágio *random mixture* pode ser escrita como a soma ponderada das estatísticas correspondentes dos processos Nakagami- $m$  de entrada com parâmetros  $m_L$  e  $m_U$ . A ponderação é dada pelas respectivas probabilidades de mistura  $p(\mu)$  e  $1 - p(\mu)$  dos processos de entrada, indicadas na Fig. 2. Portanto, uma tarefa central no estágio *random mixture* é projetar probabilidades de mistura apropriadas, que resultem em uma boa aproximação às estatísticas de interesse. Em [5], essa tarefa foi desenvolvida por meio de uma abordagem baseada em momentos (da envoltória), levando a  $p(\mu) = 2m_L(m_U - \mu)/\mu$ . Essa probabilidade de mistura é adotada neste trabalho.

A saída do estágio *random mixture* fornece a entrada do estágio *rank matching* [6]. Nesse segundo estágio, uma sequência fase-envoltória Nakagami- $m$  de saída ( $R_N, \Theta_N$ ) é obtida a partir da sequência fase-envoltória de referência de entrada ( $R_{N,\text{ref}}, \Theta_{N,\text{ref}}$ ) e de um conjunto de amostras de envoltória e fase Nakagami- $m$  geradas independentemente. A sequência de saída é um mero rearranjo dessas amostras Nakagami- $m$  independentes, de maneira que as amostras na sequência de saída correspondam exatamente ao *rank* das amostras na sequência de referência de entrada, ou seja, os mínimos ocorrem na mesma posição, os segundos mínimos ocorrem na mesma posição, e assim por diante. Essa operação é chamada de *rank matching*. No esquema proposto, devido ao estágio *random mixture* anterior, a sequência de referência de entrada é ora um processo Nakagami- $m$  com parâmetro de desvanecimento  $m_L$ , com probabilidade  $p(\mu)$ , ora um processo Nakagami- $m$  com parâmetro de desvanecimento  $m_U$ , com probabilidade  $1 - p(\mu)$ . Além disso, considerando as relações em (3) e (4) entre os modelos de desvanecimento Nakagami- $m$  e  $\alpha$ - $\mu$ , para um desejado conjunto de parâmetros  $\alpha$ ,  $\mu$  e  $\hat{r}$  da distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , as amostras Nakagami- $m$  independentes devem ser geradas de acordo com parâmetros  $m = \mu$  e  $\Omega = \hat{r}^\alpha$ . A operação de *rank matching* garante que a sequência de saída cumpra de maneira exata as estatísticas de primeira ordem do modelo Nakagami- $m$  [6].

Finalmente, as sequências  $(R, \Theta)$  de envoltória e fase  $\alpha$ - $\mu$  são obtidas a partir das sequências  $(R_N, \Theta_N)$  de envoltória e fase Nakagami- $m$  produzidas pelo estágio *rank matching*. A sequência de envoltória é obtida como em (3), ou seja,  $R = R_N^{2/\alpha}$ , e a sequência de fase permanece inalterada, como em (4), ou seja,  $\Theta = \Theta_N$ . Dessa maneira, uma sequência complexa  $\alpha$ - $\mu$  com parâmetros reais e arbitrários  $\alpha$ ,  $\mu$  e  $\hat{r}$  é obtida de acordo com as estatísticas de primeira ordem exatas, dadas em (9) e (12). No restante desta seção, são deduzidas as estatísticas de segunda ordem correspondentes.

Condicional a um dado sorteio de mistura, a sequência de referência  $R_{N,\text{ref}}$  produzida pelo estágio *random mixture* é um processo Nakagami- $m$ , com parâmetro de desvanecimento igual a, digamos,  $m_{\text{ref}}$  ( $m_{\text{ref}} = m_L$  ou  $m_{\text{ref}} = m_U$ , conforme o resultado do sorteio). Em [4], demonstrou-se que a geração de  $R_N$  (com parâmetros  $m$  e  $\Omega$ ) a partir de  $R_{N,\text{ref}}$  (com parâmetros  $m_{\text{ref}}$  e  $\Omega$ ) via operação de *rank matching* é equivalente à geração via método tradicional da inversão, ou seja,

$$R_N = F_{R_N}^{-1}(F_{R_N}(R_{N,\text{ref}}; m_{\text{ref}}, \Omega); m, \Omega), \quad (14)$$

em que  $F_{R_N}(r; m, \Omega)$  é a CDF e  $F_{R_N}^{-1}(u; m, \Omega)$  a CDF inversa da envoltória Nakagami- $m$ , dadas por [7, Eqs. (9) e (32)]. Na análise que segue, em vez de se utilizar a relação descrita em (14), é mais conveniente utilizar a relação inversa, escrevendo-se  $R_{N,\text{ref}}$  em termos de  $R_N$ , ou seja,

$$R_{N,\text{ref}} = F_{R_N}^{-1}(F_{R_N}(R_N; m, \Omega); m_{\text{ref}}, \Omega) \triangleq h_R(R_N; m_{\text{ref}}, m, \Omega). \quad (15)$$

Esse mesmo procedimento pode ser aplicado à fase da distribuição Nakagami- $m$ . Dessa maneira, tem-se que

$$\Theta_{N,\text{ref}} = F_{\Theta_N}^{-1}(F_{\Theta_N}(\Theta_N; m); m_{\text{ref}}) \triangleq h_{\Theta}(\Theta_N; m_{\text{ref}}, m), \quad (16)$$

em que  $F_{\Theta_N}(\Theta; m)$  é a CDF e  $F_{\Theta_N}^{-1}(u; m)$  a CDF inversa da fase Nakagami- $m$ , dadas por [7, Eqs. (33) e (34)]. De fato, com uso de (15) e (16), pode-se deduzir qualquer estatística de  $R_N$  e  $\Theta_N$  em termos das estatísticas correspondentes de  $R_{N,\text{ref}}$  e  $\Theta_{N,\text{ref}}$ . Por exemplo, para o caso das estatísticas de segunda ordem LCR, AFD e PCR, obtêm-se

$$N_{R_N}(r; m, \Omega) = N_{R_{N,\text{ref}}}(h_R(r; m_{\text{ref}}, m, \Omega); m_{\text{ref}}, \Omega) \quad (17)$$

$$T_{R_N}(r; m, \Omega) = T_{R_{N,\text{ref}}}(h_R(r; m_{\text{ref}}, m, \Omega); m_{\text{ref}}, \Omega) \quad (18)$$

$$N_{\Theta_N}(\theta; m) = N_{\Theta_{N,\text{ref}}}(h_{\Theta}(\theta; m_{\text{ref}}, m); m_{\text{ref}}), \quad (19)$$

em que  $N_{R_{N,\text{ref}}}(\cdot; m_{\text{ref}}, \Omega)$ ,  $T_{R_{N,\text{ref}}}(\cdot; m_{\text{ref}}, \Omega)$  e  $N_{\Theta_{N,\text{ref}}}(\cdot; m_{\text{ref}}, \Omega)$  são as estatísticas clássicas do modelo Nakagami- $m$ , dadas por (10), (11) e (13), respectivamente, substituindo-se  $\alpha = 2$ ,  $\mu = m_{\text{ref}}$  e  $\hat{r} = \sqrt{\Omega}$ .

No simulador proposto, como já discutido, o estágio *rank matching* é precedido por um estágio *random mixture*. Em função disso, as estatísticas globais são fornecidas como uma soma ponderada das estatísticas individuais para  $m_{\text{ref}} = m_L$  e  $m_{\text{ref}} = m_U$ , com os pesos sendo dados pelas probabilidades de mistura  $p(\mu)$  e  $1 - p(\mu)$ , respectivamente. Além disso, como a envoltória  $\alpha$ - $\mu$   $R$  é gerada a partir da envoltória Nakagami- $m$   $R_N$  por meio de  $R = R_N^{2/\alpha}$ , resulta que  $R$  cruza um dado nível  $r$  à mesma taxa com que  $R_N$  cruza o nível  $r^{\alpha/2}$ . Equivalentemente, devido à igualdade aqui adotada entre as fases dos processos Nakagami- $m$  e  $\alpha$ - $\mu$ , a taxa de cruzamento

da fase  $\alpha$ - $\mu$  coincide com a da fase Nakagami- $m$ . Por fim, combinando-se todos esses fatores com (17), (18) e (19), para  $m = \mu$  e  $\Omega = \hat{r}^\alpha$ , tem-se que as estatísticas de segunda ordem LCR, AFD e PCR associadas ao simulador  $\alpha$ - $\mu$  proposto são dadas respectivamente por

$$N_R(r; \alpha, \mu, \hat{r}) = p(\mu)N_{R_{N,\text{ref}}}(h_R(r^{\alpha/2}; m_L, \mu, \hat{r}^\alpha); m_L, \hat{r}^\alpha) + [1 - p(\mu)]N_{R_{N,\text{ref}}}(h_R(r^{\alpha/2}; m_U, \mu, \hat{r}^\alpha); m_U, \hat{r}^\alpha) \quad (20)$$

$$T_R(r; \alpha, \mu, \hat{r}) = p(\mu)T_{R_{N,\text{ref}}}(h_R(r^{\alpha/2}; m_L, \mu, \hat{r}^\alpha); m_L, \hat{r}^\alpha) + [1 - p(\mu)]T_{R_{N,\text{ref}}}(h_R(r^{\alpha/2}; m_U, \mu, \hat{r}^\alpha); m_U, \hat{r}^\alpha) \quad (21)$$

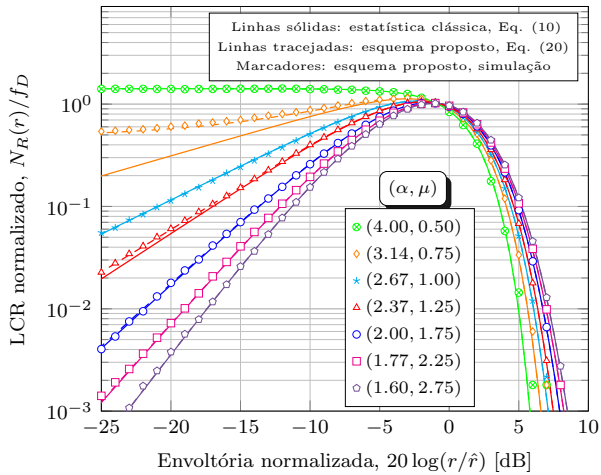
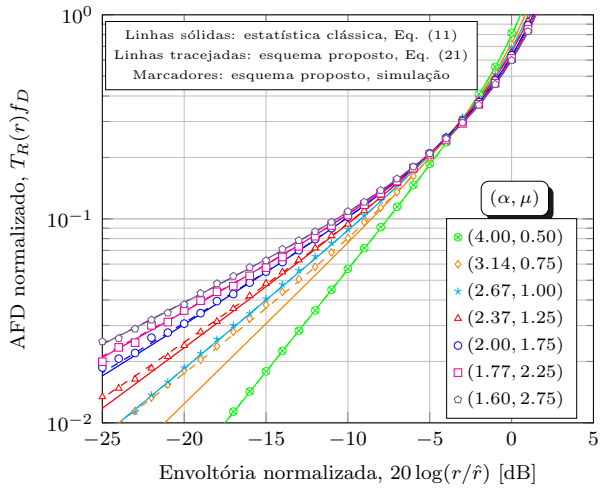
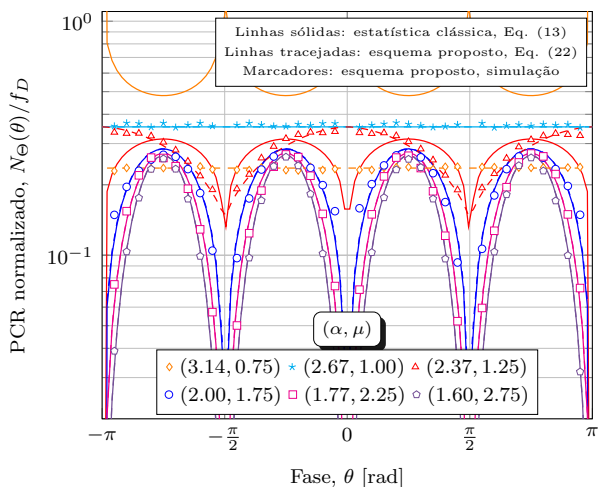
$$N_{\Theta}(\theta; \alpha, \mu) = p(\mu)N_{\Theta_{N,\text{ref}}}(h_{\Theta}(\theta; m_L, \mu); m_L) + [1 - p(\mu)]N_{\Theta_{N,\text{ref}}}(h_{\Theta}(\theta; m_U, \mu); m_U). \quad (22)$$

## V. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, são apresentados resultados numéricos a fim de se comparar o desempenho do simulador  $\alpha$ - $\mu$  proposto às estatísticas clássicas correspondentes. Foram analisadas as estatísticas de segunda ordem LCR, AFD e PCR, ilustradas nas Figs. 3, 4 e 5, respectivamente. Nas figuras, as estatísticas  $\alpha$ - $\mu$  clássicas, dadas em (10), (11) e (13), são representadas por linhas sólidas, e as estatísticas associadas ao simulador  $\alpha$ - $\mu$  proposto, dadas em (20), (21) e (22), por linhas tracejadas. Além disso, os resultados das simulações de Monte Carlo para o esquema proposto são representados por marcadores. A título de ilustração, o valor do parâmetro  $\mu$  foi variado como 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.75, 2.25 e 2.75, e o valor do parâmetro  $\alpha$  foi ajustado correspondentemente como 4, 3.14, 2.67, 2.37, 2, 1.77 e 1.6, de modo a cumprir uma mesma figura de desvanecimento do canal [2], fixada (arbitrariamente) em  $\mathbb{V}(R^2)/\mathbb{E}^2(R^2) = 4/7$  para todos os casos.

Observa-se que os resultados de simulação e os resultados analíticos para o esquema proposto estão em perfeita harmonia. Além disso, observa-se que, de modo geral, esses resultados mantêm uma excelente concordância com as estatísticas clássicas, tornando-se delas praticamente indistinguíveis à medida que o parâmetro  $\mu$  aumenta. Além disso, quando  $\mu$  é inteiro ou múltiplo de  $1/2$ , as estatísticas clássicas e as estatísticas do simulador proposto coincidem.

Uma discrepância digna de nota entre o esquema proposto e as estatísticas clássicas ocorre para a PCR quando  $\mu < 1$ , como indicado na Fig. 5. Note que, quando  $\mu = 0.5$ , a partir do modelo físico do simulador  $\alpha$ - $\mu$  clássico, é possível concluir que a PCR é nula, já que o sinal só apresenta a componente em fase, tendo portanto uma fase limitada aos valores 0 e  $\pi$ . Além disso, quando  $0.5 < \mu < 1$ , o primeiro estágio do simulador  $\alpha$ - $\mu$  proposto, do tipo *random mixture*, produz sequências Nakagami- $m$  de referência com parâmetros  $m_L = 0.5$  e  $m_U = 1$ . Portanto, a PCR vale 0 para  $m_L = 0.5$  e  $f_D/\sqrt{2}$  para  $m_U = 1$ . Dessa maneira, quando  $0.5 < \mu < 1$ , a PCR do simulador proposto será  $(1 - p(\mu))(f_D/\sqrt{2})$ , menor pois que quando  $\mu = 1$ , como se observa na Fig. 5.


 Fig. 3. LCR do canal  $\alpha$ - $\mu$ : simulador proposto versus estatística clássica.

 Fig. 4. AFD do canal  $\alpha$ - $\mu$ : simulador proposto versus estatística clássica.

 Fig. 5. PCR do canal  $\alpha$ - $\mu$ : simulador proposto versus estatística clássica.

## VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho, propôs-se um esquema de geração de amostras de fase e de envoltória para o canal de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  que (i) acomoda valores reais arbitrários para os parâmetros de desvanecimento  $\alpha$  e  $\mu$ , (ii) corresponde exatamente às estatísticas de primeira ordem da distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , e (iii) aproxima-se com boa precisão das estatísticas de segunda ordem do modelo físico  $\alpha$ - $\mu$ . Pelo que se sabe, não existe nenhum outro esquema de simulação fase-envoltória para o canal  $\alpha$ - $\mu$  que cumpra os requisitos (i)–(iii). Simulações de Monte Carlo atestam a eficiência da solução aqui proposta. O novo esquema corrige uma forte limitação do simulador clássico, restrito a agrupamentos discretos de ondas de multipercurso, consistindo portanto em uma ferramenta mais realista de análise, projeto e otimização de sistemas sem fio avançados.

## REFERÊNCIAS

- [1] M. Nakagami, “The  $m$ -distribution: A general formula of intensity distribution of rapid fading,” in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*. Elsevier, 1960, pp. 3–36.
- [2] M. D. Yacoub, “The  $\alpha$ - $\mu$  distribution: A physical fading model for the Stacy distribution,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, no. 1, pp. 27–34, Jan. 2007.
- [3] V. M. Rennó, R. A. A. de Souza, and M. D. Yacoub, “On the generation of white samples in severe fading conditions,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 23, no. 1, pp. 180–183, Jan. 2019.
- [4] J. C. S. Santos Filho and M. D. Yacoub, “Coloring non-gaussian sequences,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 12, pp. 5817–5822, Dec. 2008.
- [5] G. T. F. Abreu, “On the moment-determinance and random mixture of Nakagami- $m$  variates,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, no. 9, pp. 2561–2575, Sep. 2010.
- [6] J. C. S. Santos Filho, M. D. Yacoub, and G. Fraidenraich, “A simple accurate method for generating autocorrelated Nakagami- $m$  envelope sequences,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 11, no. 3, pp. 231–233, Mar. 2007.
- [7] J. C. S. Santos Filho, B. V. Teixeira, M. D. Yacoub, and G. T. F. Abreu, “The  $RM^2$  Nakagami fading channel simulator,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 12, no. 5, pp. 2323–2333, May 2013.
- [8] M. D. Yacoub, “Nakagami- $m$  phase-envelope joint distribution: A new model,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 59, no. 3, pp. 1552–1557, Mar. 2010.
- [9] M. D. Yacoub, “The  $\alpha$ - $\eta$ - $\kappa$ - $\mu$  fading model,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 64, no. 8, pp. 3597–3610, Aug. 2016.
- [10] A. K. Papazafeiropoulos and S. A. Kotsopoulos, “Generalized phase-crossing rate and random FM noise for  $\alpha$ - $\mu$  fading channels,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 59, no. 1, pp. 494–499, Jan. 2010.
- [11] M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, and J. C. S. Santos Filho, “Nakagami- $m$  phase-envelope joint distribution,” *Electr. Lett.*, vol. 41, no. 5, pp. 259–261, Mar. 2005.
- [12] D. B. da Costa, M. D. Yacoub, J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich, and J. R. Mendes, “Generalized Nakagami- $m$  phase crossing rate,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 10, no. 1, pp. 13–15, Jan. 2006.