

Representação de imagens em espaço suporte hiperbólico

Laís Bássame Rodrigues, Edson Agustini e Sueli I. R. Costa

Resumo— Neste trabalho propomos, em uma abordagem conceitual, um espaço suporte de pixels para imagens circulares oriundas de superfícies esféricas utilizando ambiente hiperbólico. Trabalhamos com três projeções desse espaço em um hemisfério da esfera e um modelo de imagem que trata tons de cinza como distribuições gaussianas consideradas no semiplano de Poincaré \mathbb{H}^2 com a métrica de Fisher. Através de um ordenamento parcial em \mathbb{H}^2 propomos uma operação morfológica de abertura.

Palavras-Chave— Geometria hiperbólica, espaço suporte de pixels, morfologia matemática, distância de Fisher.

Abstract— This is a conceptual approach of a work where we propose a support space of pixels to circular images from spherical surfaces using hyperbolic spaces. We work with three projections of this space on a hemisphere of a sphere and an image model that treat grey tones as Gaussian distribution considered in the Poincaré half-plane \mathbb{H}^2 with the Fisher metric. Through a partial ordering in \mathbb{H}^2 we propose an opening morphological operation.

Keywords— Hyperbolic geometry, support space of pixels, mathematical morphology, Fisher distance.

I. INTRODUÇÃO

Câmeras do tipo CCD (charge-coupled device) geram imagens a partir de uma sequência de frames onde cada pixel é resultado da média das intensidades luminosas dos pixels correspondentes na sequência de frames. Este procedimento permite que associemos, de forma natural, a cada pixel da imagem final um par de números (μ, σ^2) sendo μ média e σ o desvio padrão das intensidades dos pixels dos frames. Dessa forma, ao invés de um tom de cinza escalar $t \in \mathbb{R}$ a cada pixel do espaço suporte Ω , teremos, para cada $p \in \Omega$, uma distribuição Gaussiana $N(\mu, \sigma^2)$. Como podemos ver em [1] um ambiente natural para representação de distribuições gaussianas é o modelo hiperbólico do semiplano de Poincaré e a distância entre distribuições pode ser calculada utilizando a métrica de Fisher. Com essa abordagem, trabalharemos com morfologia matemática, em particular erosão e dilatação, ordenando pontos do semiplano de Poincaré com o auxílio da métrica hiperbólica.

Neste trabalho, optamos por utilizar apenas imagens quadradas que são oriundas de superfícies esféricas. Como nosso interesse é a superfície, vamos desprezar as partes da imagem que não correspondem à superfície, ou seja, vamos considerar o círculo circunscrito à imagem desta. Em uma tal imagem, o espaço suporte tradicional (representado por

uma matriz) trata igualmente os pixels centrais da imagem, associados a uma região quase plana, e os pixels da borda da esfera representando uma área muito maior da esfera. Entretanto, ao planificar uma superfície esférica concentramos, em pouco espaço (borda), muita informação. Para lidar com esse tipo de situação estamos propondo um novo espaço suporte de pixels utilizando o modelo hiperbólico do disco de Poincaré. Acreditamos que este procedimento permita um ganho computacional no processamento tradicional de imagens especialmente no que diz respeito aos detalhes próximos ao bordo do disco, uma vez que a métrica hiperbólica é mais adequada para este tipo de detalhamento. Consideramos aqui três projeções da imagem em um hemisfério da esfera para analisar como o novo espaço suporte representa a superfície original.

II. PRÉ-REQUISITOS DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Existem vários modelos para a geometria hiperbólica. Neste trabalho, utilizaremos o modelo do semiplano de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ com a métrica $ds_{\mathbb{H}^2}^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ e o modelo do disco de Poincaré $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ com a métrica $ds_{\mathbb{D}^2}^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$. Podemos verificar [3] que:

- as geodésicas de \mathbb{H}^2 são as semirretas e as semicircunferências perpendiculares ao eixo y (Figura 1 à esquerda);
- as geodésicas de \mathbb{D}^2 são os diâmetros e os arcos de circunferência ortogonais ao bordo de \mathbb{D}^2 (Figura 1 à direita);
- os dois modelos são isométricos.

Chamaremos a distância entre dois pontos de $d_{\mathbb{H}^2}$ e $d_{\mathbb{D}^2}$ nos modelos do semiplano e do disco, respectivamente.

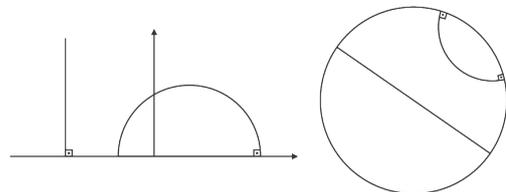


Fig. 1. Geodésicas nos modelos do semiplano e do disco

Para as operações com pixels utilizaremos o modelo \mathbb{H}^2 com a métrica de Fisher, que mede a distância entre duas distribuições gaussianas caracterizadas por sua média μ e desvio padrão σ , dada por $ds_F^2 = \frac{d\mu^2 + 2d\sigma^2}{\sigma^2}$. Com essa métrica as geodésicas de \mathbb{H}^2 são semirretas e semielipses perpendiculares ao eixo y [1]. Afim de aproveitar a bem fundamentada teoria do modelo do semiplano \mathbb{H}^2 com a métrica $ds_{\mathbb{H}^2}^2$

faremos a seguinte mudança de variáveis $(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{2}}, y\right)$. Dessa forma, a distância entre dois tons de cinza de dois pixels será dada por

$$d((\mu_1, \sigma_1), (\mu_2, \sigma_2)) = \sqrt{2}d_{\mathbb{H}^2} \left(\left(\frac{\mu_1}{\sqrt{2}}, \sigma_1 \right), \left(\frac{\mu_2}{\sqrt{2}}, \sigma_2 \right) \right).$$

III. ESPAÇO SUPORTE DE PIXELS HIPERBÓLICO Ω_H

A proposta do nosso trabalho é trocar o espaço de pixels tradicional Ω_T pelo espaço suporte Ω_H que estamos chamando de espaço suporte de pixels hiperbólico. O modelo hiperbólico que utilizaremos nesta etapa é o modelo do disco \mathbb{D}^2 . O espaço suporte Ω_H será formado por círculos concêntricos divididos em duas camadas distintas.

Denotaremos por $Q_{i,j}$ os pixels de Ω_H , onde i é a coroa (espaço entre dois círculos consecutivos) no qual se encontra o pixel e j é a posição na coroa, girando no sentido anti-horário (Figura 2).

A camada interna será composta por um círculo (sem divisões) central, que chamaremos de $Q_{0,0}$ e por k coroas de tal forma que a primeira coroa (vizinha a $Q_{0,0}$) terá n divisões, a segunda coroa $2n$ divisões, e assim por diante. Os pixels dessa camada são $Q_{0,0} \cup Q_{i,j}$ tal que $i = 1, \dots, k$ e $j = 0, \dots, n2^{i-1} - 1$.

A camada externa será composta por c coroas. Cada uma dessas coroas terá $4T$ divisões. Como nosso interesse é manter uma quantidade maior de pixels na borda, essa camada foi projetada para conter, aproximadamente, 75% dos pixels. Os pixels $Q_{i,j}$ dessa camada são tais que $i = k + 1, \dots, k + c$ e $j = 0, \dots, 4T - 1$.

A diferença entre as medidas hiperbólicas dos raios dos círculos do espaço suporte é constante. Essa constante (que chamaremos de l) foi escolhida de forma que na borda da imagem em Ω_H os pixels se assemelhem (em tamanho) aos pixels da imagem em Ω_T . Dessa forma, a função $s(x) = \lambda \frac{e^{lx} - 1}{e^{lx} + 1}$, sendo λ constante positiva, determina os raios dos círculos de tal forma que as medidas euclidianas dos raios são $s(1), s(2), \dots, s(k + c + 1)$.

O espaço suporte Ω_H tem, aproximadamente, 62,8% dos pixels da imagem em Ω_T quadrada de $P \times P$ pixels. Essa escolha foi feita pelo fato de que a área do círculo inscrito ao quadrado é $0,785P^2$. Além disso, como nosso foco é a borda da imagem, optamos por reduzir a quantidade de pixels do centro tomando apenas 80% dos pixels do círculo, ou seja, $0,8 \times 0,785 \times P^2 = 0,628P^2$. A quantidade de círculos em cada camada bem como a quantidade de divisões em cada coroa depende de P . A Figura 2 é um exemplo de espaço suporte Ω_H para uma imagem que, em Ω_T , tem 20×20 pixels. Para esse caso, $k = 4, n = 4, c = 3$ e $T = 16$. Após a construção do espaço suporte Ω_H as imagens são sobrepostas afim de aproximar os tons de cinza dos pixels para a construção da imagem. Em nosso trabalho elaboramos um algoritmo para determinação dos parâmetros k, n, c e T e um algoritmo para a aproximação dos tons de cinza.

Como essas imagens foram originadas de superfícies esféricas é natural questionar como uma projeção de Ω_H na esfera retrata a superfície original. Para responder essa questão estamos trabalhando com três projeções diferentes.

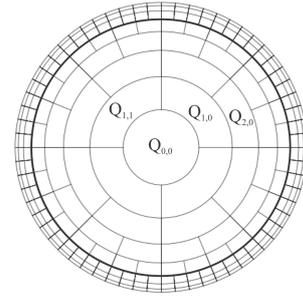


Fig. 2. Exemplo de espaço suporte hiperbólico

As três projeções levam a imagem do espaço Ω_H em um hemisfério de uma esfera. Entretanto, as projeções agem de maneiras diferentes. Chamaremos a imagem de $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ em Ω_H , onde $r = s(k + c + 1)$. Seja $S_r = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z > 0\}$ e $S_R = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0\}$. As projeções são dadas por:

$$\begin{aligned} T_1 : D &\longrightarrow S_r, T_2 : D \longrightarrow S_r, T_3 : D \longrightarrow S_R \\ T_1(x, y) &= \left(\frac{2xr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{2yr^2}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{r(r^2 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2 + r^2} \right) \\ T_2(x, y) &= \left(x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right) \\ T_3(x, y) &= \left(\frac{2xrR}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{2yrR}{x^2 + y^2 + r^2}, \frac{R(r^2 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2 + r^2} \right) \end{aligned}$$

Uma característica da projeção T_1 é levar geodésicas de \mathbb{D}^2 em arcos de circunferência perpendiculares ao bordo de S_1 . A projeção T_2 é cilíndrica e tem a vantagem de manter o aspecto visual da imagem sobre a esfera sem distorção quando vista na direção do eixo z . Na projeção T_3 o raio R da esfera S_R foi tomado de tal forma que a área hiperbólica de D seja igual a área euclidiana de S_R , ou seja, $R = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{1-r^2}}$. Os esquemas gráficos das projeções T_1 e T_3 estão, respectivamente, nas Figuras 3 e 4 abaixo:

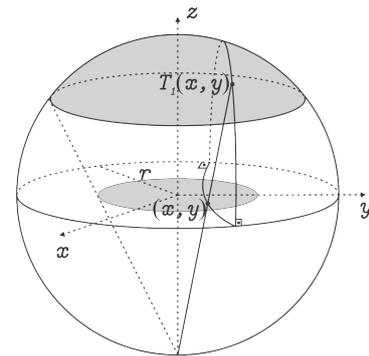
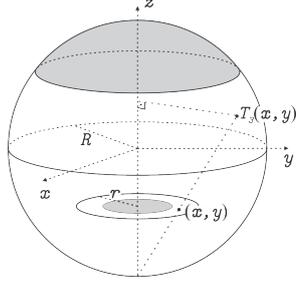
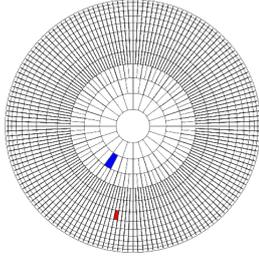
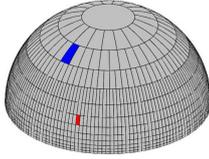
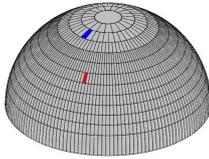
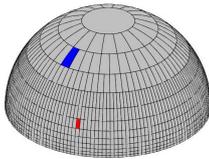


Fig. 3. Projeção T_1

Para termos uma idéia visual de como as projeções estão agindo sobre o espaço suporte Ω_H tomamos uma imagem que em Ω_T tem 50×50 pixels. Na Figura 5 estão pintados de azul o pixel $Q_{2,26}$ e de vermelho o pixel $Q_{6,112}$. Nas Figuras 6, 7 e 8 os pixels azul e vermelho são, respectivamente, imagens de $Q_{2,26}$ e $Q_{6,112}$ por T_1, T_2 e T_3 . Observe que, apesar dos raios das esferas na Figura 6 e 8 serem diferentes, o aspecto visual das duas imagens é igual.


 Fig. 4. Projeção T_3

 Fig. 5. Pixel azul $Q_{2,26}$ e pixel vermelho $Q_{6,112}$.

 Fig. 6. Pixel azul $T_1(Q_{2,26})$ e pixel vermelho $T_1(Q_{6,112})$

 Fig. 7. Pixel azul $T_2(Q_{2,26})$ e pixel vermelho $T_2(Q_{6,112})$

 Fig. 8. Pixel azul $T_3(Q_{2,26})$ e pixel vermelho $T_3(Q_{6,112})$

Denotemos por A_H a área hiperbólica (no modelo \mathbb{D}^2) de $Q_{i,j}$ e por A_E a área euclidiana (no plano \mathbb{R}^2). Além disso, dadas as projeções acima denotaremos por A_1 a área de $T_1(Q_{i,j})$, A_2 a área de $T_2(Q_{i,j})$ e A_3 a área de $T_3(Q_{i,j})$, onde A_1, A_2 e A_3 são calculadas sobre a esfera. As equações abaixo nos fornecem as áreas de cada pixel $Q_{i,j}$. A primeira linha de cada definição de área é para o caso $i = 0$, a segunda linha é para o caso $0 < i \leq k$ e a terceira linha é para o caso $k < i \leq c$.

$$A_H(Q_{i,j}) = \begin{cases} \frac{4\pi s^2(1)}{1-s^2(1)} \\ \frac{4\pi}{n2^{i-1}} \left(\frac{s^2(i+1)}{1-s^2(i+1)} - \frac{s^2(i)}{1-s^2(i)} \right) \\ \frac{\pi}{T} \left(\frac{s^2(i+1)}{1-s^2(i+1)} - \frac{s^2(i)}{1-s^2(i)} \right) \end{cases}$$

$$A_E(Q_{i,j}) = \begin{cases} \pi s^1(1) \\ \frac{\pi}{n2^{i-1}} \left(s^2(i+1) - s^2(i) \right) \\ \frac{\pi}{4T} \left(s^2(i+1) - s^2(i) \right) \end{cases}$$

$$A_1(Q_{i,j}) = \begin{cases} \frac{4\pi r^2 s^2(1)}{s^2(1)+r^2} \\ \frac{4\pi r^2}{n2^{i-1}} \left(\frac{s^2(i+1)}{s^2(i+1)+r^2} - \frac{s^2(i)}{s^2(i)+r^2} \right) \\ \frac{\pi r^2}{T} \left(\frac{s^2(i+1)}{s^2(i+1)+r^2} - \frac{s^2(i)}{s^2(i)+r^2} \right) \end{cases}$$

$$A_2(Q_{i,j}) = \begin{cases} 2\pi r \left(r - \sqrt{r^2 - s^2(1)} \right) \\ \frac{2\pi r}{n2^{i-1}} \left(\sqrt{r^2 - s^2(i)} - \sqrt{r^2 - s^2(i+1)} \right) \\ \frac{\pi r}{2T} \left(\sqrt{r^2 - s^2(i)} - \sqrt{r^2 - s^2(i+1)} \right) \end{cases}$$

$$A_3(Q_{i,j}) = \begin{cases} \frac{4\pi R^2 s^2(1)}{s^2(1)+r^2} \\ \frac{4\pi R^2}{n2^{i-1}} \left(\frac{s^2(i+1)}{s^2(i+1)+r^2} - \frac{s^2(i)}{s^2(i)+r^2} \right) \\ \frac{\pi R^2}{T} \left(\frac{s^2(i+1)}{s^2(i+1)+r^2} - \frac{s^2(i)}{s^2(i)+r^2} \right) \end{cases}$$

No estudo das transformações que mapeiam uma imagem de uma esfera no disco de Poincaré (e vice-versa) é natural perguntarmos sobre a existência de uma isometria no lugar das projeções apresentadas acima, sendo a esfera com a métrica induzida do espaço euclidiano e o modelo do disco com a métrica hiperbólica. A métrica riemanniana $ds_{\mathbb{D}^2}^2$ é de curvatura gaussiana negativa, constante e igual a -1 , enquanto que a métrica euclidiana induzida sobre a esfera é de curvatura gaussiana positiva constante e igual a 1 . Sendo assim, o Teorema Egrégio de Gauss da Geometria Diferencial assegura a não existência de uma isometria sob essas condições. A projeção T_3 preserva área total de um disco de raio euclidiano r do Disco de Poincaré na esfera de raio R , mas não é uma isometria.

IV. OPERADORES MORFOLÓGICOS

O espaço suporte Ω_H não é igualmente distribuído e nem possui uma estrutura vetorial, por isso, ao invés das definições de erosão, dilatação e bloco estrutural apresentadas em [4] vamos trabalhar com definições análogas àquelas para grafos. A rede pontos formada pelos pixels em Ω_H é um grafo simples, normalmente 4-conexo ou 8-conexo. Neste trabalho assumiremos que as vizinhanças são análogas ao tipo 8-conexo.

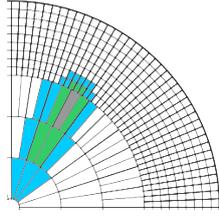
Segundo [2] uma vizinhança de um grafo será dada por $N_G(v) = \{v' \in V \mid (v, v') \in E\}$. Além disso, uma sequência v_0, v_1, \dots, v_k de vértices distintos de um grafo é um caminho de comprimento k se v_i e v_{i+1} são vizinhos para todo i em $0, 1, \dots, k-1$. Na Figura 9 a seguir podemos ver uma vizinhança em Ω_H de comprimento 1 (formada pelo pixel cinza e pelos pixels verdes) e uma vizinhança de comprimento 2 (formada pelo pixel cinza, juntamente com os verdes e os azuis).

Ainda em [2], a erosão é definida como sendo o valor mínimo entre uma vizinhança de $Q_{i,j}$ e o próprio $Q_{i,j}$.

$$[\varepsilon_G(f)](Q_{i,j}) = \min \{f(v) \mid v \in N_G(Q_{i,j}) \cup \{Q_{i,j}\}\}.$$

A dilatação é obtida considerando o máximo:

$$[\delta_G(f)](Q_{i,j}) = \max \{f(v) \mid v \in N_G(Q_{i,j}) \cup \{Q_{i,j}\}\}.$$


 Fig. 9. Exemplos de vizinhança em Ω_H

A imagem f é definida como a função que leva cada pixel $Q_{i,j}$ de Ω_H em um tom de cinza $t_{i,j} = f(Q_{i,j})$ que é uma distribuição gaussiana representada graficamente como ponto do semiplano \mathbb{H}^2 com a métrica ds_F^2 . Após normalizar a imagem, $t_{i,j}$ é obtido calculando-se a média e o desvio padrão dos tons de cinza dos pixels em uma vizinhança W de $Q_{i,j}$. No nosso trabalho tomamos essa vizinhança W como sendo um caminho de comprimento 2.

Assumiremos que N_G é um caminho de comprimento 1.

A operação γ obtida pela composição $\delta_G(\varepsilon_G(f))$ é chamada de abertura.

Para calcular a erosão e a dilatação, precisamos ordenar os pontos no semiplano. Esse ordenamento pode ser parcial. Entretanto, faz-se necessário, com esse ordenamento, definir um ínfimo e um supremo para qualquer conjunto de pontos. Mas, como estamos trabalhando com imagens finitas, é suficiente definir um mínimo e um máximo. No artigo [4] os autores trabalham com alguns ordenamentos diferentes. Vejamos alguns deles. Sejam $z_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, u$ pontos do semiplano \mathbb{H}^2 , ou seja, z'_i s são tons de cinza.

- Ordenamento produto: O mínimo $\wedge_{\mathcal{H}^2}$ entre os z'_i s é dado por $\wedge_{\mathcal{H}^2} z_i = (\wedge x_i) + i \exp(\wedge \ln(y_i))$, (Figura 10) onde \wedge é o mínimo padrão da reta real. O supremo é dado trocando-se \wedge por \vee .

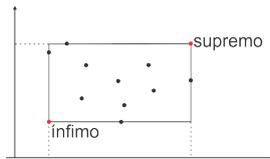


Fig. 10. Ordenamento produto

- Ordenamento polar: O ordenamento polar é dado por

$$z_i \leq_{H^2}^{pol} z_j \iff \begin{cases} \eta_i < \eta_j & \text{ou} \\ \eta_i = \eta_j & \text{e } \tan \phi_i \leq \tan \phi_j \end{cases},$$

onde $\eta = \text{dist}_{\mathcal{H}^2}((x, y), (0, 1))$ e $\phi = \arctan \frac{x^2 + y^2 - 1}{2x}$ com $z = (x, y)$ (Figura 11). O supremo é análogo.

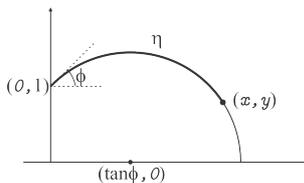


Fig. 11. Ordenamento polar

Estamos propondo o próximo ordenamento inspirados no ordenamento produto, porém, utilizando a métrica hiperbólica, natural no espaço das distribuições gaussianas.

- Ordenamento hiperbólico: Seja m a média aritmética dos x'_i s. Seja $d = \{d_1, \dots, d_u\}$ onde d_i é a distância euclidiana entre $(m, 0)$ e z_i e seja $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_u\}$ tal que $\theta_i = \arccos\left(\frac{x_i - m}{d_i}\right)$. Dessa forma, o mínimo $\wedge_h z_i = (m + \min\{d\} \cos(\max\{\theta\}), \min\{d\} \sin(\max\{\theta\}))$ (Figura 12). O supremo é obtido trocando-se o min por max e max por min.

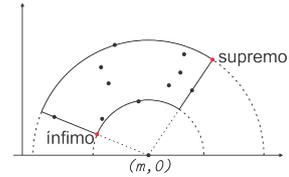
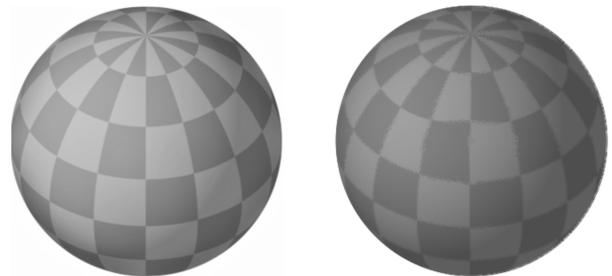


Fig. 12. Ordenamento hiperbólico

As ilustrações dos exemplos a seguir foram geradas por algoritmos que criamos em linguagem de programação Python. Vejamos como o processo sugerido afeta uma imagem. Primeiramente, na Figura 13 à esquerda (disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Esfera>, acesso em jul/2015) temos a uma imagem no espaço Ω_T com 300×300 pixels. À direita temos a mesma imagem no espaço Ω_H . Chamaremos a Figura 13 à direita de imagem teste.


 Fig. 13. Imagem teste no espaço Ω_T e no espaço Ω_H

É usual [4] na área de processamento de imagens trabalharmos com as componentes real (eixo horizontal) e imaginária (eixo vertical) separadamente. Dessa forma, todas as imagens apresentadas a seguir estão divididas em parte real (à esquerda) e parte imaginária (à direita). Na Figura 14 podemos visualizar as partes real e imaginária da imagem teste.

Utilizando os ordenamentos apresentados vejamos a erosão da imagem teste nas Figuras 15, 16 e 17 e a abertura nas Figuras 18, 19 e 20.

V. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Este é um trabalho em andamento onde propomos, utilizando o ambiente hiperbólico, um esquema para o espaço suporte de pixels específico para imagens circulares oriundas de esferas. Foi feita uma abordagem conceitual com simulações comparativas com o que é apresentado em [4]. O propósito foi considerar uma redução de pixels que vai se concentrando

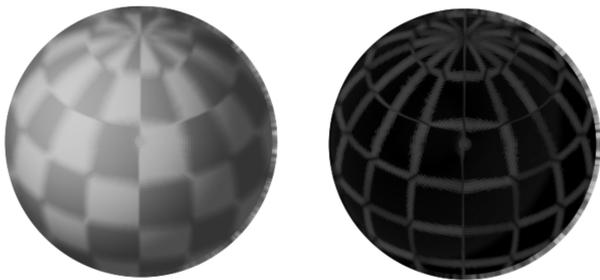


Fig. 14. Partes real e imaginária da imagem teste

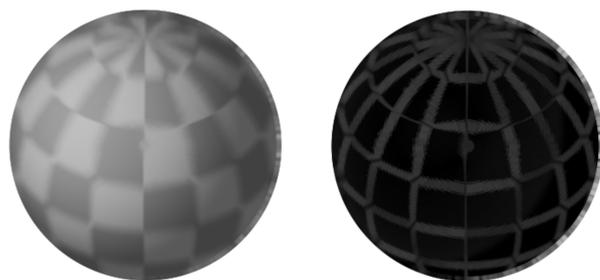


Fig. 18. Abertura da imagem teste utilizando o ordenamento produto

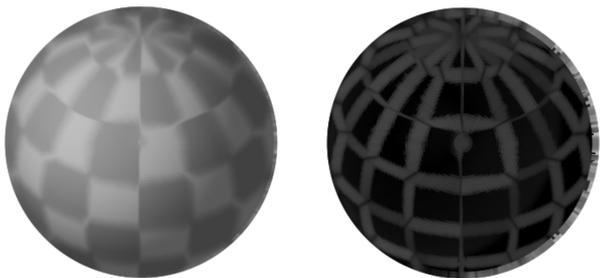


Fig. 15. Erosão da imagem teste utilizando o ordenamento produto

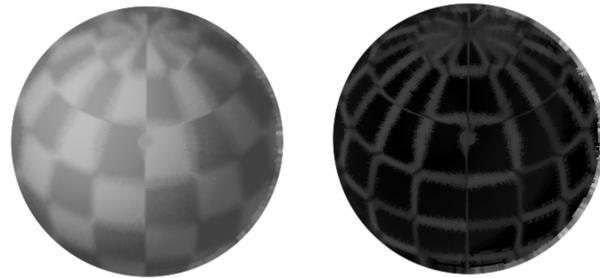


Fig. 19. Abertura da imagem teste utilizando o ordenamento polar

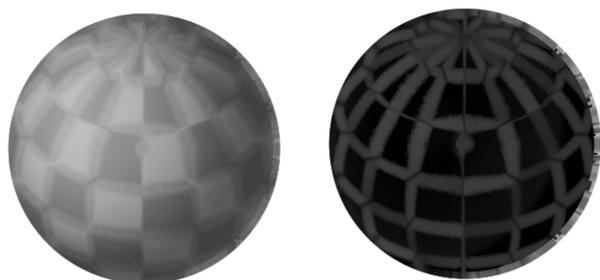


Fig. 16. Erosão da imagem teste utilizando o ordenamento polar

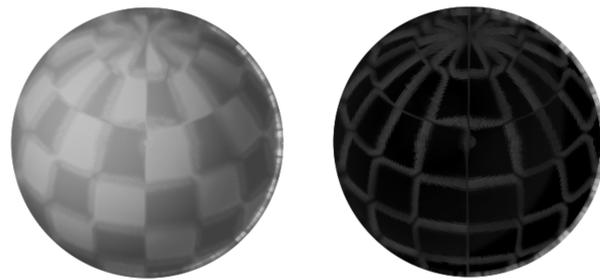


Fig. 20. Abertura da imagem teste utilizando o ordenamento hiperbólico

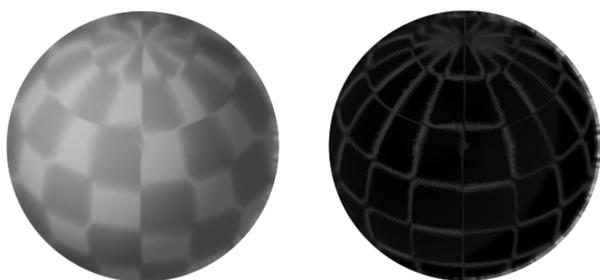


Fig. 17. Erosão da imagem teste utilizando o ordenamento circular

gradativamente no bordo de forma a estar compatível com ter mais informação onde se tem maior área da superfície esférica representada. Foi também proposto um ordenamento para as operações de erosão e dilatação de imagens, assumindo que os tons de cinza tenham, localmente, comportamento gaussiano. Na sequência faremos um estudo mais aprofundado sobre varias questões que podem ser aqui levantadas, algumas delas pertinentemente sugeridas pelos revisores: complexidade e tempo de processamento das diferentes versões conside-

radas, comparação de distorção de imagens (PNSR), como é usualmente feito nos sistemas de compressão, codificação de imagens para transmissão em canais ruidosos e possível adaptação do Mapa das Distâncias Euclidianas (EDM) para o modelo aqui proposto. Naturalmente, visando possíveis aplicações, temos a questão da necessidade de se ter “hardware” compatível com o modelo proposto. Neste sentido, uma motivação é a existência, na captura de imagens, de exemplos de desenvolvimento de chips com CCD arrays de outros formatos como o linear, o circular e a partição “ROSA” ([5] p.37).

REFERÊNCIAS

- [1] S.I.R Costa, S.A. Santos, J.E. Strapsson. Fisher information distance: a geometrical reading, *Discrete Applied Mathematics*, 2014.
- [2] P. Soille, *Morphological Image Analysis*. Springer-Verlag, 1999.
- [3] L.B. Rodrigues. Reticulados Hiperbólicos em espaços quocientes mergulhados isometricamente em espaços euclidianos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, (2010).
- [4] J. Angulo, S. Velasco-Forero. Morphological processing of univariate Gaussian distribution-valued images based on Poincaré upper-half plane representation. In: *Geometric Theory of Information, Signals and Communication Technology*, pp 331-366. Springer, 2014.
- [5] L. Shapiro, G. Stockman, *Computer Vision*. Prentice Hall, 2000.