

Avaliação e Comparação do FEM e dos Elementos de Aresta em um Problema Eletromagnético Dinâmico

Lucas Ferreira Lopes e Ramon Dornelas Soares

Resumo— Neste trabalho, o método dos Elementos Finitos e dos Elementos de Aresta avaliam um problema de autovalor em duas dimensões. Os algoritmos construídos apresentam soluções numéricas para um guia de ondas retangular, constituído de um condutor elétrico perfeito com vácuo no interior. Os resultados numéricos obtidos, com ambos os métodos, são comparados às soluções analíticas, sendo determinado erro relativo e a taxa de convergências de cada método. Os algoritmos construídos tiveram o tempo de processamento avaliados.

Palavras-Chave — Elementos Finitos, FEM, Autovalor, Elementos de Aresta, VFEM.

I. INTRODUÇÃO

O guia de ondas eletromagnéticas é, em geral, uma estrutura metálica oca com dielétrico em seu interior. Este guia propicia a propagação de ondas eletromagnéticas em frequências específicas, as quais podem ser determinadas a partir do formato e das dimensões de sua estrutura. Neste trabalho, o guia retangular, com vácuo no seu interior, é avaliado analiticamente [1] e com técnicas numéricas [2-3].

Os resultados numéricos para o guia analisado são gerados por dois algoritmos diferentes, o primeiro utilizando funções de base nodais (*Finite Element Method*-FEM) e o segundo utilizando funções de base vetoriais (*Vector Finite Element Method*-VFEM) [3-4]. Os resultados usando o FEM e o VFEM foram comparados ao resultado analítico do guia propiciando que as taxas de convergência de cada técnica fossem determinadas. Também foram avaliados o tempo de processamento e a precisão da resposta para cada algoritmo. A avaliação do desempenho de ambas as técnicas objetiva a construção de algoritmos capazes de analisar problemas de propagação em altas frequências adotadas na rede 5G.

O FEM e o VFEM requerem a construção computacional da geometria do problema analisado, ou seja, a construção da malha. Esta malha, subdivida em elementos, é usada com o conjunto de equações que governam o problema para obter o sistema de equações lineares e a solução numérica.

II. FORMULAÇÃO USADA NO ALGORITMO FEM

Nesta seção, os sistemas lineares de equações para o FEM e o VFEM são apresentados. O caso TM_z de um guia de ondas retangular com vácuo em seu interior é analisado. Este caso utiliza as equações de Maxwell admitindo um ambiente simples (homogêneo, isotrópico, sem perdas e sem fontes). Com estas equações pode-se obter a equação de Helmholtz:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H} \right) - k^2 \mu_r \vec{H} = 0, \quad (1)$$

onde \vec{H} é o campo magnético (A/m), μ_r é a permeabilidade relativa (H/m), ϵ_r é a permissividade relativa (F/m) e k é o

número de onda, sendo dado por $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. As constantes μ_0 e ϵ_0 são, respectivamente, a permeabilidade e permissividade no vácuo. Já ω é a velocidade angular (rad/s).

O FEM e o VFEM requerem a construção da Forma Fraca, uma equação integro-diferencial que é usada no domínio computacional do problema (seção transversal do guia). Esta equação pode ser obtida aplicando o método dos Resíduos Ponderados na Equação (1), resultando em:

$$\int_s \frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \times \vec{T}) \cdot (\nabla \times \vec{H}) ds - k^2 \mu_r \int_s \vec{T} \cdot \vec{H} ds = - \int_l \vec{T} \cdot \left(\hat{n} \times \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H} \right) dl, \quad (2)$$

onde \vec{T} é uma função de teste vetorial, l são os contornos (as paredes do guia, $dl = dx$ ou $dl = dy$), s é área interna ao guia ($ds = dxdy$) e \hat{n} é o vetor normal a superfície do guia. A integral de contorno é nula, já que os contornos são considerados condutores elétricos perfeitos, $\hat{n} \times (\nabla \times \vec{H}) = 0$ [3].

A construção do algoritmo do VFEM é feita usando uma função de interpolação linear para \vec{H} descrita por

$$\vec{H}(x, y) \approx \sum_{j=1}^3 h_j \vec{N}_j(x, y), \quad (3)$$

onde h_j são as incógnitas a serem determinadas para a aresta j do elemento triangular com arestas $j = \{1, 2 \text{ e } 3\}$ e \vec{N}_j é a função de base vetorial associada a aresta j . A função de teste \vec{T} , para o mesmo elemento (arestas $i = \{1, 2 \text{ e } 3\}$), é construída de modo semelhante a \vec{H} , fazendo na Equação (3) os valores de todos os h_j iguais a um e resultando em:

$$\vec{T}(x, y) \approx \sum_{i=1}^3 \vec{N}_i(x, y). \quad (4)$$

Substituindo as Equações (3) e (4) na Equação (2) obtém-se o sistema de equações $[S^e][h] = k^2 [T^e][h]$, sendo os elementos destas matrizes dados por:

$$S_{ij}^e = \frac{1}{\epsilon_r} \int_s (\nabla \times \vec{N}_i) \cdot (\nabla \times \vec{N}_j) h_j ds \quad (5)$$

e

$$T_{ij}^e = \mu_r \int_s (\vec{N}_i \cdot \vec{N}_j) h_j ds. \quad (6)$$

Construindo as matrizes $[S^e]$ e $[T^e]$ para todos os elementos do domínio computacional, obtém-se o sistema linear global:

$$[S][h] = k^2 [T][h]. \quad (7)$$

Já para a construção do algoritmo FEM é necessário utilizar a seguinte função linear de interpolação:

$$\vec{H}(x, y) \approx \sum_{j=1}^3 h_j N_j(x, y) \hat{x} + \sum_{j=1}^3 h_{j+n} N_{j+n}(x, y) \hat{y}, \quad (8)$$

na qual os parâmetros h_j e h_{j+n} são as duas incógnitas a serem determinadas para o vértice j do elemento triangular $j = \{1, 2 \text{ e } 3\}$, sendo n o número total de vértices da malha. N_j é a função de base nodal associada ao vértice j . Já a função N_{j+n} é igual à função N_j [2]. A função de teste \vec{T} , para o mesmo elemento (vértices $i = \{1, 2 \text{ e } 3\}$), é construída de modo semelhante a \vec{H} , fazendo na Equação (8) os valores de todos os h_j e h_{j+n} iguais a um e resultando em:

$$\vec{T}(x, y) \approx \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) \hat{x} + \sum_{i=1}^3 N_{i+n}(x, y) \hat{y}. \quad (9)$$

Substituindo as Equações (8) e (9) na Equação (2) obtém-se o sistema linear de equações: $[S^e][h] = k^2[T^e][h]$. Sendo os elementos destas matrizes dadas por:

$$S_{ij}^e = \mu_r \int_S \left[(N_i \cdot N_j) h_j + (N_{i+n} \cdot N_{j+n}) h_{j+n} \right] dS \quad (10)$$

e

$$T_{ij}^e = \frac{1}{\epsilon_r} \int_S \left(\frac{dN_i}{dy} \cdot \frac{dN_j}{dx} \right) h_j - \left(\frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_{j+n}}{dy} \right) h_{j+n} dS - \frac{1}{\epsilon_r} \int_S \left(\frac{dN_{i+n}}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dy} \right) h_j - \left(\frac{dN_{i+n}}{dy} \cdot \frac{dN_{j+n}}{dx} \right) h_{j+n} dS. \quad (11)$$

Após montar as matrizes $[S^e]$ e $[T^e]$ para cada elemento da malha obtém-se o sistema linear da Equação (7). No algoritmo FEM, faz-se necessário impor uma segunda condição de contorno devido ao campo normal ($\hat{n} \cdot \vec{H} = 0$) [2]. Esta condição foi imposta usando técnicas de colocação depois do sistema linear da Equação (7) ter sido construído.

III. RESULTADOS

O guia de ondas analisado possui proporções de 2 m na direção x e 1 m na direção y . As malhas utilizadas no FEM e VFEM possuem 77, 281, 4193, 10736 e 16577 vértices e foram construídas usando o software FEMM [5], sendo os vértices distribuídos uniformemente. As frequências específicas que cada modo TM_{op} propaga no guia podem ser obtidas determinando os autovalores k da Equação (7). Os resultados apresentados na Tabela I contém as soluções analítica [1] e numéricas (com 16577 vértices) para os três primeiros modos de propagação. Também está presente o erro relativo dado por:

$$E.R. (\%) = \frac{|k^{\text{numérico}} - k^{\text{Analítico}}|}{k^{\text{Analítico}}} \cdot 100\% \quad (12)$$

Na Tabela I, observa-se que o E.R. para o FEM é menor que o do VFEM para os três modos apresentados, sendo que os espúrios foram suprimidos dos resultados do FEM. Estes espúrios não estão presentes nos resultados do VFEM devido à função de base vetorial atender à condição $\nabla \cdot \vec{N}_j = 0$ [3]. Ambas as técnicas apresentam valores de k nulos ($k = 0$).

A Figura 1 apresenta, para ambas técnicas, o erro relativo $E.R.$ e o tempo de processamento (T.P.) para o modo TM_{11} (usando um computador IntelCore I5 4200U e 8GB de RAM). Estes resultados são apresentados em função do tamanho

TABELA I. VALORES NUMÉRICOS E ANALÍTICOS DE k E $E.R.$

Soluções		TM_{11}	TM_{12}	TM_{13}
Análítica	k	3,512407	4,442882	5,663586
FEM	k	3,512370	4,442808	5,663432
	E.R. (%)	0,001046	0,001675	0,002725
VFEM	k	3,512281	4,442548	5,662962
	E.R. (%)	0,003576	0,007529	0,011028

máximo das arestas de cada malha. Os resultados do T.P. são próximos nas malhas com maior quantidade de vértices (4193, 10736 e 16577 vértices), enquanto o E.R. do FEM foi menor em todas as malhas. As taxas de convergência foram determinadas pela razão, em escala logarítmica, da diferença do E.R. apresentado pelas malhas com 16577 e 77 vértices pela diferença do máximo tamanho das arestas destas duas malhas. As taxas de convergência obtidas foram muito próximas, sendo o valor encontrado de 2,06 para o FEM e de 1,99 para o VFEM. Esta proximidade pode ser visualizada no gráfico, pois os resultados de E.R. são quase paralelos.

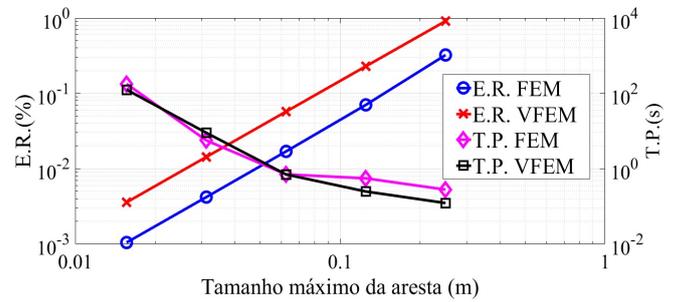


Fig. 1. T.P. e E.R. em função do tamanho máximo da aresta

IV. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi construído dois algoritmos, um usando os Elementos Finitos (FEM) e o outro usando os Elementos de Aresta (VFEM), para analisar um guia de ondas retangular. As soluções numéricas para malhas com diferentes densidades de vértices foram comparadas com a solução analítica e possibilitou determinar a eficiência dos algoritmos nas perspectivas do erro relativo, da taxa de convergência e do tempo de processamento.

O desempenho do FEM foi superior ao do VFEM na perspectiva do erro relativo para todas as malhas utilizadas quando o modo TM_{11} foi avaliado. Para este modo, os métodos apresentaram taxas de convergência e tempos de processamento muito semelhantes. Para a malha de maior densidade (com 16577 vértices) foram apresentados o erro relativo para os módulos TM_{11} , TM_{12} e TM_{13} , em todos os resultados o erro dos FEM foi menor. Vale ressaltar que o algoritmo dos VFEM não apresentou resposta com modos espúrios e foi construído apenas impondo a condição de contorno tangencial dos campos. No algoritmo FEM, além da condição tangencial foi necessário impor, usando colocação, a condição normal dos campos.

REFERÊNCIAS

- [1] Harrington R. F. (2001). Time Harmonic Electromagnetic Fields. Wiley.
- [2] A.P. Peterson, S.R Ray e R. Mittra. (1998). Computational Methods for Electromagnetics. IEEE press.
- [3] C. J. Reddy, Manohar D. Deshpande, C. R. Cockrell, and Fred B. Beck, "Finite Element Method for Eigenvalue Problems in Electromagnetics," NASA Technical Paper 3485, Dec. 1994.
- [4] Jin, Jianming. (2002). The Finite Elements Method in Electromagnetics. Wiley, 2nd edition.
- [5] FEMM (Acesso em maio de 2020). Finite element method magnetics: Homepage. <http://www.femm.info>.